

高等学校教材

# 经济应用数学基础—— 微积分

主编 曲敬哲

 高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

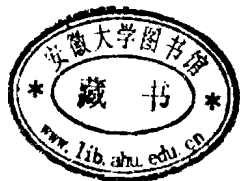
# 经济应用数学基础——微积分

Jingji Yingyong Shuxue Jichu——Weijifen

主 编 曲敬哲

编 者(按姓氏笔画排序)

朱建明 刘华玲 周 晟 赵 辉 康悦明



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本书根据高等学校“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成,与当前《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(数学三)中微积分的内容相吻合。全书内容循序渐进,例题及习题题型丰富,结构清晰,通俗易懂。

全书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、微分方程与差分方程,书末附极坐标简介和复数简介、部分习题答案与提示。本书可作为高等学校经济管理类各专业微积分课程的教材或教学参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学基础.微积分/曲敬哲主编.--北京:  
高等教育出版社,2012.8

ISBN 978-7-04-035190-3

I. ①经… II. ①曲… III. ①经济数学-高等学校-  
教材②微积分-高等学校-教材 IV. ①F224.0②O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第161825号

策划编辑 张彦云 责任编辑 贾翠萍 张彦云 封面设计 于文燕 版式设计 杜微言  
插图绘制 邓超 责任校对 刘莉 责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印 刷 北京奥鑫印刷厂  
开 本 787mm×960mm 1/16  
印 张 29  
字 数 520千字  
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
版 次 2012年8月第1版  
印 次 2012年8月第1次印刷  
定 价 41.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物 料 号 35190-00

# 前 言

微积分是高等学校经济管理类各专业学生必修的数学基础课之一,我校开设这门课程已近四十年之久,这本教材是2011年上海市教委重点课程建设项目的研究成果之一。本书教学内容的深度和广度符合“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”,与当前《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(数学三)中微积分的内容相吻合,与其他同类教材相比,本书有以下几方面特点:

1. 基本理论前后呼应,保证了理论体系的完备。
2. 每节开端明确本节教学的重点、难点,每章末有对本章内容的小结。
3. 各章节例题紧扣教学要点,题型全面,难度有梯次,解法多样。
4. 习题按节配置,重视对“三基”的掌握;每章后配置总习题,强调对知识的综合应用,重在提高;题目量大、面广,题型全。
5. 加大了用数学方法解决经济问题的例题的比重。
6. 内容循序渐进,讲解深入浅出。

全书共一册,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、微分方程与差分方程等。各章节配有习题和总习题,书末附部分习题答案与提示。本书可作为高等学校经济管理类各专业微积分课程的教材或教学参考书。

参加本书编写工作的有上海对外贸易学院微积分课程组的六位教师,由曲敬哲任主编。负责各章节编写工作的有:曲敬哲(第七章)、朱建明(第四章)、刘华玲(第九章)、周晟(第一章、第二章、第八章)、赵辉(第三章)、康悦明(第五章、第六章)。

由于编者水平有限,难免有疏漏与错误,不当之处请读者指正。

编者

2012年3月

于上海对外贸易学院

# 目 录

## 第 0 章 预备知识——初等

数学简介 .....	1
一、幂 .....	1
二、函数的概念 .....	1
三、幂函数 .....	2
四、指数函数 .....	2
五、对数函数 .....	2
六、三角函数 .....	3
七、反三角函数 .....	4
八、其他 .....	5
第一章 函数 .....	8
第一节 集合 .....	8
一、集合的概念 .....	8
二、集合的包含关系 .....	8
三、集合的运算 .....	9
四、实数集 .....	10
五、映射 .....	11
习题 1-1 .....	12
第二节 函数 .....	13
一、函数的概念 .....	13
二、函数的几种简单特性 .....	14
三、函数的四则运算 .....	16
习题 1-2 .....	16
第三节 反函数与复合函数 .....	17
一、反函数 .....	17
二、复合函数 .....	18
习题 1-3 .....	19
第四节 初等函数 .....	20
一、初等函数 .....	20
二、分段函数 .....	20

三、隐函数 .....	21
四、由参数方程确定的函数 .....	21
习题 1-4 .....	22
本章小结 .....	23
总习题一 .....	24
第二章 极限与连续 .....	25
第一节 数列的极限 .....	25
一、数列极限的定义 .....	25
二、收敛数列的性质 .....	30
习题 2-1 .....	33
第二节 函数的极限 .....	33
一、当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限、 左极限和右极限 .....	34
二、当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的 极限 .....	36
三、函数极限的性质 .....	37
习题 2-2 .....	39
第三节 无穷小量与无穷大量 .....	40
一、无穷大量 .....	40
二、无穷小量 .....	42
三、无穷小量与无穷大量的 关系 .....	42
习题 2-3 .....	43
第四节 极限运算法则 .....	43
习题 2-4 .....	49
第五节 两个重要极限 .....	52
一、极限存在的两个准则 .....	52
二、两个重要极限 .....	58
习题 2-5 .....	63
第六节 无穷小量的比较 .....	65

一、无穷小量的阶 .....	65	习题 3-3 .....	118
二、利用等价无穷小的代换求 极限 .....	68	第四节 函数的微分 .....	119
习题 2-6 .....	70	一、微分的定义 .....	120
第七节 函数的连续性 .....	71	二、微分的几何意义 .....	122
一、函数的连续性 .....	71	三、基本初等函数的微分公式 与微分运算法则 .....	123
二、函数的间断点 .....	73	四、微分在近似计算中的应用 .....	125
三、连续函数的和、差、积、商的 连续性 .....	75	习题 3-4 .....	126
四、反函数与复合函数的 连续性 .....	75	本章小结 .....	126
五、初等函数的连续性 .....	77	总习题三 .....	127
六、闭区间上连续函数的性质 .....	79	<b>第四章 微分中值定理与     导数应用</b> .....	130
习题 2-7 .....	82	第一节 微分中值定理 .....	130
本章小结 .....	85	一、罗尔定理 .....	130
总习题二 .....	87	二、拉格朗日中值定理 .....	132
<b>第三章 导数与微分</b> .....	90	三、柯西中值定理 .....	135
第一节 导数概念 .....	90	习题 4-1 .....	136
一、引例 .....	90	第二节 洛必达法则 .....	136
二、导数的定义 .....	92	习题 4-2 .....	141
三、导数的几何意义 .....	95	第三节 泰勒公式 .....	141
四、函数的可导性与连续性的 关系 .....	97	习题 4-3 .....	145
习题 3-1 .....	99	第四节 函数的单调性与曲线的 凹向 .....	146
第二节 函数的求导法则 .....	101	一、函数单调性的判定法 .....	146
一、函数的和、差、积、商的求导 法则 .....	101	二、曲线的凹向与拐点 .....	147
二、反函数的求导法则 .....	103	习题 4-4 .....	149
三、复合函数的求导法则 .....	105	第五节 函数的极值与最大值 最小值 .....	149
四、隐函数的导数 .....	107	一、函数的极值及其求法 .....	149
五、由参数方程确定的函数的 导数 .....	108	二、最大值与最小值 极值 应用问题 .....	153
六、对数求导法 .....	110	习题 4-5 .....	155
七、基本求导法则与导数公式 .....	111	第六节 函数图形的作法 .....	156
习题 3-2 .....	113	一、曲线的渐近线 .....	156
第三节 高阶导数 .....	114	二、函数图形的作法 .....	158
		习题 4-6 .....	160

第七节 变化率及相对变化率在经济中的应用——边际分析与弹性分析介绍 .....	160	习题 6-1 .....	214
一、函数的变化率 .....	160	第二节 微积分基本定理 .....	215
二、函数的相对变化率 .....	161	一、引例 .....	215
三、需求弹性 .....	161	二、积分上限函数 .....	215
四、用需求弹性分析总收益(或市场销售总额)的变化 .....	162	三、牛顿-莱布尼茨公式 .....	218
习题 4-7 .....	163	习题 6-2 .....	220
本章小结 .....	164	第三节 定积分的换元法和分部积分法 .....	223
总习题四 .....	164	一、定积分的换元积分法 .....	223
<b>第五章 不定积分</b> .....	<b>167</b>	二、定积分的分部积分法 .....	227
第一节 不定积分的概念与性质 .....	167	习题 6-3 .....	229
一、原函数与不定积分的概念 .....	167	第四节 定积分的应用 .....	231
二、基本积分公式 .....	169	一、平面图形的面积 .....	231
三、不定积分的性质 .....	169	二、立体的体积 .....	235
习题 5-1 .....	173	三、经济应用问题举例 .....	239
第二节 换元积分法 .....	174	习题 6-4 .....	240
一、第一类换元积分法 .....	174	第五节 广义积分与 $\Gamma$ 函数 .....	241
二、第二类换元积分法 .....	181	一、无限区间上的广义积分 .....	241
习题 5-2 .....	186	二、无界函数的广义积分 .....	244
第三节 分部积分法 .....	189	三、 $\Gamma$ 函数 .....	246
习题 5-3 .....	194	习题 6-5 .....	248
第四节 有理函数的积分 .....	195	本章小结 .....	248
一、有理函数的积分 .....	195	总习题六 .....	249
二、可化为有理函数的积分 .....	199	<b>第七章 多元函数微积分</b> .....	<b>252</b>
习题 5-4 .....	203	第一节 空间解析几何简介 .....	252
本章小结 .....	204	一、空间直角坐标系 .....	252
总习题五 .....	204	二、空间两点间的距离 .....	253
<b>第六章 定积分及其应用</b> .....	<b>206</b>	三、曲面与方程 .....	254
第一节 定积分的概念与性质 .....	206	习题 7-1 .....	257
一、引例 .....	206	第二节 多元函数的概念 .....	258
二、定积分的定义 .....	209	一、多元函数的定义 .....	258
三、定积分的性质 .....	211	二、二元函数的极限 .....	260
		三、二元函数的连续性 .....	261
		习题 7-2 .....	262
		第三节 偏导数 .....	263
		一、偏导数的定义及其计算 .....	

方法 .....	263	习题 8-2 .....	324
二、高阶偏导数 .....	266	第三节 任意项级数 绝对	
习题 7-3 .....	267	收敛与条件收敛 .....	326
第四节 全微分 .....	268	一、交错级数及其审敛法 .....	326
一、全微分的定义 .....	268	二、绝对收敛与条件收敛 .....	327
二、函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$		习题 8-3 .....	331
可微分的条件 .....	270	第四节 幂级数 .....	332
三、全微分在近似计算中的		一、幂级数及其收敛性 .....	332
应用 .....	271	二、幂级数的和函数的性质 .....	336
习题 7-4 .....	272	习题 8-4 .....	341
第五节 多元复合函数的求导		第五节 函数展开成幂级数 .....	343
法则与隐函数的求导		一、泰勒 (Taylor) 级数 .....	343
公式 .....	273	二、函数展开成幂级数 .....	345
一、多元复合函数的求导法则 ..	273	习题 8-5 .....	353
二、全微分形式的不变性 .....	276	第六节 幂级数的应用举例 .....	354
三、隐函数的求导公式 .....	277	习题 8-6 .....	356
习题 7-5 .....	280	本章小结 .....	356
第六节 二元函数的极值 .....	281	总习题八 .....	358
一、二元函数的极值及最大值、			
最小值 .....	281	<b>第九章 微分方程与差分</b>	
二、条件极值和拉格朗日乘		<b>方程</b> .....	362
数法 .....	284	第一节 从如何预测人口谈起 .....	362
习题 7-6 .....	288	一、指数增长模型 .....	362
第七节 二重积分 .....	289	二、阻滞增长模型 (Logistic	
一、二重积分的定义和性质 .....	290	模型) .....	363
二、二重积分的计算方法 .....	294	第二节 微分方程的基本概念 .....	364
习题 7-7 .....	304	习题 9-2 .....	365
本章小结 .....	306	第三节 一阶微分方程 .....	365
总习题七 .....	306	一、可分离变量的微分方程 .....	366
<b>第八章 无穷级数</b> .....	310	二、齐次微分方程 .....	368
第一节 常数项级数的概念		三、可化为齐次方程的微分	
和性质 .....	310	方程 .....	370
一、常数项级数的概念 .....	310	四、一阶线性微分方程 .....	372
二、收敛级数的基本性质 .....	312	习题 9-3 .....	376
习题 8-1 .....	315	第四节 二阶常系数线性微	
第二节 正项级数的审敛法 .....	316	分方程 .....	376
		一、二阶常系数线性微分方	



程解的结构 .....	377	一、市场动态均衡价格模型 .....	395
二、二阶常系数齐次线性微分		二、具有价格预期的市场模型 .....	396
方程的求解 .....	378	第八节 差分方程类经济模型 .....	397
三、二阶常系数非齐次线性		一、抵押贷款问题的一个差分	
微分方程的求解 .....	382	模型 .....	397
习题 9-4 .....	387	二、经济中的蛛网模型 .....	397
第五节 可降阶的高阶微分方程 .....	387	本章小结 .....	400
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程 .....	387	总习题九 .....	401
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 .....	388	附录一 极坐标简介 .....	403
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 .....	389	附录二 复数简介 .....	406
习题 9-5 .....	390	部分习题答案与提示 .....	409
第六节 差分方程初步 .....	390	参考文献 .....	451
一、差分的概念及其性质 .....	390		
二、差分方程的基本概念 .....	391		
三、一阶常系数线性差分方程 .....	392		
习题 9-6 .....	395		
第七节 微分方程类经济模型 .....	395		

## 第0章 预备知识——初等数学简介

微积分是以初等数学作为基础的,学习微积分必须熟练掌握下列初等数学知识.

### 一、幂

数学表达式  $a^b$  称为幂,其中  $a$  称为底, $b$  称为指数.当指数取值为有理数时,相应幂的表达式为

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\uparrow} \quad (n \text{ 为正整数}),$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \text{ 为正整数}),$$

$$a^0 = 1,$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (m, n \text{ 为互质正整数,且 } n > 1),$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} \quad (m, n \text{ 为互质正整数,且 } n > 1).$$

幂的运算法则为

$$(1) a^{b_1} a^{b_2} = a^{b_1+b_2}, \quad (2) \frac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1-b_2},$$

$$(3) (a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 b_2}, \quad (4) (a_1 a_2)^b = a_1^b a_2^b,$$

$$(5) \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^b = \frac{a_1^b}{a_2^b}.$$

### 二、函数的概念

设  $D$  是一个非空实数集合,如果有一个对应规则  $f$ ,使得对  $D$  中任意一个实数  $x$ ,都有唯一的一个实数  $y$  与之对应,那么我们称  $f$  是定义在  $D$  上的一个函数,记为  $y=f(x)$ ,  $x \in D$ .  $x$  称为自变量, $y$  称为因变量, $D$  称为  $f$  的定义域,习惯上写成  $D_f$ .

对任意  $x_0 \in D$ ,通过对应规则  $f$  与之对应的  $y_0=f(x_0)$  称为函数在点  $x_0$  处的函数值.因变量与自变量之间的这种依赖关系称为函数关系.因变量取值的全体称为函数的值域.函数  $f$  的值域记为  $R_f$  或  $f(D)$ ,即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

函数  $y = f(x), x \in D$  的图形是平面上的点集  $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ , 利用它可以比较直观地把函数表达出来.

### 三、幂函数

在幂的表达式中, 若底为变量  $x$  而指数为常数  $a$ , 则称函数  $y = x^a$  为幂函数. 函数  $y = x^2, y = \sqrt{x}$  的图形如图 0-1 所示, 函数  $y = x^3, y = \frac{1}{x}$  的图形如图 0-2 所示.

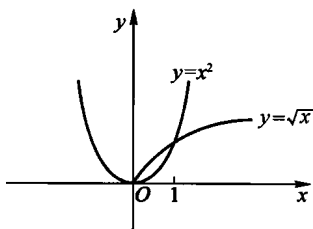


图 0-1

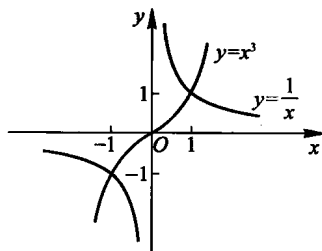


图 0-2

### 四、指数函数

在幂的表达式中, 若底为常数  $a$  而指数为变量  $x$ , 则称函数  $y = a^x$  为指数函数.

指数函数  $y = a^x (a > 1)$  的图形如图 0-3 所示.

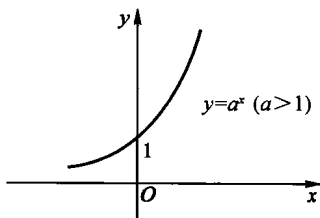


图 0-3

### 五、对数函数

若  $a^y = x (a > 0, a \neq 1)$ , 则将  $y$  表示为  $\log_a x$ , 称函数  $y = \log_a x$  为对数函数. 其中  $a$  称为底,  $x$  称为真数,  $y$  称为对数. 对数式  $y = \log_a x$  与指数式  $a^y = x$  是表示  $a$ ,

$x, y$  三者同一关系的不同表示方法,这两种形式可以互相转化.有关系式

$$\begin{aligned}\log_a a^x &= x, \\ a^{\log_a x} &= x,\end{aligned}$$

对数的运算法则为

$$(1) \log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

$$(2) \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2,$$

$$(3) \log_a x^b = b \log_a x.$$

以 10 为底的对数称为常用对数, $x$  的常用对数记作  $\lg x$ , 即  $\lg x = \log_{10} x$ .

根据对数函数与指数函数的关系,对数函数  $y = \log_a x$  的反函数为指数函数  $x = a^y (a > 0, a \neq 1)$ .

对数函数  $y = \log_a x (a > 1)$  的图形如图 0-4 所示.

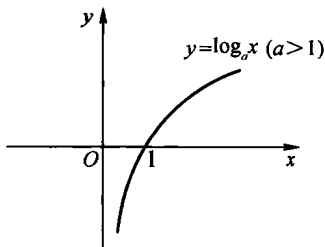


图 0-4

## 六、三角函数

角的正弦、余弦、正切、余切、正割及余割函数统称为三角函数,分别表示为  $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$ , 其中角  $x$  的单位为弧度. 特别当角  $x$  为锐角时,其三角函数可以用直角三角形有关两条边的比值表示. 如图 0-5 所示,在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,设锐角  $x$  的对边为  $a$ ,邻边为  $b$ ,斜边为  $c$ ,当然  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , 则有

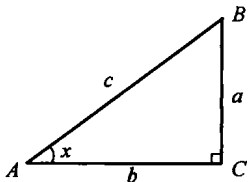


图 0-5

$$\sin x = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c},$$

$$\cos x = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c},$$

$$\tan x = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{a}{b},$$

$$\cot x = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}} = \frac{b}{a}, \quad \sec x = \frac{\text{斜边}}{\text{邻边}} = \frac{c}{b}, \quad \csc x = \frac{\text{斜边}}{\text{对边}} = \frac{c}{a}.$$

同角三角函数恒等关系式有

$$(1) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (2) \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$(3) \tan x \cot x = 1, \quad (4) \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$(5) \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad (6) \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$(7) \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad (8) \cot^2 x + 1 = \csc^2 x.$$

不同角的三角函数恒等关系式有

$$(1) \sin(-x) = -\sin x, \quad (2) \cos(-x) = \cos x,$$

$$(3) \tan(-x) = -\tan x, \quad (4) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

函数  $y = \sin x$ ,  $y = \tan x$  的图形分别如图 0-6、图 0-7 所示。

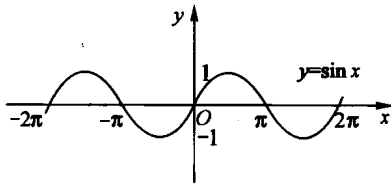


图 0-6

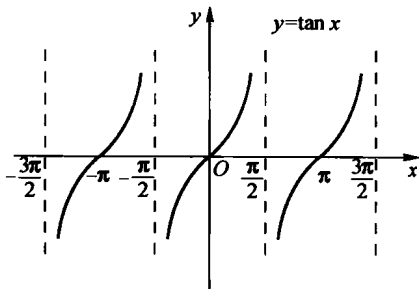


图 0-7

## 七、反三角函数

若  $\sin y = x$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ), 则将  $y$  表示为  $\arcsin x$ , 称函数  $y = \arcsin x$  为反正弦函数;

若  $\cos y = x (0 \leq y \leq \pi)$ , 则将  $y$  表示为  $\arccos x$ , 称函数  $y = \arccos x$  为反余弦函数;

若  $\tan y = x \left( -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$ , 则将  $y$  表示为  $\arctan x$ , 称函数  $y = \arctan x$  为反正切函数;

若  $\cot y = x (0 < y < \pi)$ , 则将  $y$  表示为  $\operatorname{arccot} x$ , 称函数  $y = \operatorname{arccot} x$  为反余切函数.

上述函数统称为反三角函数. 根据反三角函数与三角函数的关系, 有

$$\sin(\arcsin x) = x; \cos(\arccos x) = x, \text{ 其中 } -1 \leq x \leq 1;$$

$$\tan(\arctan x) = x; \cot(\operatorname{arccot} x) = x, \text{ 其中 } -\infty < x < +\infty.$$

反正切函数  $y = \arctan x$  图形如图 0-8 所示.

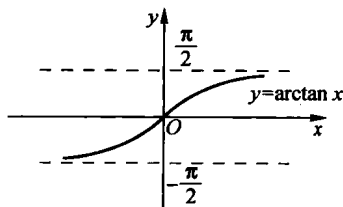


图 0-8

## 八、其他

### (1) 完全立方

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

### (2) 有理化因式

无理式  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  与  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  互为有理化因式, 有

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

### (3) 阶乘

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots \cdot 1 \quad (n \text{ 为正整数}),$$

并规定

$$0! = 1.$$

### (4) 绝对值

实数  $x$  的绝对值

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

对于任何实数  $x$  都有  $\sqrt{x^2} = |x|$ . 当然, 当  $x \geq 0$  时, 才有  $\sqrt{x^2} = |x| = x$ .

学习微积分还应该了解下列初等数学知识:

(1)  $n$  方差

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \text{ 为正整数}).$$

(2) 对数换底

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

(3) 三角函数和差化积

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}.$$

(4) 反三角函数基本关系

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}.$$

(5) 等比数列的前  $n$  项和

首项  $a \neq 0$ , 公比  $q \neq 1$  的等比数列  $a, aq, aq^2, \dots$  的前  $n$  项和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

(6) 逻辑推理

若命题 A 成立必然得到命题 B 成立, 则称命题 A 是命题 B 的充分条件, 或称命题 B 是命题 A 的必要条件.

若命题 A 成立必然得到命题 B 成立, 且命题 B 成立也必然得到命题 A 成立, 则称命题 A 是命题 B 的充分必要条件, 或称命题 B 是命题 A 的充分必要条件. 亦即命题 A 等价于命题 B.

(7) 最大、最小及总和记号

已知实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 它们中的最大者记作  $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 最小者记作  $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 它们的总和记作  $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ .

(8) 两个常用的不等式

三角不等式 对于任意实数  $a$  和  $b$ , 都有

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $n$  个正数, 称  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  是它们的算术平均值;  
 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$  是它们的几何平均值;  $n / \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$  是它们的调和平均值.

这三个平均值之间成立如下关系:

**平均值不等式** 对任意  $n$  个正数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 有

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq n / \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right),$$

等号成立当且仅当  $a_1, a_2, \dots, a_n$  全部相等.

亦即, 算术平均值不小于几何平均值, 几何平均值不小于调和平均值.



# 第一章 函 数

## 第一节 集 合

**本节重点:**集合的概念

**难点:**集合的运算

### 一、集合的概念

集合是指一些事物的全体,这些事物称为该集合的元素.例如,某班学生全体是一个集合,每个学生都是它的元素.如果一个集合只含有有限个元素,则我们称它是有限集,否则称它是无限集.

习惯上我们用大写字母表示集合,用小写字母表示集合的元素.如果  $a$  是集合  $A$  的元素,则记作  $a \in A$ ; 如果  $a$  不是集合  $A$  的元素,则记作  $a \notin A$ . 需要注意的是,任何一个集合都具有确定性,也就是说,任何一个事物要么是这个集合的元素,要么不是它的元素,二者必居其一且只居其一.

表示一个集合常用的方法有列举法和描述法.所谓列举法,就是把集合中的所有元素不遗漏也不重复地列出来,并用花括号括起来,但注意元素排列的顺序是任意的.例如,光学中的三基色可以用集合{红,绿,蓝}来表示.用描述法表示一个集合则需要指出该集合所有元素的共同特性,通常写成如下的形式: $A = \{x | x \text{ 具有特性 } P\}$ .换句话说,一个事物是这个集合的元素当且仅当它具有特性  $P$ .例如,方程  $x^2 - 1 = 0$  的解集可表示成  $\{x | x^2 - 1 = 0\}$ .

有时,对某个问题的讨论都在一个大的集合中进行,我们称这个大的集合为全集(或基本集).全集是按照需要选取的,某个问题讨论中的全集未必能够作为另一个问题的全集.不含任何元素的集合称为空集,记作  $\emptyset$ .例如  $\{x | x \in \mathbf{R} \text{ 并且 } x^2 + 1 = 0\}$  就是空集.

### 二、集合的包含关系

如果集合  $A$  的每一个元素都是集合  $B$  的元素,则称  $A$  是  $B$  的子集,或  $A$  包含于  $B$ ,或  $B$  包含  $A$ ,记为  $A \subset B$  或  $B \supset A$ .例如,设  $T = \{a, b, c\}$ ,则  $T$  有如下  $2^3$  个子集: