高等学校教材

经济应用数学基础——

微积分

主编　曲敬哲

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

经济应用数学基础——微积分

Jingji Yingyong Shuxue Jichu——Weijifen

主　编　曲敬哲
编　者（按姓氏笔画排序）
朱建明　刘华玲　周　晟　赵　辉　康悦明

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书根据高等学校“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成，与当前《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（数学三）中微积分的内容相吻合。全书内容循序渐进，例题及习题题型丰富，结构清晰，通俗易懂。

全书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、微分方程与差分方程，书末附极坐标简介和复数简介、部分习题答案与提示。本书可作为高等学校经济管理类各专业微积分课程的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学基础. 微积分/曲敬哲主编. --北京：高等教育出版社，2012.8

ISBN 978-7-04-035190-3

Ⅰ.①经… Ⅱ.①曲… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①F224.0②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 161825 号

策划编辑 张彦云　　责任编辑 贾翠萍 张彦云　　封面设计 于文燕　　版式设计 杜微言

插图绘制 邓　超　　责任校对 刘　莉　　责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京奥鑫印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	29	版　　次	2012 年 8 月第 1 版
字　　数	520 千字	印　　次	2012 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	41.90 元

物 料 号　35190-00

前　言

微积分是高等学校经济管理类各专业学生必修的数学基础课之一，我校开设这门课程已近四十年之久，这本教材是2011年上海市教委重点课程建设项目的研究成果之一。本书教学内容的深度和广度符合“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，与当前《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（数学三）中微积分的内容相吻合，与其他同类教材相比，本书有以下几方面特点：

1. 基本理论前后呼应，保证了理论体系的完备。

2. 每节开端明确本节教学的重点、难点，每章末有对本章内容的小结。

3. 各章节例题紧扣教学要点，题型全面，难度有梯次，解法多样。

4. 习题按节配置，重视对“三基”的掌握；每章后配置总习题，强调对知识的综合应用，重在提高；题目量大、面广，题型全。

5. 加大了用数学方法解决经济问题的例题的比重。

6. 内容循序渐进，讲解深入浅出。

全书共一册，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、微分方程与差分方程等。各章节配有习题和总习题，书末附部分习题答案与提示。本书可作为高等学校经济管理类各专业微积分课程的教材或教学参考书。

参加本书编写工作的有上海对外贸易学院微积分课程组的六位教师，由曲敬哲任主编。负责各章节编写工作的有：曲敬哲（第七章）、朱建明（第四章）、刘华玲（第九章）、周晟（第一章、第二章、第八章）、赵辉（第三章）、康悦明（第五章、第六章）。

由于编者水平有限，难免有疏漏与错误，不当之处请读者指正。

编者

2012年3月

于上海对外贸易学院

目　　录

第 0 章　预备知识——初等数学简介

微积分是以初等数学作为基础的,学习微积分必须熟练掌握下列初等数学知识.

一、幂

数学表达式 a^b称为幂,其中 a 称为底,b 称为指数.当指数取值为有理数时,相应幂的表达式为

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n个}\quad(n\text{ 为正整数}),$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad(n\text{ 为正整数}),$$

$$a^0=1,$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m\quad(m,n\text{ 为互质正整数,且 }n>1),$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m}\quad(m,n\text{ 为互质正整数,且 }n>1).$$

幂的运算法则为

(1) $a^{b_1}a^{b_2}=a^{b_1+b_2}$,　　(2) $\dfrac{a^{b_1}}{a^{b_2}}=a^{b_1-b_2}$,

(3) $(a^{b_1})^{b_2}=a^{b_1b_2}$,　　(4) $(a_1a_2)^b=a_1{}^ba_2{}^b$,

(5) $\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^b=\dfrac{a_1{}^b}{a_2{}^b}$.

二、函数的概念

设 D 是一个非空实数集合,如果有一个对应规则 f,使得对 D 中任意一个实数 x,都有唯一的一个实数 y 与之对应,那么我们称 f 是定义在 D 上的一个<u>函数</u>,记为 $y=f(x),x\in D$. x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为 f 的定义域,习惯上写成 D_f.

对任意 $x_0\in D$,通过对应规则 f 与之对应的 $y_0=f(x_0)$ 称为函数在点 x_0 处的函数值.因变量与自变量之间的这种依赖关系称为函数关系.因变量取值的全体称为函数的值域.函数 f 的值域记为 R_f或 $f(D)$,即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形是平面上的点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$，利用它可以比较直观地把函数表达出来.

三、幂函数

在幂的表达式中，若底为变量 x 而指数为常数 a，则称函数 $y=x^a$ 为幂函数. 函数 $y=x^2,y=\sqrt{x}$ 的图形如图 0－1 所示，函数 $y=x^3,y=\dfrac{1}{x}$ 的图形如图 0－2 所示.

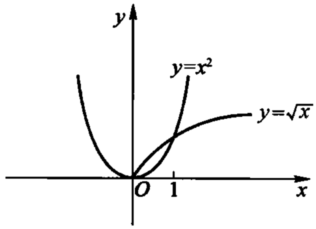

图 0－1

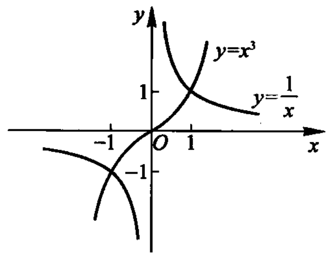

图 0－2

四、指数函数

在幂的表达式中，若底为常数 a 而指数为变量 x，则称函数 $y=a^x$ 为指数函数.

指数函数 $y=a^x(a>1)$ 的图形如图 0－3 所示.

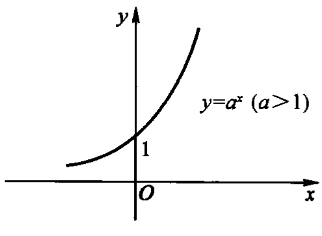

图 0－3

五、对数函数

若 $a^y=x(a>0,a\neq1)$，则将 y 表示为 $\log_a x$，称函数 $y=\log_a x$ 为对数函数. 其中 a 称为底，x 称为真数，y 称为对数. 对数式 $y=\log_a x$ 与指数式 $a^y=x$ 是表示 a，

x,y 三者同一关系的不同表示方法，这两种形式可以互相转化. 有关系式

$$\log_a a^x = x,$$

$$a^{\log_a x} = x,$$

对数的运算法则为

(1) $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$,

(2) $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$,

(3) $\log_a x^b = b\log_a x$.

以 10 为底的对数称为常用对数，x 的常用对数记作 $\lg x$，即 $\lg x = \log_{10} x$.

根据对数函数与指数函数的关系，对数函数 $y = \log_a x$ 的反函数为指数函数 $x = a^y (a > 0, a \neq 1)$.

对数函数 $y = \log_a x (a > 1)$ 的图形如图 0－4 所示.

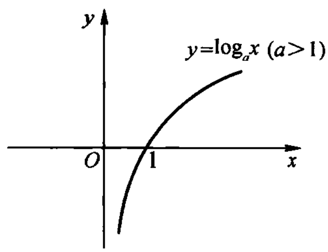

图 0－4

六、三角函数

角的正弦、余弦、正切、余切、正割及余割函数统称为三角函数，分别表示为 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$，其中角 x 的单位为弧度. 特别当角 x 为锐角时，其三角函数可以用直角三角形有关两条边的比值表示. 如图 0－5 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，设锐角 x 的对边为 a，邻边为 b，斜边为 c，当然 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$，则有

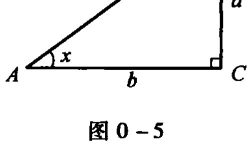

图 0－5

$\sin x=\frac{对边}{斜边}=\frac{a}{c}$,

$\cos x=\frac{邻边}{斜边}=\frac{b}{c}$,

$\tan x=\frac{对边}{邻边}=\frac{a}{b}$,

$\cot x=\frac{邻边}{对边}=\frac{b}{a}$, $\sec x=\frac{斜边}{邻边}=\frac{c}{b}$, $\csc x=\frac{斜边}{对边}=\frac{c}{a}$.

同角三角函数恒等关系式有

(1) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, (2) $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$,

(3) $\tan x\cot x=1$, (4) $\sec x=\frac{1}{\cos x}$,

(5) $\csc x=\frac{1}{\sin x}$, (6) $\sin^2x+\cos^2x=1$,

(7) $\tan^2x+1=\sec^2x$, (8) $\cot^2x+1=\csc^2x$.

不同角的三角函数恒等关系式有

(1) $\sin(-x)=-\sin x$, (2) $\cos(-x)=\cos x$,

(3) $\tan(-x)=-\tan x$, (4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$.

函数 $y=\sin x$,$y=\tan x$ 的图形分别如图 0-6、图 0-7 所示.

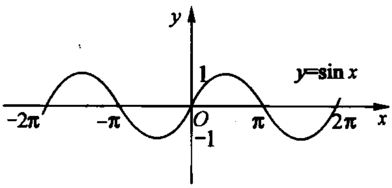

图 0-6

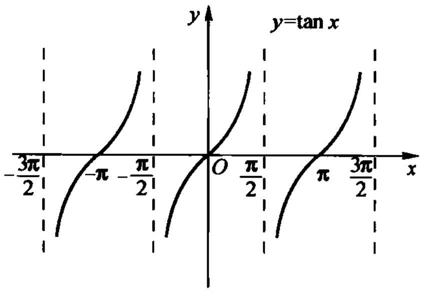

图 0-7

七、反三角函数

若 $\sin y=x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,则将 y 表示为 $\arcsin x$,称函数 $y=\arcsin x$ 为反正弦函数;

若 $\cos y = x(0 \leqslant y \leqslant \pi)$，则将 y 表示为 $\arccos x$，称函数 $y = \arccos x$ 为反余弦函数；

若 $\tan y = x\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$，则将 y 表示为 $\arctan x$，称函数 $y = \arctan x$ 为反正切函数；

若 $\cot y = x(0 < y < \pi)$，则将 y 表示为 $\operatorname{arccot} x$，称函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 为反余切函数.

上述函数统称为反三角函数.根据反三角函数与三角函数的关系，有

$$\sin(\arcsin x) = x; \cos(\arccos x) = x, \text{其中} -1 \leqslant x \leqslant 1;$$

$$\tan(\arctan x) = x; \cot(\operatorname{arccot} x) = x, \text{其中} -\infty < x < +\infty.$$

反正切函数 $y = \arctan x$ 图形如图 0－8 所示.

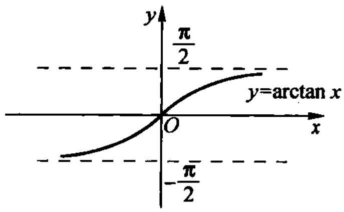

图 0－8

八、其他

(1) 完全立方

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

(2) 有理化因式

无理式 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 互为有理化因式，有

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

(3) 阶乘

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 1} \quad (n \text{ 为正整数}),$$

并规定

$$0! = 1.$$

(4) 绝对值

实数 x 的绝对值

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

对于任何实数 x 都有 $\sqrt{x^2}=|x|$. 当然，当 $x\geqslant 0$ 时，才有 $\sqrt{x^2}=|x|=x$.

学习微积分还应该了解下列初等数学知识：

(1) n 方差

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$（$n$ 为正整数）.

(2) 对数换底

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}.$$

(3) 三角函数和差化积

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}.$$

(4) 反三角函数基本关系

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}.$$

(5) 等比数列的前 n 项和

首项 $a\neq 0$，公比 $q\neq 1$ 的等比数列 $a,aq,aq^2,\cdots$ 的前 n 项和

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

(6) 逻辑推理

若命题 A 成立必然得到命题 B 成立，则称命题 A 是命题 B 的充分条件，或称命题 B 是命题 A 的必要条件.

若命题 A 成立必然得到命题 B 成立，且命题 B 成立也必然得到命题 A 成立，则称命题 A 是命题 B 的充分必要条件，或称命题 B 是命题 A 的充分必要条件. 亦即命题 A 等价于命题 B.

(7) 最大、最小及总和记号

已知实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，它们中的最大者记作 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，最小者记作 $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，它们的总和记作 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n$.

(8) 两个常用的不等式

三角不等式 对于任意实数 a 和 b，都有

$$||a|-|b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$$

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正数，称 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 是它们的算术平均值；$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 是它们的几何平均值；$n \Big/ \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$ 是它们的调和平均值.

这三个平均值之间成立如下关系：

平均值不等式　对任意 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant n \Big/ \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right),$$

等号成立当且仅当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全部相等.

亦即，算术平均值不小于几何平均值，几何平均值不小于调和平均值.

第一章　函　　数

第一节　集　　合

本节重点：集合的概念

难点：集合的运算

一、集合的概念

集合是指一些事物的全体，这些事物称为该集合的元素．例如，某班学生全体是一个集合，每个学生都是它的元素．如果一个集合只含有有限个元素，则我们称它是有限集，否则称它是无限集．

习惯上我们用大写字母表示集合，用小写字母表示集合的元素．如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a \notin A$．需要注意的是，任何一个集合都具有确定性，也就是说，任何一个事物要么是这个集合的元素，要么不是它的元素，二者必居其一且只居其一．

表示一个集合常用的方法有列举法和描述法．所谓列举法，就是把集合中的所有元素不遗漏也不重复地列出来，并用花括号括起来，但注意元素排列的顺序是任意的．例如，光学中的三基色可以用集合{红，绿，蓝}来表示．用描述法表示一个集合则需要指出该集合所有元素的共同特性，通常写成如下的形式：$A = \{x \mid x$具有特性 $P\}$．换句话说，一个事物是这个集合的元素当且仅当它具有特性 P．例如，方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集可表示成 $\{x \mid x^2 - 1 = 0\}$．

有时，对某个问题的讨论都在一个大的集合中进行，我们称这个大的集合为全集（或基本集）．全集是按照需要选取的，某个问题讨论中的全集未必能够作为另一个问题的全集．不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$．例如 $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ 并且 $x^2 + 1 = 0\}$ 就是空集．

二、集合的包含关系

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或 A 包含于 B，或 B 包含 A，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$．例如，设 $T = \{a, b, c\}$，则 T 有如下 2^3 个子集：