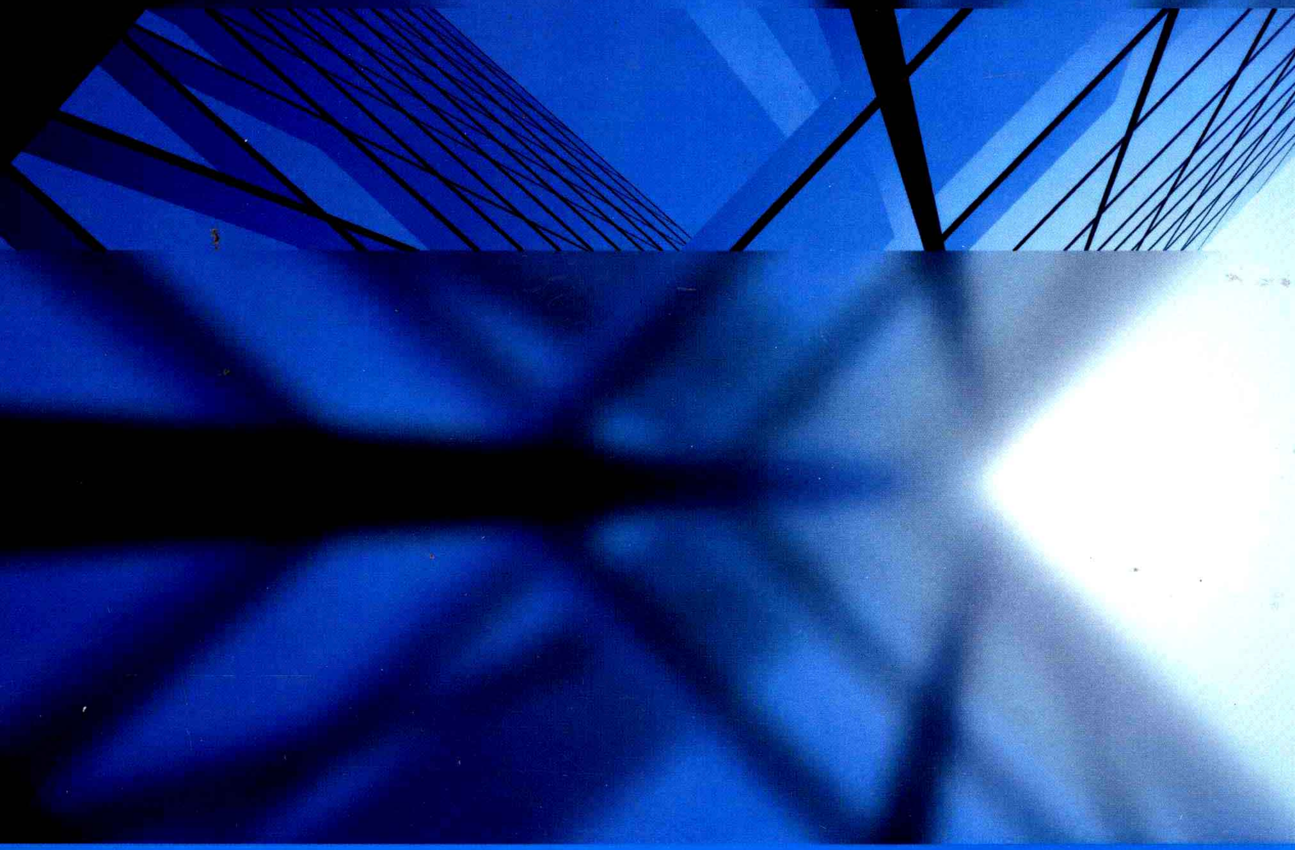
高等职业教育“十二五”规划教材



应用高等数学

杨朝晖 / 主 编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十二五”规划教材

应用高等数学

主　编　杨朝晖
副主编　石　磊　常　丽　杨　剑
薛　珊　姬中平　刘甲玉
田小利　陈丽娟
主　审　张慧颖　孙红伟

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书由高职高专院校教学经验丰富的一线教师编写而成。全书共分 10 章，其中涵盖了微积分初步（含一元函数和多元函数）、线性代数与线性规划基础、概率论与数理统计初步，以及介绍使用 Mathematica 的数学实验等内容。

本书可作为高职高专院校各专业的数学基础课程教材，也可作为专升本和自学考试参考书。

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学/杨朝晖主编. —北京：北京理工大学出版社，2012. 8
ISBN 978－7－5640－6535－5

Ⅰ. ①应…　Ⅱ. ①杨…　Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 186670 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址 / http: // www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京市通州富达印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 18
字　　数 / 411 千字
版　　次 / 2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 / 1~5000 册
定　　价 / 36.00 元

责任编辑 / 张慧峰
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 王美丽

前言 PREFACE

本书是根据教育部最新制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》，结合高职高专的教学特点及学生特点，由河南交通职业技术学院数学课改小组成员中教学经验丰富的一线教师编写而成，凝聚了多位老师的心血。

本书从高职教育的需要和现状出发，力求体现基础课为专业服务的思想，着眼于“以服务为宗旨，以应用为目的”，以“必需、够用、适用”为原则，精心选取教学内容，重点讲清概念，淡化理论推导，知识的展开以解决实际问题为导向，强调用基本理论和基本方法解决实际问题，把教学重点放在基本运算能力的培养、正确思维方式的培养以及数学知识实际应用能力的培养这几个方面，突出了数学课在专业课中的工具作用。

在线性规划和数学实验中介绍了管理运筹学 2.0(Window 版)及 Mathematica 等数学软件的使用方法，提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，有助于培养学生运用数学知识解决实际问题的能力，达到学以致用的目的。

本书涵盖的知识内容比较全面，包括一元函数和多元函数微积分、微分方程、线性代数与线性规划、概率论与数理统计等部分的基础知识，不同专业可以根据专业的需求对教学内容和重点进行不同的侧重，也可以指导有余力的学生进行全面学习，满足不同层次学生的学习要求。

本书由杨朝晖担任主编，具体编写工作为:第 1 章和第 5 章由杨朝晖编写，第 2 章由姬中平编写，第 3 章由刘甲玉编写，第 4 章(4.1～4.3、4.6 、4.7)由石磊编写，第 4 章(4.4、4.5、4.8、4.9)由常丽编写，第 6 章和第 7 章由杨剑编写，第 8 章由薛珊编写，第 9 章由田小利编写，第 10 章由陈丽娟编写。全书由杨朝晖完成最后统稿。

由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，敬请专家、同仁及广大读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善，以推进课程改革的发展。

编　者

目　录 CONTENTS

第一单元　微积分初步 …… 1
第 1 章　函数、极限与连续 …… 1
1.1　一元函数与多元函数 …… 1
1.2　函数的极限 …… 5
1.3　极限的运算 …… 9
1.4　无穷小量与无穷大量 …… 15
1.5　函数的连续性 …… 18
复习题 1 …… 22
第 2 章　导数与微分 …… 24
2.1　导数的概念 …… 24
2.2　函数的求导法则 …… 28
2.3　隐函数的导数和高阶导数 …… 33
2.4　偏导数 …… 36
2.5　微分 …… 39
复习题 2 …… 45
第 3 章　导数的应用 …… 47
3.1　函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 47
3.2　洛必达法则 …… 54
3.3　函数的极值与最值 …… 59
3.4　多元函数的极值与最值 …… 64
3.5　曲率 …… 68
复习题 3 …… 71
第 4 章　积分及其应用 …… 73
4.1　不定积分的概念和性质 …… 73
4.2　不定积分的积分方法 …… 76
4.3　定积分的概念和性质 …… 81
4.4　二重积分的概念和性质 …… 86
4.5　微积分基本公式 …… 89
4.6　定积分的计算 …… 91
4.7　定积分的应用 …… 96
4.8　二重积分的计算 …… 105
4.9　二重积分的应用 …… 111
复习题 4 …… 115

第 5 章　微分方程初步 ········ 117
5.1　微分方程的基本概念 ········ 117
5.2　一阶微分方程 ········ 118
5.3　二阶常系数线性微分方程 ········ 122
复习题 5 ········ 126
第二单元　线性代数与线性规划基础 ········ 127
第 6 章　线性代数基础 ········ 127
6.1　行列式的概念 ········ 127
6.2　行列式的性质 ········ 130
6.3　矩阵的概念及其运算 ········ 135
6.4　逆矩阵 ········ 141
6.5　线性方程组的解 ········ 144
复习题 6 ········ 149
第 7 章　线性规划基础 ········ 151
7.1　线性规划的概念 ········ 151
7.2　线性规划问题的计算机求解 ········ 156
7.3　线性规划在工商管理中的应用 ········ 165
复习题 7 ········ 172
第三单元　概率论与数理统计初步 ········ 175
第 8 章　概率论 ········ 175
8.1　随机事件 ········ 175
8.2　随机事件的概率 ········ 179
8.3　条件概率 ········ 182
8.4　事件的独立性 ········ 186
8.5　随机变量的概念 ········ 189
8.6　离散型随机变量 ········ 191
8.7　连续型随机变量 ········ 194
8.8　随机变量的数字特征 ········ 199
复习题 8 ········ 205
第 9 章　数理统计初步 ········ 207
9.1　总体　样本　统计量 ········ 207
9.2　点估计 ········ 210
9.3　区间估计 ········ 213
9.4　假设检验 ········ 220
9.5　一元线性回归分析 ········ 229
复习题 9 ········ 234
第四单元　数学实验 ········ 236
第 10 章　Mathematica 使用简介 ········ 236

10.1　Mathematica 概述 …… 236
10.2　Mathematica 在微积分中的应用 …… 241
实验一　极限与连续 …… 241
实验二　导数与微分 …… 242
实验三　不定积分与定积分的计算 …… 243
实验四　解微分方程 …… 243
10.3　Mathematica 在线性代数中的应用 …… 245
实验一　矩阵的运算 …… 245
实验二　解线性方程组 …… 246
实验三　求解线性规划 …… 248
10.4　Mathematica 在概率中的应用 …… 249
实验一　计算二项分布 …… 249
实验二　计算泊松分布 …… 250
实验三　计算均匀分布 …… 250
实验四　计算正态分布 …… 251
实验五　计算指数分布 …… 252
10.5　Mathematica 在数理统计中的应用 …… 252
实验一　统计描述(平均数、众数、中位数等) …… 252
实验二　统计图表绘图(直方图、饼图) …… 253
实验三　区间估计 …… 254
实验四　假设检验 …… 255
实验五　线性回归分析 …… 257
10.6　利用 Mathematica 绘制函数的图像 …… 260
实验一　绘制二维图像 …… 260
实验二　绘制三维图像 …… 262
附录 …… 265
附表 1　泊松分布表 …… 265
附表 2　标准正态分布表 …… 266
附表 3　t 分布临界值表 …… 267
附表 4　χ^2 分布临界值表 …… 268
附表 5　F 分布临界值表 …… 269
附表 6　相关系数检验表 …… 274
参考文献 …… 275

第一单元　微积分初步

第1章　函数、极限与连续

学习目标

1. 熟练掌握基本初等函数的表达式、定义域、值域、图形和性质(单调性、有界性、奇偶性和周期性).

2. 理解复合函数的概念,会正确分析复合函数的复合过程.

3. 理解函数极限的概念、无穷大和无穷小的概念,会利用极限的四则运算法则及两个重要极限求函数的极限.

4. 理解函数连续性的定义以及初等函数的连续性.

1.1　一元函数与多元函数

1.1.1　一元函数

1. 基本初等函数

幂函数 $y=x^{\alpha}$(其中 α 为常数,$\alpha\in\mathbf{R}$);指数函数 $y=a^{x}$(其中 a 为常数,$a>0$ 且$a\neq1$);对数函数 $y=\log_{a}x$(其中 a 为常数,$a>0$ 且 $a\neq1$);三角函数:$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$;反三角函数:$y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\text{arccot}\,x$ 这五类函数统称为**基本初等函数**(basic clementary functions).

注 1　指数函数 $y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq1$)与对数函数 $y=\log_{a}x$($a>0$ 且 $a\neq1$)互为反函数.

注 2　三角函数中,正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$,余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

注 3　反三角函数中,

(1) $y=\arcsin x$ 为 $y=\sin x$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数,其定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,它在$[-1,1]$上单调增加且有界;

(2) $y=\arccos x$ 为 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数,其定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,它在$[-1,1]$上单调减少且有界;

(3) $y=\arctan x$ 为 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，它在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加且有界；

(4) $y=\text{arccot}\, x$ 为 $y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 内的反函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，它在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调减少且有界.

它们的图形如图 1.1.1 所示：

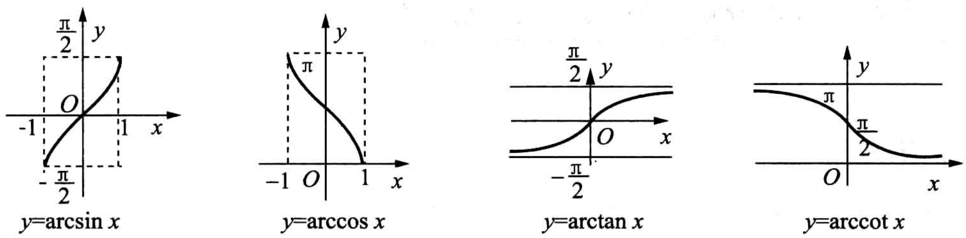


图 1.1.1

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\ln\sqrt{1-x^2}$； (2) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$.

解 (1) 由于对数的真数必须为正数，所以 $\sqrt{1-x^2}>0$，即 $1-x^2>0$，解之，得 $-1<x<1$. 因而，函数 $y=\ln\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $(-1,1)$.

(2) 由于函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$，所以 $-1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1$，解之，得 $-3\leqslant x\leqslant 1$. 因而，函数 $y=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$ 的定义域为 $[-3,1]$.

练 习 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-4}$； (2) $y=\tan x$； (3) $y=\arccos(2x-1)$.

2. 复合函数

定义 1.1.1 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，若对于数集 A 上的任一个 x 值，通过中间变量 u，总有确定的 y 值与之对应，那么，y 称为 x 的**复合函数**(composite function)，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

例如，函数 $y=\sin^2 x$ 就是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

注 4 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 D_2，只有当 $D_1\cap D_2\neq\varnothing$ 时，它们才能构成复合函数.

例 2 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{2-x^2}$； (2) $y=\cos 2x$； (3) $y=\cos^2 2x$.

解 (1) $y=\sqrt{2-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=2-x^2$ 复合而成的.

(2)$y=\cos 2x$ 是由 $y=\cos u, u=2x$ 复合而成的.

(3)$y=\cos^2 2x$ 是由 $y=u^2, u=\cos v, v=2x$ 复合而成的.

练 习 指出下列函数的复合过程.

(1)$y=\ln(1-x^2)$； (2)$y=\tan x^2$； (3)$y=\tan^2 x$； (4)$y=\sin^2 \frac{1}{x}$.

3. 初等函数

定义 1.1.2 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所形成的，并且可以用一个式子表示的函数称为**初等函数**(clementary function).

例如，$y=\sqrt{2-x^2}$，$y=x^3+\ln^2(1+x)$，$y=1+e^{x^2}$，$y=x\arcsin\frac{1}{x}$等均是初等函数.

本课程中所讨论的函数大多是初等函数.

注 5 在工程技术中经常用到以下双曲函数：

双曲正弦 $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦 $\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，双曲正切 $\mathrm{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

4. 分段函数

一个函数，当自变量在不同范围内变化时，对应着不同的函数表达式，这样的函数称为分段函数.

例 3 符号函数 $y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$.

注 6 一般来说，分段函数不是初等函数.

1.1.2 多元函数

在很多自然现象和实际问题中，我们会经常遇到多个变量之间的依赖关系，如，圆锥体的体积 V 与其底面半径 r，高 h 之间有如下关系

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

当 r,h 在一定范围内$\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$取一对数值时，体积 V 的对应值就随之确定.

定义 1.1.3 设有三个变量 x,y 和 z，D 是平面上的一个非空点集，如果对于每个点 $P(x,y)\in D$，都可由对应法则 f 得到唯一的实数 z 与之对应，则称 z 是变量 x、y 的**二元函数**(或点 P 的函数)，记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D \text{ 或 } z=f(P),P\in D$$

其中 x,y 称为自变量；z 称为因变量；D 称为函数 $f(x,y)$的定义域；它所对应的函数值的集合，即$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为函数 $z=f(x,y)$的值域.

同样，可以定义 $n(n\geqslant 3)$元函数，通常将二元及二元以上的函数称为多元函数.

二元函数的图形是一张曲面(如图 1.1.2).

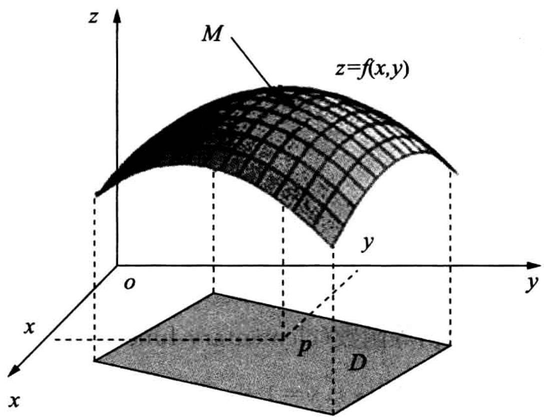


图 1.1.2

求二元函数的定义域,与一元函数定义域的求法类似,就是找使函数有意义的自变量的取值范围,即是使函数有意义的一切点组成的平面区域.

例 4 求二元函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域.

解 只有当根式内的表达式非负时,才有确定的 z 值,因此所求函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

这里 D 表示一个以原点为圆心,以 1 为半径的圆形区域,它为有界闭区域.

例 5 求二元函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域.

解 要使函数 z 有意义,需满足 $x+y>0$

因此,所求函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0\}$$

这里 D 表示一个在直线 $x+y=0$ 上方的半平面(不包括边界 $x+y=0$),该区域为一个无界开区域.

练 习

1. 设函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$,求 $f(-1,-1)$,$f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$.

2. 求下列函数的定义域.

(1)$z=\ln(1-x^2-y^2)$; (2)$z=\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}$.

习 题 1.1

1. 指出下列函数的复合过程.

(1)$y=\sqrt{4-x^2}$; (2)$y=(3x+1)^3$; (3)$y=\sin\dfrac{x}{2}$;

(4)$y=e^{\sqrt{x}}$; (5)$y=\cos^2(2x-1)$; (6)$y=\cos(2x-1)^2$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-2}$； (2) $y=\ln\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$； (3) $y=\arccos\frac{1-x}{2}$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x^2+y^2-1)$； (2) $z=\frac{\arcsin x}{\sqrt{y}}$.

1.2 函数的极限

1.2.1 数列的极限

观察下面数列在 n 无限增大时的变化趋势：

(1) $\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},\cdots,\frac{1}{10^n},\cdots$

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

(3) $\frac{1}{3},-\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^3},-\frac{1}{3^4},\cdots,\frac{(-1)^{n+1}}{3^n},\cdots$

通过观察可以看出，当 n 无限增大时，数列 $x_n=\frac{1}{10^n}$ 无限趋近于 0；数列 $x_n=\frac{n}{n+1}$ 无限趋近于 1；数列 $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ 无限趋近于 0. 一般地，我们有

定义 1.2.1 如果当 n 无限增大时，数列 $\{x_n\}$ 无限趋近于某一个确定的常数 A，那么 A 就称为**数列 x_n 的极限**(limit of anumber sequence)，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A$$

由此定义，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0$，$x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}=0$.

例 1 观察下面数列的变化趋势，并写出它们的极限.

(1) $x_n=1-\frac{1}{n^2}$； (2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$； (3) $x_n=2$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}2=2$.

注 1 常数的极限就是该常数本身. 即

$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$ （C 为常数).

注 2 并非任意数列都有极限.

如，$x_n=(-1)^n$，当 n 无限增大时，x_n 在 1 和 -1 这两个数上来回跳动，并不趋近于某一个常数，所以该数列没有极限.

又如，$x_n=2^n$，当 n 无限增大时，x_n 无限增大，并不趋近于某一个确定的常数，所以，该数

列没有极限. 但为了记述 $x_n=2^n$ 在 n 无限增大时，其绝对值无限变大这种变化趋势，我们记作 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$.

练 习 求下列数列的极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$； (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+2}$； (3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}+1}{n}$； (4)$\lim\limits_{n\to\infty}n$； (5)$\lim\limits_{n\to\infty}[1+(-1)^n]$.

1.2.2 函数的极限

函数的变化是由自变量的变化引起的. 一般来说，由自变量的变化趋势，函数的极限分以下两种：

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限

x 的绝对值无限增大，记作 $x\to\infty$.

观察下列函数在 $x\to\infty$ 时的变化趋势：

(1)$y=\dfrac{1}{x}$； (2)$y=1+\dfrac{1}{x^2}$.

可以看出，当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 无限越趋近于 0，函数 $y=1+\dfrac{1}{x^2}$ 无限趋近于 1.

定义 1.2.2 如果 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的**极限**(limit of function)，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$.

如果 x 从某一时刻起，只取正值，其绝对值无限增大，记作 $x\to+\infty$；如果 x 从某一时刻起，只取负值，其绝对值无限增大，记作 $x\to-\infty$.

仿照 $x\to\infty$ 时函数极限的定义，我们给出当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时函数极限的定义：

定义 1.2.3 如果 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\left(\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\right).$$

例 2 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$； (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$； (3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\infty$.

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 不存在.

注 3 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 3 讨论在 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\sin x$ 的极限.

解 当 $x\to\infty$ 时，$\sin x$ 的值遍取 $[-1,1]$ 上的所有实数，并不趋近于某一个常数，所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限

观察当 $x\to 0$ 时，函数 $y=1+x^2$ 的变化趋势. 我们发现，当 $x\to 0$ 时，函数 $y=1+x^2$ 的函数值无限趋近于 1. 一般地，我们有

定义 1.2.4 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左右近旁有定义，如果 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个确定的常数 A，那么 A 就称为 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

显然，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)=1$.

例 4 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$； (2) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x$； (3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$； (4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$.

(3) 当 $x\to 1$ 时，$y=\dfrac{1}{x-1}$ 的绝对值越来越大，故 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ 不存在.

(4) 虽然函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 在 $x=1$ 点没有定义，但是 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是考察当自变量 x 趋于 1 时函数的变化趋势，从而有 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

注 4 函数的极限是考察当自变量 x 趋于某一点 x_0 时函数的变化趋势，并没有要求函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义. 即函数在 $x\to x_0$ 时有无极限与函数在该点处有无定义无关.

练 习 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$； (3) $\lim\limits_{x\to -\infty}3^x$； (4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}e^x$； (6) $\lim\limits_{x\to \pi}\sin x$； (7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos x$； (8) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)$.

3. 单侧极限

当 x 仅从 x_0 的左边趋于 x_0 时，记作 $x\to x_0^-$，若此时 $f(x)$ 有极限，我们称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限；当 x 仅从 x_0 的右边趋于 x_0 时，记作 $x\to x_0^+$，若此时 $f(x)$ 有极限，我们称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限.

定义 1.2.5 如果当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限(left limit)，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

如果当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限(right limit)，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

左极限和右极限统称单侧极限. 例如

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1.$$

注 5 函数在 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是函数在该点处的左右极限都存在并且相等.

例 5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ x+1, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x \to 0$ 时的极限.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x-1) = -1$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1$,

所以 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$,

故 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

例 6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \geqslant 0, \\ x+1, & x<0 \end{cases}$ 在 $x \to 0$ 时的极限.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+1) = 1$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1$,

所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

练 习

1. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \geqslant 0, \\ x^2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x \to 0$ 时的极限.

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x \geqslant 0, \\ x^2+1, & x<0 \end{cases}$ 在 $x \to 0$ 时的极限.

1.2.3 多元函数的极限

与一元函数类似,研究函数的极限就是研究函数的变化趋势,对于二元函数 $f(x,y)$,如果当 xOy 平面上的动点 $P(x,y)$ 以任意方式趋向定点 $P_0(x_0,y_0)$ $\big($记作 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)\big)$ 时,对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A,我们就说 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $x \to x_0$, $y \to y_0$ 时的极限.

定义 1.2.6 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义 $\big($在点 (x_0,y_0) 处可以没有定义$\big)$,当点 (x,y) 以任何路径趋近于 (x_0,y_0) 时,对应的函数值 $f(x,y)$ 都无限趋近于同一个确定的数 A,则称当 (x,y) 趋于 (x_0,y_0) 时,函数 $z=f(x,y)$ 以 A 为极限,记作:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = A \text{ 或 } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$$

例 7 求极限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2+y^2) \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 令 $t=x^2+y^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{t\to 0}t\sin\frac{1}{t}=0.$$

例 8 研究函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x,y\text{ 不同时为 }0,\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限是否存在.

解 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

显然，它是随着 k 值的不同而改变的，因此该极限不存在.

习 题 1.2

1. 求下列数列的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$； (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$；

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$； (6) $\lim\limits_{x\to 1}\lg x$； (7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$； (8) $\lim\limits_{x\to 0}2^x$.

3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0,\\ 1-x, & x>0\end{cases}$ 在 $x\to 0$ 时的极限.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\geqslant 1,\\ x^2+1, & x<1\end{cases}$ 在 $x\to 1$ 时的极限.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x+y}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{4+xy}-2}$； (3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

6. 证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

1.3 极限的运算

根据极限的定义求极限，只有在函数特别简单的情况下才有可能. 为了计算比较复杂的极限，下面给出极限的四则运算法则与两个重要极限.

1.3.1 极限的四则运算法则

定理 1.3.1 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 均存在，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

特别地，

$\lim\limits_{x\to x_0} kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$（$k$ 为常数）；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right)$.

该定理对于在 $x\to\infty$时的极限同样成立.

注 1 上述运算法则要求每个参与运算的函数的极限均存在.

注 2 上述运算法则可以推广到有限多个函数的代数和及乘积的情况.

例 1 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)$； (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+7}{x^2+5}$； (3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{x-2}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)=\lim\limits_{x\to 1}(3x)+\lim\limits_{x\to 1}1=3\lim\limits_{x\to 1}x+1=3\times 1+1=4$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+7}{x^2+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}2x+\lim\limits_{x\to 1}7}{\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}5}=\dfrac{1-2+7}{1+5}=1$.

(3)在 $x\to 2$ 时，分母$(x-2)$的绝对值越来越小，而分子是个常数，因此整个分式的绝对值是越来越大，故

$$\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}=\infty.$$

注 3 一般地，若分母的极限为 0，而分子的极限为一个不等于 0 的常数，则整个分式的极限为∞.

练 习 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+3}{x+2}$.

例 2 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

解 (1) $x\to 2$ 时，分母极限为 0，分子极限也为 0，对函数进行恒等变形，约去分式中极限为 0 的公因子$(x-2)$，从而有

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=4$.

(3) $x\to 0$ 时，分子、分母的极限均为 0，对分子进行有理化，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$.

注 4 一般地，对于“$\dfrac{0}{0}$”型的极限，可以通过恒等变形，约去极限为 0 的公因子，然后再利