普通高等教育“十二五”规划教材
大学高等数学类规划教材

丛书主编　王立冬

概率论与数理统计

（第二版）

主　编　齐淑华　王立冬

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

大学高等数学类规划教材

丛书主编　王立冬

概率论与数理统计

（第二版）

主　编　齐淑华　王立冬

副主编　张　友　丁淑妍

本书入选辽宁省首批“十二五”普通高等学校本科规划教材

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统地论述了概率论与数理统计的基本概念、基本方法、理论及其应用.全书共9章,内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等内容.在本书的编写过程中,作者以培养学生扎实的基础知识和较好的综合应用能力为目标,讲述简明易懂,突出对基本概念的理解和对解题方法的把握.为了加强学习效果,全书每节都配有相应梯度的练习题,每章都配有难度适中层次分明的总复习题,并在书末附有习题答案和近三年全国硕士研究生入学考试概率论与数理统计试题及解答,为有志报考研究生的同学提供很好的模拟体验,便于教师教学和学生自学使用.

本书是为普通高等院校非数学类各专业的本科生编写的概率论与数理统计教材,亦可作为相关专业的教学参考书,以及考研学习或自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/齐淑华,王立冬主编. —北京:科学出版社,2013

普通高等教育“十二五”规划教材·大学高等数学类规划教材

ISBN 978-7-03-036794-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①齐…②王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第037828号

责任编辑:张中兴 于俊杰/责任校对:郭瑞芝

责任印制:阎 磊/封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月大连理工大学出版社第一版

2013年3月第 二 版 开本:720×1000 B5

2013年3月第一次印刷 印张:17 1/2

字数:338 000

定价:32.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

"大学高等数学类规划教材"题词

高等数学诸分支知识及技巧，是通往现代科技诸领域的钥匙和通用语言。

徐利治

2009年8月于大连

前　言

本书是大连民族学院2009年在大连理工大学出版社出版的《概率论与数理统计》基础上进行大幅度修订改进形成的，改后更加适合当今的教育形式和普通高等院校概率论与数理统计课程教学的特点.

概率论与数理统计是普通高等院校一门重要的数学基础课程.它对培养学生的数学思维能力、科技创新精神及量化分析问题的能力具有非常重要的作用.为此，编者根据多年一线教学经验尽可能地将概率论与数理统计的数学思想融入到全书各个部分之中，力求做到科学性与通俗性的完美结合，突出对基本概念的理解和对解题方法的把握，有意识地提高学生对数学知识的应用能力.在修订过程中主要做了以下调整：

(1) 在具体内容的处理上，修改并增加了一些学生将来工作生活中比较重要的内容，更加注重问题驱动，引导学生自发自主的学习兴趣。

(2) 为了让学生更好地学习与巩固，在全书例题的配置和习题的选取上做了较大改动，使得例题和习题更具有概率统计学科的代表性和生产实践的意义，使学生能更好地掌握概率统计的基本概念和方法.同时还增加了近100道习题，方便学生的学习.

(3) 增加了近三年全国硕士研究生入学考试概率论与数理统计试题及解答，通过考研真题，让有志于报考研究生的学生有更切合实际的关于本学科考研模拟的真实体验，可使学生深入地了解考研的要求、题型及重要的考点，开阔学生的视野.

本书在使用的过程中得到了广大学生与教师的厚爱，给我们提出很多诚挚具体的意见和建议，在本次修订再版过程中，我们吸取和采纳了这些意见和建议，在此向他们表示感谢. 我们也一如既往地希望各位同行、专家和读者们批评指正，让本书更加适合当前教育形势和使用的需要，再次深表谢意.

编　者

2013年1月

第一版序

21 世纪我国高等教育迎来了精英化教育向大众化教育转型的时代，我国高等教育的发展也开始呈现出多层次发展与多样性共存的特点，这正是现在科学技术与文化教育发展趋势的客观要求.

在新的发展形势之下，大连民族学院的数学教师们也一直在思考如何适应目前的教育形势，也一直在积极探寻教育改革的新方法，致力于为全校各个专业的学生们编写一套适应新形势的数学教材，经过十几年的努力，以丰富的教学经验做支持，学院的教师们几经修改编写出高等数学、线性代数、概率论与数理统计这三门课程的讲义，并且在课程建设上也取得了很好的成果，高等数学被评为省级精品课程，线性代数、概率论与数理统计被评为校级精品课程.

在讲义的基础上，经过改进和修订编写了这套大学高等数学类规划教材，这套教材不以精英教育为目标，为大众化教育提供了层次分明写作翔实的课程支持，其根本宗旨是要适应新的教育形势，满足高等院校大众化数学教育的基本要求，渗透数学素质教育的精神.

简要来说这套教材特点有以下三点：

(1) 尽可能的从教学实践经验和知识直观背景出发，提出数学问题，便于学生了解数学知识的本源和背景，体会数学思想之美.

(2) 在教材内容的安排与表述方式上，力求深入浅出，易教易学，简明使用，注重讲清楚数学的基本概念，适度的淡化理论证明，并适当反映出数学所蕴涵的文化素养给读者以数学美的熏陶.

(3) 在例题和习题的选取和安排上，本着理论联系实践的原则，多数选自生活实践和具体应用.

凡是具有生命力的教材，总是能不断的适应客观教学要求，听取读者的意见和建议进行更新和改进. 这套丛书自然也不例外，我为本书作序，诚挚希望本套教材的使用者和读者们提出相应的建议和意见，并及时与丛书主编进行沟通改进，争取出版一套适合当今大众化教育形势的精品教材.

徐利治

2009 年 8 月于大连

第一版前言

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律性的一门学科.它在自然科学、工程技术、农业生产等各个领域都有着广泛的应用,特别是近20年来,随着计算机技术的发展,概率论与数理统计在经济、医学、金融、保险等领域也越来越不可或缺,起着重要的作用.正因如此,概率论与数理统计课程也成为普通高等教育各专业学生最重要的数学必修课之一.

本书是编者在多年教学实践经验基础上编写而成的,编写过程中注意了以下特点:

(1) 在注意保持数学本身的科学性、系统性、严谨性的同时,力求做到由浅入深、深入浅出,讲解得通俗易懂、详略得当、注意重点突出、层次分明.既便于教师教学,又便于学生自学.

(2) 在例题的配置和习题的选取上,力求做到集典型性、应用性和现代性于一体,注重学生对概率论与数理统计课程学习兴趣的培养,争取在课堂教学的过程中潜移默化地达到提高综合运用数学知识的能力.

(3) 全书重点的数学概念、数学定理后均附有英文单词,可以使学生在学习这门课的过程中,自然而然地学会英文词汇,这对将来学生们查阅外文资料有很大的帮助.

(4) 在有些章节的编写上,根据多年的教学经验,编者大胆地改变了传统的编写顺序,多年的实践证明,改后的顺序对教师的教学和学生的学习大有益处,更便于学生的理解和学习.

在本书编写过程中,为便于读者理解和掌握,力求将概念叙述得清晰易懂,同时还注意实例配置的多样性,所举例子涉及到工业、农业、工程技术、保险、医学、经济等多个领域,实例生动具体,使读者在理解基本概念、掌握基本方法的同时,体会到概率统计应用的广泛性和趣味性.

本书可作为普通高等学校工科、理科(非数学类专业)本科生概率论与数理统计课程的教材,也可作为经济、管理类有关专业本科生概率论与数理统计课程的教材.本书中带有"*"的部分可供对概率论与数理统计知识有较高要求的专业的学生选用.

学习本书内容只需读者具备微积分和线性代数的相关知识. 全书共9章,包

括两部分内容，前 5 章是概率论部分，主要包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理等内容；后 4 章是数理统计部分，主要包括数理统计基础、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析初步等内容.

讲授本教材的全部内容建议 64 学时，如果只讲授前 8 章，建议 48 学时，如果讲授前 5 章，建议 32 学时.

本书由大连民族学院理学院组织编写，主编齐淑华、王立冬，副主编张友、丁淑妍，参加书稿编写的还有葛仁东、梁学忠、李妍、王金芝、刘红梅、周庆健、谢丛波、刘强、刘力军、董莹、刘恒、楚振艳、董丽、李阳、焦佳、丛树强等教师.

由于编者水平有限，难免有不当之处或错误，敬请同行和广大读者指正.

编　者

2009 年 8 月

目录

第1章

随机事件及其概率

本章介绍概率论与数理统计中用到的基本概念及随机事件的关系与运算，重点论述概率的定义、古典概率的求法、条件概率和乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式以及事件的相互独立性.

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机现象

概率论与数理统计研究的对象是随机现象.在客观世界中，人们可以观察到的现象大体上存在两种，一种是在一定条件下必然发生的现象，称为**确定性现象**或**必然现象**.例如，在一个标准大气压下，水在100°C时一定沸腾；竖直上抛一个重物，则该重物一定会竖直落下来.另一种称为**随机现象**(random phenomenon)，是指在进行个别试验或观察时，其结果具有不确定性，但在大量的重复试验中，其结果又具有统计规律性的现象.例如，向上抛一枚质地均匀的硬币，硬币落地的结果可能正面朝上，也可能反面朝上；掷一颗质地均匀的骰子，可能出现1～6点中的任一点.在随机现象中，虽然在一次观察中，不知道哪种结果会出现，但在大量的重复观察中，其每种可能结果却呈现出某种规律性.例如，多次抛一枚硬币时，正面朝上的次数大致占总次数的一半.这种在大量重复观察中所呈现出的固有规律性，就是我们所说的统计规律.概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

把对某种随机现象的一次观察、观测或测量等称为一个**试验**.

下面看几个试验的例子.

(1) 将一枚硬币抛三次，观察正面H和反面T出现的情况；

(2) 掷一颗骰子，观察出现的点数；

(3) 观察某城市在某个月内发生交通事故的次数；

(4) 对某只灯泡做试验，观察其使用寿命；

(5) 对某只灯泡做试验，观察其使用寿命是否小于 200h.

上述试验具有以下特点：

(1) 在相同的条件下，试验可以重复进行；

(2) 每次试验的结果都具有多种可能性，而且在试验前可以明确试验的所有可能结果；

(3) 在每次试验前，不能准确地预言该次试验将出现哪种结果.称这样的试验为**随机试验**(random experiment)，简称试验，记作 E.

注 1.1 本书以后所提到的试验均指随机试验.

1.1.2 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知其试验结果，但试验的所有可能结果是已知的，称试验所有可能结果组成的集合为**样本空间**(sample space)，记作 $\Omega=\{\omega\}$，其中试验结果 ω 为样本空间的元素，称之为**样本点**(sample point).

设 $E_i(i=1,2,\cdots,5)$分别表示上述试验(1)～(5)，以 Ω_i 表示试验 $E_i(i=1,2,\cdots,5)$的样本空间，则

(1) $\Omega_1=\{\mathrm{HHH},\mathrm{HHT},\mathrm{HTH},\mathrm{THH},\mathrm{HTT},\mathrm{THT},\mathrm{TTH},\mathrm{TTT}\}$；

(2) $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$；

(3) $\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$；

(4) $\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

(5) $\Omega_5=\{$寿命小于 200h，寿命不小于 200h$\}$.

注 1.2 虽然随机试验(4)和(5)都观察某只灯泡的使用寿命，但其试验目的不同，所以对应的样本空间也不同.

1.1.3 随机事件

一般地，称试验 E 的样本空间 Ω 的任意一个子集为**随机事件**(random event)，简称**事件**，常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示.

做试验 E 时，若试验结果属于 A，则称**事件 A 发生**；否则，称**事件 A 不发生**.

如果事件中只包含一个样本点，则称该事件为**基本事件**(elementary event).

例 1.1 掷一颗骰子，随机试验的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，指出下述集合表示什么事件，并指出哪些是基本事件：

(1) 事件 $A_1=\{1\}$，$A_2=\{2\}$；(2) 事件 $B=\{2,4,6\}$；(3) 事件 $C=\{1,3,5\}$；(4) 事件 $D=\{4,5,6\}$.

解 (1) 两个事件分别表示“出现 1 点”和“出现 2 点”，都是基本事件.

(2) 事件表示“出现偶数点”，非基本事件；

(3) 事件表示“出现奇数点”，非基本事件；

(4) 事件表示“出现点数不小于 4 点”，非基本事件.

由于样本空间 Ω 包含了所有的样本点，并且其也是自身的一个子集，故在每次试验中，Ω 一定发生，因此，称 Ω 为**必然事件**(certain event).例如，掷一颗骰子，事件“出现的点数小于 7”是必然事件.

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，但它也是样本空间 Ω 的一个子集.由于它在每次试验中肯定不发生，所以称 $\varnothing$ 为**不可能事件**(impossible event).例如，掷一颗骰子，事件“出现 7 点”是不可能事件.

1.1.4　事件间的关系与运算

事件是一个集合，因而事件之间的关系与事件的运算自然可以按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理.

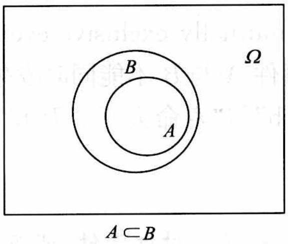
设试验 E 的样本空间为 Ω，而 A，B，$A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集.

1. 事件间的关系

(1) 事件的包含与相等

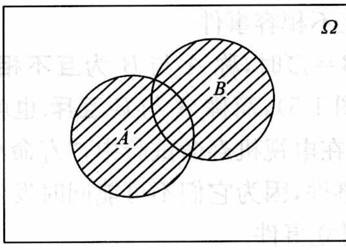
若事件 A 发生，必有事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**(图 1-1)，记作 $A\subset B$.特别地，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A=B$.

例如，掷一颗骰子，事件 $A=$“出现 4 点”，$B=$“出现偶数点”，则 $A\subset B$.掷两颗骰子，事件 $A=$“两颗骰子的点数之和为奇数”，$B=$“两颗骰子的点数为一奇一偶”，则 $A=B$.



$A\subset B$

图 1-1



$A\cup B$

图 1-2

(2) 事件的和

事件 A 或 B 至少有一个发生，称为事件 A 与事件 B 的**和事件**(union of events)(图 1-2)，也称为事件 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$.

例如，掷一颗骰子，事件 $A=$“出现的点数小于 4 点”，$B=$“出现偶数点”，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件表示为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，含义就是事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生.

(3) 事件的积

事件 A 与 B 同时发生，称为事件 A 与事件 B 的**积事件**(intersection of events)(图 1-3)，也称为事件 A 与 B 的**交**，记作 $A\cap B$ 或 AB.

例如，掷一颗骰子，事件 A＝"出现的点数小于 5 点"，B＝"出现偶数点"，则 $A\cap B=\{2,4\}$.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，它表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

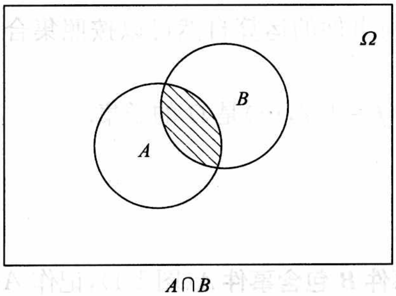


图 1-3

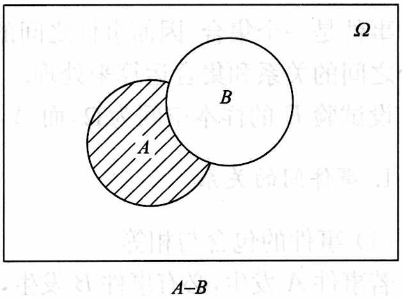


图 1-4

(4) 事件的差

事件 A 发生而 B 不发生，称为事件 A 与 B 的**差事件**(图 1-4)，记作 $A-B$.

例如，掷一颗骰子，事件 A＝"出现的点数小于 4 点"，B＝"出现奇数点"，则 $A-B=\{2\}$.

(5) 互不相容事件

当 $AB=\varnothing$ 时，称 A 与 B 为**互不相容事件**(mutually exclusive events)(或**互斥事件**)(图 1-5)，简称 A 与 B **互斥**.也就是说，事件 A 与 B 不能同时发生.

例如，在电视机寿命试验中，"寿命小于 1 万 h"与"寿命大于 5 万 h"是两个互不相容的事件，因为它们不可能同时发生.

(6) 对立事件

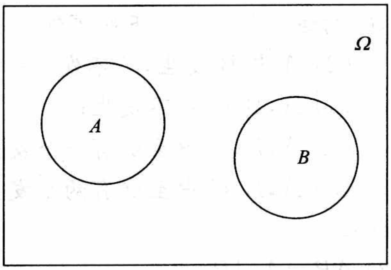
若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为**对立事件**，或互为**逆事件**(complementary event)(图 1-6)，A 的对立事件记作 $\bar{A}$，则 $\bar{A}=B$.

注 1.3 由事件的关系可得 $A-B=A\bar{B}$.

2.事件的运算

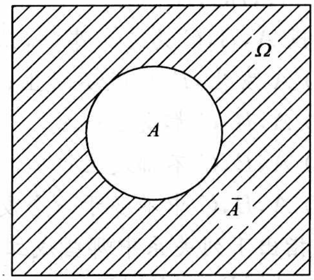
(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；



$AB=\varnothing$

图 1-5



$\bar{A}$

图 1-6

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(4) 德·摩根(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

注 1.4　由分配律还可以推出如下常用的运算：$A=A(B\cup\bar{B})=AB\cup A\bar{B}$.

例 1.2　从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回)，事件 $A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 次取到合格品，试表示如下事件：

(1) 三次都取到合格品；

(2) 三次中至少有一次取到合格品；

(3) 三次中恰有两次取到合格品；

(4) 三次中都没取到合格品；

(5) 三次中最多有一次取到合格品.

解　(1) $A_1A_2A_3$；

(2) $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1+A_2+A_3$；

(3) $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$ 或 $A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$；

(4) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ 或 $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$；

(5) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ 或 $\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_3}$.

习　题　1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 掷两颗骰子，观察出现的点数；

(2) 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止，正面用 1 表示，反面用 0 表示；

(3) 某超市在正常营业的情况下，某一天内接待顾客的人数；

(4) 某城市一天内的用电量.

2. 同时掷两颗骰子，设事件 A 表示"两颗骰子出现点数之和为奇数"，B 表示"两颗骰子出现点数之差为 0"，C 表示"点数之积不超过 20"，用样本点的集合表示

事件 $B-A$,BC,$B+\overline{C}$.

3. 设 A,B,C 为三个事件,试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生; (2) A 与 B 发生,C 不发生;

(3) A,B,C 都发生; (4) A,B,C 都不发生;

(5) A,B,C 不都发生; (6) A,B,C 中至少有一个发生;

(7) A,B,C 中不多于一个发生; (8) A,B,C 中至少有两个发生.

4. 指出下列关系中哪些成立,哪些不成立:

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B$; (2) $\overline{A}B=A\cup B$;

(3) $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$; (4) 若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$,则 $BC=\varnothing$;

(5) 若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$; (6) 若 $A\subset B$,则 $AB=A$;

(7) 若 $A\subset B$,则 $\overline{B}\subset\overline{A}$; (8) $(\overline{A\cup B})C=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

5. 设 A,B 是两个事件,则事件"A,B 都发生"、"A,B 不都发生"、"A,B 都不发生"中,哪两个是对立事件?

6. 从数字 1,2,…,9 中可以重复地任取 $n(n\geqslant 2)$ 次,以 A 表示"所取的 n 个数字中没有 5",B 表示"所取的 n 个数字中没有偶数",问事件"所取的 n 个数字的乘积能被 10 整除"如何用 A,B 表示?

1.2 概率的定义及其性质

概率的定义是概率论中一个最基本的问题.简单而直观的说法是概率是随机事件发生的可能性大小.在一次试验中,某事件 A 能否发生难以预料,但在多次重复试验中,事件 A 的发生却能显现出确定的规律性.事实上,事件 A 发生的可能性大小是可以确定的.我们的任务就是要找到对随机事件发生可能性的科学、合理的定量描述.

1.2.1 概率的统计定义

如果随机事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 n_A,则称比值 $\dfrac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**(frequency),记作 $f_n(A)$.

由上述定义易见,频率具有下述基本性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容事件,则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n)$$

例 1.3 抛硬币试验.历史上有不少人做过抛硬币试验,其结果如表 1-1 所示.从表 1-1 中的数据可以看出,出现正面的频率逐渐稳定在 0.5.

表 1-1

试验者	抛硬币试验	出现正面次数	频率
德・摩根(De Morgan)	2048	1061	0.5181
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
费勒(Feller)	10000	4979	0.4979
皮尔逊(Pearson)	12000	6019	0.5016

例 1.4　产品合格率试验.为了检测某种产品的合格率,从一批产品中分别随机地抽出 3 件、5 件、15 件、50 件、100 件、200 件、400 件、600 件,在相同条件下进行检验,得到的统计结果如表 1-2 所示.

表 1-2

产品数	3	5	15	50	100	200	400	600
合格品数	3	4	13	46	89	180	362	541
合格品频率	1.00	0.8000	0.867	0.920	0.890	0.900	0.905	0.902

当 n 取不同值时,合格品的频率 $f_n(A)$不尽相同.但当 n 很大时,$f_n(A)$在0.9这个固定的数值附近摆动.

定义 1.1　在相同条件下进行 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的频率 $\frac{n_A}{n}$在某个固定值 p 附近摆动,则称 p 为事件 A 发生的**概率**(probabiliy),记作 $P(A)=p$.

定义 1.1 称为概率的统计定义.其实,这只是个通俗的规定,而非严格的数学定义.

概率的统计定义表明,当试验次数 n 足够大时,可用事件 A 发生的频率近似代替 A 发生的概率.

在概率论的发展历史上,曾有过概率的统计定义、古典定义、几何定义和主观定义.这些定义各适合一类随机现象.那么如何给出适合一切随机现象的概率的最一般的定义呢? 1900 年,数学家希尔伯特(Hilbert,1862—1943)提出要建立概率的公理化定义来解决这个问题,即以最少的几条本质特性去刻画概率的概念.1933 年,前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov,1903—1987)首次提出了概率的公理化定义.这个定义既概括了历史上几种概率定义中的共同特性,又避免了各自的局限性和含混之处.不管什么随机现象,只有满足定义中的三条公理,才能说它是概率.这一公理化体系迅速获得举世公认,成为概率论发展史上的一个里程碑.有了这个公理化定义以后,概率论得到了快速的发展.