微分流形基础

WEIFEN LIUXING JICHU

◎ 宋卫东 编著 ◎

安徽师范大学出版社

微分流形基础

WEIFEN LIUXING JICHU

宋卫东◎编著

安徽师范大学出版社

责任编辑:吴毛顺
装帧设计:丁奕奕　王　芳

图书在版编目(CIP)数据

微分流形基础/宋卫东编著.—芜湖:安徽师范大学出版社,2013.2
ISBN 978-7-5676-0445-2
Ⅰ.①微…　Ⅱ.①宋…　Ⅲ.①微分流形—高等学校—教材　Ⅳ.①O189.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第027263号

微分流形基础

宋卫东　编著

出版发行:安徽师范大学出版社
　　　　　芜湖市九华南路189号安徽师范大学花津校区 邮政编码:241002
网　　址:http://www.ahnupress.com/
发 行 部:0553-3883578 5910327 5910310(传真)E-mail:asdcbsfxb@126.com
经　　销:全国新华书店
印　　刷:安徽芜湖新华印务有限责任公司
版　　次:2013年2月第1次修订
印　　次:2013年2月第1次印刷
规　　格:889×1194　1/32
印　　张:5.5
字　　数:135千
书　　号:ISBN 978-7-5676-0445-2
定　　价:15.00元

前　言

微分流形是20世纪数学中有代表性的基础概念之一，它不仅已成为数学本身最基本、最重要、最活跃的研究领域，而且在代数拓扑、偏微分方程、函数论、变分学、随机过程等数学分支及力学、理论物理、规范场论等学科中获得了越来越深刻的应用．

本书分为五章，第一章综述了阅读本书所必需的预备知识：点集拓扑学、张量代数、外代数等．第二章介绍了微分流形中最重要、最基本的概念，如光滑函数、切空间、切映射等，列举了大量的微分流形的例子．第三章讨论了流形上的张量场．第四章研究了外微分形式、外微分、外微分形式的积分及Stokes定理．这些内容一方面是研究近代微分几何的基本工具，另一方面是研究流形整体性质的常用方法．第五章引进了流形上的仿射联络和流形上若干重要的微分算子，它们在许多分支学科中扮演重要的角色．各章末都附有问题与练习，其中有些是本书内容的补充和延伸．

考虑到这门课是数学教育专业高年级本科生的选修课及基础数学其他相关专业方向研究生的基础课，我们尽可能地把概念表述得比较具体、比较直观，更多地与欧氏空间中已经熟悉的概念联系起来，采用局部坐标系帮助学生理解抽象概念的实质，提高实际计算的能力．由于这是一本入门教材，不可能面面俱到，不少内容及一些重要结论的证明只得忍痛割爱，但尽可能注出参考文献，尽可能完整和系统化．

在编写本书的过程中，作者主要参考了陈维桓教授所著的《微

分流形初步》(高等教育出版社,2001)和徐森林教授所著的《流形和 *Stoks* 定理》(人民教育出版社,1983),此外也参考了其他的著作和相关成果,这里难以一一标示,特向原作者表示衷心的感谢.

本书的最初稿本是作者在安徽师范大学数学系开设"微分流形"选修课时所编的讲义,这本著作就是以此为基础并结合多年的教学实践编写而成的.安徽师范大学数学系张量同志参加了本书第一章及第二章部分内容的编写,并仔细地阅读了全部书稿;在本书的编写和出版过程中,作者还一直得到安徽省教育厅自然科学研究基金、教学研究基金和安徽师范大学教材建设基金的支持;安徽师范大学鲁世平教授、衢州学院汪文贤副教授非常关心本书的编写工作,提出了许多宝贵的建设性意见,在此表示诚挚的谢意.

由于作者水平有限,书中有些内容的处理方法不一定妥当,错误也在所难免,诚望大家批评指正,以便改进.

宋卫东

2006 年 1 月

目　录

前言 …… 1
第一章　预备知识 …… 1
§1.1　拓扑空间 …… 1
1.1.1　拓扑空间的概念 …… 1
1.1.2　拓扑基 …… 4
1.1.3　连续映射和同胚 …… 5
1.1.4　连通性 …… 6
1.1.5　A_2 空间 …… 7
1.1.6　T_2 空间 …… 7
1.1.7　紧致性 …… 8
§1.2　向量值函数 …… 9
1.2.1　向量值函数的概念 …… 9
1.2.2　向量值函数的连续性 …… 11
1.2.3　向量值函数的可微性 …… 11
1.2.4　反函数定理 …… 14
1.2.5　秩定理 …… 15
§1.3　张量代数 …… 16
1.3.1　向量空间及其对偶空间 …… 16
1.3.2　张量的定义 …… 18
1.3.3　张量积运算 …… 24
1.3.4　对称和反对称协变张量 …… 29

§1.4　**外代数** …… 31
1.4.1　外积 …… 32
1.4.2　外代数 …… 34
1.4.3　几个重要定理 …… 36
问题与练习 …… 39
第二章　微分流形 …… 43
§2.1　**微分流形的定义和例子** …… 43
§2.2　**微分流形上的可微函数与可微映射** …… 54
2.2.1　可微函数 …… 54
2.2.2　流形间的可微映射 …… 56
2.2.3　流形上的光滑曲线 …… 58
2.2.4　流形间的光滑同胚 …… 59
§2.3　**切空间和余切空间** …… 60
2.3.1　流形 M 在点 p 的切向量 X_p …… 61
2.3.2　流形 M 在点 p 的切空间 $T_p(M)$ …… 62
2.3.3　流形 M 在点 p 的余切向量与余切空间 …… 68
§2.4　**切映射与余切映射** …… 73
2.4.1　切映射 …… 73
2.4.2　余切映射 …… 75
§2.5　**子流形** …… 78
2.5.1　光滑映射的进一步讨论 …… 78
2.5.2　子流形 …… 80
问题与练习 …… 85
第三章　流形上的张量场 …… 87
§3.1　**流形上的切向量场** …… 87
3.1.1　基本概念 …… 87
3.1.2　Poisson 括号积 …… 92
3.1.3　光滑切向量场的积分曲线 …… 94

3.1.4　F— 相关性 …… 95
3.1.5　单参数变换群 …… 96
§3.2　**流形上点 p 的 (r,s) 型张量** …… 101
3.2.1　基本概念 …… 101
3.2.3　协变张量的张量积 …… 102
3.2.3　反称协变张量的外积及其性质 …… 103
§3.3　**流形上的张量场** …… 105
§3.4　**黎曼度量** …… 111
问题与练习 …… 114
第四章　外微分形式的积分和 Stokes 定理 …… 116
§4.1　**外微分形式** …… 116
4.1.1　s 阶外微分形式 …… 116
4.1.2　外微分形式的外积 …… 117
4.1.3　外微分形式间的拉回映射 …… 119
4.1.4　Cartan 定理 …… 121
§4.2　**外微分算子 d** …… 122
§4.3　**外微分形式的积分　*Stokes* 定理** …… 128
4.3.1　流形的定向 …… 128
4.3.2　带边流形和它的定向 …… 130
4.3.3　流形上的 m 阶外微分形式 ω 的积分与 Stokes 定理 …… 132
问题与练习 …… 135
第五章　仿射联络空间 …… 137
§5.1　**仿射联络** …… 137
5.1.1　仿射联络的定义及局部表示 …… 137
5.1.2　仿射联络的存在性定理 …… 139
5.1.3　仿射联络的挠率和曲率 …… 140
5.1.4　仿射联络的结构方程 …… 143

§5.2　仿射联络空间上张量场沿切向量场的共变导数 …………………………………………… 144
5.2.1　切向量场 Y 沿切向量场 X 的共变导数………… 144
5.2.2　余切向量场 ω 沿 X 方向的共变导数 $\nabla_X\omega$ …… 145
5.2.3　(r,s) 型张量场 T 沿切向量场 X 的共变导数 $\nabla_X T$ …………………………………………… 147
§5.3　仿射联络空间上张量场 T 的共变微分 ∇T ……… 148
§5.4　Riemann 流形上的 Laplace 算子 …………………… 154
5.4.1　Riemann 度量诱导仿射联络 ……………………… 154
5.4.2　∇f 的定义及局部表示 …………………………… 157
5.4.3　散度、梯度和 Laplace 算子的性质……………… 160
5.4.4　Hopf 引理 ………………………………………… 162
问题与练习 ………………………………………………… 165

第一章　预备知识

本章主要介绍拓扑空间、n 维欧氏空间、多重线性映射、张量和外代数等方面的有关理论，为微分流形一般概念的建立作必要的准备，同时，这些理论本身也是近代数学基础中最基本、最重要而又最活跃的研究领域，关于它们的详细叙述可参考有关的专著.

§1.1　拓扑空间

1.1.1　拓扑空间的概念

定义 1.1　设 X 是一个集合，$\mathscr{T}$ 是 X 的一个子集族，如果 $\mathscr{T}$ 满足：

(1) $X,\phi \in \mathscr{T}$;

(2) 若 $A,B \in \mathscr{T}$，则 $A \cap B \in \mathscr{T}$;

(3) 若 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$，则 $\bigcup\limits_{A \in \mathscr{T}_1} A \in \mathscr{T}$.

则称 $\mathscr{T}$ 是 X 的一个**拓扑**，$(X,\mathscr{T})$ 是一个**拓扑空间**. 在明确所赋予的拓扑 $\mathscr{T}$ 时，$(X,\mathscr{T})$ 可简记为 X，此外，$\mathscr{T}$ 中的每个元素称为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的一个**开集**.

定义 1.2　设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，$x \in X$，如果 U 是 X 的一个子集并满足条件：存在一个开集 $V \in \mathscr{T}$，使得 $x \in V \subset U$，则称 U 是 x 的一个**邻域**. 特别地，如果 $U \in \mathscr{T}$，$x \in U$，则称 U 是 x 的一个**开邻域**.

定义 1.3　设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，$A \subset X$.

(1) 如果 x 的任一邻域 U 中都有 A 中异于 x 的点,即

$$U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing,$$

则称 x 是 A 的一个**聚点**. 否则称 x 是 A 的一个**孤立点**.

(2) A 的所有聚点构成的集合称为 A 的**导集**,记为 $d(A)$.

(3) A 与 A 的导集 $d(A)$ 的并集 $A \cup d(A)$ 称为 A 的**闭包**,记作 $\bar{A}$.

定义 1.4 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间,$A \subset X$,若 $d(A) \subset A$,则称 A 是 X 中的一个**闭集**.

定理 1.1 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间,$A \subset X$,则(1)(2)(3) 彼此等价:

(1) A 为 X 的闭集,即 $d(A) \subset A$;

(2) $A = \bar{A}$;

(3) $X - A$ 为 X 的开集.

例 1 平庸空间

设 X 是一个集合,令 $\mathscr{T} = \{X,\varnothing\}$,易证 $\mathscr{T}$ 是 X 的一个拓扑,称为 X 的**平庸拓扑**,$(X,\mathscr{T})$ 称为一个**平庸空间**.

例 2 离散空间

设 X 是一个集合,令 $\mathscr{T} = 2^X$,即由 X 所有子集构成的集族,易证 $\mathscr{T}$ 是 X 的一个拓扑,称为 X 的**离散拓扑**,$(X,\mathscr{T})$ 称为**离散空间**.

显然,离散空间的每个子集既是开集也是闭集.

注 由上述两例可知,对任一集合 X 都可赋予拓扑使其成为一个拓扑空间,并且拓扑的赋予方式未必唯一.

例 3 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$

用 $\boldsymbol{R}^n$ 表示所有有序的 n 个实数构成的数组的集合,即

$$\boldsymbol{R}^n = \{x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \mid x^i \in \boldsymbol{R}, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 表示实数域,实数 x^i 称为点 $x \in \boldsymbol{R}^n$ 的第 i 个坐标. 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中定义两点 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 和 $y = (y^1, y^2, \cdots, y^n)$ 之间的距离 $d(x,y)$ 为

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2}.$$

集合$\boldsymbol{R}^n$和它的距离d所构成的序对$(\boldsymbol{R}^n,d)$称为**n维欧氏空间**,通常记为$\boldsymbol{R}^n$.

(1)$\boldsymbol{R}^n$是拓扑空间

设$x_0 \in \boldsymbol{R}^n$,ε为任一正数,令

$$B_{\varepsilon}(x_0) = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid d(x_0,x) < \varepsilon\},$$

称$B_{\varepsilon}(x_0)$为$\boldsymbol{R}^n$中以x_0为中心,ε为半径的开球,令

$$\mathscr{F} = \{A \subset \boldsymbol{R}^n \mid \text{对于任意 } x_0 \in A, \text{存在 } B_{\varepsilon}(x_0) \subset A\}.$$

易证$\mathscr{F}$是$\boldsymbol{R}^n$的拓扑,从而$(\boldsymbol{R}^n,\mathscr{F})$是拓扑空间.

(2)$\boldsymbol{R}^n$是n维向量空间

令$e_1 = (1,0,\cdots,0)$,$e_2 = (0,1,0,\cdots,0)$,$\cdots$,$e_n = (0,0,\cdots,0,1)$,则$e_1,\cdots,e_n$是$\boldsymbol{R}^n$的一组基,对于任意$x,y \in \boldsymbol{R}^n$,则

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y^i e_i,$$

在$\boldsymbol{R}^n$中定义加法和数乘为:

$$x + y \triangleq \sum_{i=1}^{n} (x^i + y^i)e_i \triangleq (x^1 + y^1,\cdots,x^n + y^n),$$

$$\lambda x \triangleq \sum_{i=1}^{n} (\lambda x^i)e_i \triangleq (\lambda x^1,\cdots,\lambda x^n),$$

其中$\lambda \in \boldsymbol{R}$,于是$\boldsymbol{R}^n$是实数域$\boldsymbol{R}$上的$n$维向量空间①.

(3)$\boldsymbol{R}^n$是内积空间

在$\boldsymbol{R}^n$中定义内积$\langle\ ,\ \rangle$,$x = (x^1,\cdots,x^n)$,$y = (y^1,\cdots,y^n)$,

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i,$$

从而$((\boldsymbol{R}^n),\langle\ ,\ \rangle)$是内积空间.

例4　拓扑子空间(相对拓扑)　设$(X,\mathscr{F})$是拓扑空间,$Y \subset X$,令

① $\triangleq$ 表示定义为

$$\mathscr{T}_Y = \{W \subset Y \mid \text{存在} U \in \mathscr{T}, \text{使得} W = U \cap Y\},$$

易证 $\mathscr{T}_Y$ 是 Y 的一个拓扑,称为(相对 X 的拓扑 $\mathscr{T}$ 而言的) **相对拓扑**, $(Y,\mathscr{T}_Y)$ 称为 $(X,\mathscr{T})$ 的一个**拓扑子空间**.

注 子空间传递性,即如果 Z 是 Y 的子空间,Y 是 X 的子空间,则 Z 是 X 的子空间.

1.1.2 拓扑基

$\boldsymbol{R}^n$ 的欧氏拓扑是由球形邻域族通过求并运算产生的,球形邻域族在构造欧氏拓扑中起到了基础性的作用. 类似地,可在一般拓扑空间中提出基的概念.

定义 1.5 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间,$\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$,如果 $\mathscr{T}$ 中的每个元素都是 $\mathscr{B}$ 中某些元素的并,即对于每个 $U \in \mathscr{T}$,存在 $\mathscr{B}_U \subset B$,使得

$$U = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_U} B,$$

则称 $\mathscr{B}$ 是拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个**基**,或称 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 X 的一个**基**.

例 5 (1) 所有球形邻域构成的集族是欧氏拓扑空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个基;

(2) 所有单点集构成的集族是离散空间的一个基.

下面的定理将 $\boldsymbol{R}^n$ 中构造欧氏拓扑的方法一般化,即对任意一个集合,首先挑出它的一个满足一定条件的子集族,然后由该子集族通过求并运算产生一个拓扑恰以这一子集族为基.

定理 1.2 设 X 是一个集合,$\mathscr{B}$ 是 X 的一个子集族,如果 $\mathscr{B}$ 满足条件:

(1) $\bigcup_{B \in \mathscr{B}} B = X$;

(2) 如果 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$,则对任意 $x \in B_1 \cap B_2$,存在 $B \in \mathscr{B}$,使得 $x \in B \subset B_1 \cap B_2$,则 X 的子集族

$$\mathscr{T} = \{U \subset X \mid \text{存在} \mathscr{B}_U \subset \mathscr{B}, \text{使得} U = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_U} B\}$$

是集合 X 的唯一一个以 $\mathscr{B}$ 为基的拓扑;反之如果 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 是 X

的某个拓扑的基，则 $\mathscr{B}$ 一定满足(1)、(2).

我们不难验证 $\boldsymbol{R}^n$ 的球形邻域族确实满足上述定理的条件(1)、(2)，因此它可通过求并运算产生一个拓扑，即 $\boldsymbol{R}^n$ 的欧氏拓扑. 下面再给出一例.

例 6　积空间

设$(X_1,\mathscr{T}_1),\cdots,(X_n,\mathscr{T}_n)$ 是 $n \geqslant 1$ 个拓扑空间，则 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ 的子集族

$$\mathscr{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \in \mathscr{T}_i, i = 1,\cdots,n\}$$

满足定理 1.2 的条件(1)、(2)，所以存在 X 的唯一一个拓扑 $\mathscr{T}$ 以 $\mathscr{B}$ 为基. $\mathscr{T}$ 称为 $\mathscr{T}_1,\cdots,\mathscr{T}_n$ 的积拓扑，$(X,\mathscr{T})$ 称为$(X,\mathscr{T}_1),\cdots,(X_n,\mathscr{T}_n)$ 的积空间.

1.1.3　连续映射和同胚

现在将数学分析中连续映射的概念推广到拓扑空间.

定义 1.6　设 X、Y 是两个拓扑空间，映射 $f:X \to Y$. 如果 Y 中每个开集 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的一个开集，则称 f 是从 X 到 Y 的一个**连续映射**.

定理 1.3　设$(X,\mathscr{T}_1)$，$(Y,\mathscr{T}_2)$ 为拓扑空间，映射 $f:X \to Y$. 则条件(1) ~ (4) 彼此等价：

(1) $f:X \to Y$ 连续；

(2) f 在 X 上的每一点连续，即任意 $x \in X$，对 $f(x)$ 的任一邻域 W，$f^{-1}(W)$ 是 x 的一个邻域；

(3) 存在$(Y,\mathscr{T}_2)$ 的一个基 $\mathscr{B}$，使得对任意 $B \in \mathscr{B}$，$f^{-1}(B) \in \mathscr{T}_1$；

(4) Y 中任一闭集 A 的原像 $f^{-1}(A)$ 是 X 中的闭集.

注　上述定理的条件(2) 等价于：对任意 $x \in X$ 及 $f(x)$ 的任一邻域 W，必存在 x 的邻域 V，使得 $f(V) \subset W$(数学分析中函数在一点连续的定义).

定理 1.4　设 X、Y、Z 都是拓扑空间，则

(1) 恒同映射 $id:X\to X$ 连续;

(2) 若映射 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 都是连续映射,那么 $g\circ f:X\to Z$ 也是连续映射.

定理1.5 设 $Y,X_1,\cdots,X_n$ 为拓扑空间,则积空间 $X_1\times\cdots\times X_n$ 向第 i 个因子空间 X_i 的投影

$$\pi_i:X_1\times\cdots\times X_n\to X_i;(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_i$$

是连续映射,且映射 $f:Y\to X_1\times\cdots\times X_n$ 连续当且仅当每个 $\pi_i\circ f:Y\to X_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 都是连续的.

设 X,Y 是两个拓扑空间,映射 $f:X\to Y$ 称为**同胚映射**,如果 f 是一一映射,且 f,f^{-1} 都是连续映射,此时称 X 与 Y 是**同胚**的,记为 $X\cong Y$. 显然,同胚作为拓扑空间之间的关系,一定是等价关系.

1.1.4 连通性

定义1.7 设 X 是一个拓扑空间,如果存在 X 的两个非空不相交的开集 A,B 使得 $X=A\cup B$,则称 X 是一个**不连通空间**,否则称 X 是**连通的**.

例7 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 是连通的,此外 $\boldsymbol{R}^1$ 中的任一至少含两个点的子集是连通的当且仅当它是一个区间.

定理1.6 设 X 是一个连通空间,$f:X\to Y$ 是一个连续映射,则 $f(X)$ 是 Y 的连通子集,即 $f(X)$ 作为 Y 的子空间是连通的.

由定理1.6可知连通性是一个拓扑不变性质,即如果 X 是一个连通空间,那么与 X 同胚的所有拓扑空间都是连通的.

推论1 欧氏平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上的单位圆周 $S^1=\{(x^1,x^2)\in\boldsymbol{R}^2\mid(x^1)^2+(x^2)^2=1\}$ 是连通的.

证明 作映射

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2;t\to(\cos2\pi t,\sin2\pi t),$$

易见 f 是连续的,$f(\boldsymbol{R})=S^1$. 由于 $\boldsymbol{R}$ 连通,由定理1.6知 S^1 连通.

推论2(介值性定理) 设 X 是一个连通空间,$f:X\to\boldsymbol{R}$ 是一个连

续映射,则$f(X)$是$\boldsymbol{R}$上的一个区间或是一个点.

定理1.7　设$X_1,\cdots,X_n$是n个连通空间,则积空间$X_1\times\cdots\times X_n$也是连通的.

例8　n维圆环面,即n个单位圆周的积空间

$$T^n = \underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n个}$$

是一个连通空间.

1.1.5　A_2空间

定义1.8　一个拓扑空间如果有一个可数基,则称该空间是一个满足**第二可数性公理**的空间,或简称为$\boldsymbol{A_2}$**空间**.

例9　$\boldsymbol{R}^n$是一个A_2空间.

定理1.8　设X、Y是两个拓扑空间,$f:X\to Y$是一个满的连续开映射(所谓$f:X\to Y$为开映射,即对X的任一开集U,$f(U)$为Y的开集). 如果X是A_2的,那么Y一定也是A_2的. 因此满足第二可数性公理是一个拓扑不变性质.

定理1.9　A_2空间的任一子空间仍是A_2空间.

定理1.10　设$X_1,\cdots,X_n$是n个A_2空间,那么积空间$X_1\times\cdots\times X_n$也是$A_2$空间.

例10　由定理1.9知单位圆周S^1是A_2空间,由定理1.10知n维圆环面T^n也是A_2空间.

1.1.6　T_2空间

定义1.9　设X是一个拓扑空间,如果对X中的任意两个不同点x,y分别存在x的邻域U,y的邻域V,使得$U\cap V=\phi$,则称X是一个$\boldsymbol{T_2}$**空间**或称X是一个**Hausdorff空间**.

例11　$\boldsymbol{R}^n$是一个Hausdorff空间.

定理1.11　设X是一个Hausdorff空间,则

(1)X中的任一有限子集都是闭集;

(2) 若 $\{x_i\}$ 是 X 中的一个收敛点列(存在 $x \in X$,满足:对 x 的任一邻域 U,总存在 $N \in \mathbf{Z}^+$,当 $i > N$ 时,$x_i \in U$),则 $\{x_i\}$ 的极限点必唯一.

定理 1.12 设拓扑空间 X 与 Y 同胚,如果 X 是 T_2 的,那么 Y 一定也是 T_2 的.

定理 1.13 Hausdorff 空间的任一子空间仍是 Hausdorff 空间.

定理 1.14 有限个 Hausdorff 空间的积空间仍是 Hausdorff 空间.

1.1.7 紧致性

定义 1.10 设 A 是拓扑空间 X 的子集,$\mathscr{A}$ 是 X 的一个子集族.如果 $A \subset \bigcup_{V \in \mathscr{A}} V$,则称 $\mathscr{A}$ 为 A 的**覆盖**;如果 $\mathscr{A}$ 中的每个成员都是开集,则称 $\mathscr{A}$ 为 A 的**开覆盖**;如果 $\mathscr{A}$ 中只有有限个成员,则称 $\mathscr{A}$ 为 A 的一个**有限覆盖**;如果子集族 $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$ 使得 $A \subset \bigcup_{V \in \mathscr{A}_0} V$,则称 $\mathscr{A}_0$ 为 $\mathscr{A}$ 的**子覆盖**.

定义 1.11 设 X 是一个拓扑空间,如果 X 的任一开覆盖都有一个有限子覆盖,则称 X 是一个**紧致空间**.

定理 1.15 设 X, Y 是两个拓扑空间,$f: X \to Y$ 是一个连续映射,如果 X 是紧致的,则 $f(X)$ 是 Y 的一个紧致集,即 $f(X)$ 作为 Y 的子空间是紧致的,因此紧致性是一个拓扑不变性质.

定理 1.16 紧致空间的每个闭子空间都是紧致的.

定理 1.17 Hausdorff 空间的紧致集必为闭集.

注 紧致空间:闭集 $\Rightarrow$ 紧致子集;

Hausdorff 空间:闭集 $\Leftarrow$ 紧致子集;

紧致 Hausdorff:闭集 $\Leftrightarrow$ 紧致子集.

定理 1.18 有限个紧致空间的积空间仍是紧致空间.

定理 1.19 设 A 是 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集,则 A 为紧致集当且仅当 A 是一个有界闭集.