概率论与数理统计

全国硕士研究生入学统一考试

张同斌考研数学

丛书之三

主编○林　浩

GAILVLUN YU SHULITONGJI

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/林浩主编．—合肥：合肥工业大学出版社，2012.5

ISBN 978-7-5650-0723-1

Ⅰ．①概…　Ⅱ．①林…　Ⅲ．①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 095255 号

概率论与数理统计

林　浩　主编　　　　责任编辑　疏利民

出　版	合肥工业大学出版社	**版　次**	2012 年 5 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	**印　次**	2012 年 5 月第 1 次印刷
邮　编	230009	**开　本**	787 毫米×1092 毫米　1/16
电　话	总编室：0551—2903038	**印　张**	12.75
	发行部：0551—2903198	**字　数**	307 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	**印　刷**	安徽省瑞隆印务有限公司
E-mail	hfutpress@163.com	**发　行**	全国新华书店

ISBN 978-7-5650-0723-1　　　　定价：22.00 元

前　　言

本书是工学类、经济学类和管理学类硕士研究生入学考试数学科目中概率论与数理统计的复习指导书。全书共分8章，每一章内容均按考试内容与考试要求、知识网络、知识点归纳、常考题型与真题解析、复习效果检测题、复习效果检测题参考答案编写。

“考试内容与考试要求”是最新考研数学大纲概率论与数理统计部分内容，是考试命题的依据，使考生一目了然。

“知识网络”从整体的角度考量大纲对这部分内容的要求，使单个的知识点形成知识体系，考生根据知识网络能在较短的时间内了解需掌握的知识，领会其内在联系。

“知识点归纳”系统阐述了考试大纲中要求的基本概念、基本理论、基本方法。知识点的选择和讲解融入了编者十余年教学和考研辅导的经验，既保证了知识的完整性和延续性，又着重突出了考研中的重点和易混淆的地方，以帮助考生深刻理解、融会贯通。

“常考题型与真题解析”是本书的特色之一。归纳总结近十余年的命题规律，将常考的知识点按题型进行归类，针对每种题型，详细给出考点分析，并进行解题方法、技巧的归纳与总结，开拓考生的视野，达到触类旁通、举一反三的效果。2000年以后的真题题目前都有标注，如[2008，一、二]表示2008年数学一、数学二的考题，有利于考生了解命题规律。

“复习效果检测题”与“复习效果检测题参考答案”是为考生检测复习效果专门设计的，题目都选自于真题，让考生直面真题，感受真题的风格和命题思路。

本书没有标注的例题与检测题是编者从2000年以前的真题中筛选出来的，具有较强的代表性。总体来看本书选题精简，不搞题海战术，内容全面，重点突出，通过学习使考生达到事半功倍的效果。

本书由林浩副教授任主编，何程、党健、王蕊任副主编。最后由全国著名考研数学辅导专家张同斌教授审核定稿。

本书可作为硕士研究生入学考试数学一、数学三复习概率论与数理统计的学习指导书；对于在校的本科生，本书也不失为一本很好的学习指导书。

限于编者水平，书中疏漏与错误之处在所难免，恳请读者指正。

张同斌

2012年5月18日

目 录

前 言 …………………………………………………………………… (1)

第 1 章 随机事件与概率 …………………………………………… (1)

1.1 考试内容与考试要求 …………………………………………… (1)
1.2 知识网络 ………………………………………………………… (2)
1.3 知识点归纳 ……………………………………………………… (3)
1.4 常考题型与真题解析 …………………………………………… (7)
1.5 复习效果检测题 ………………………………………………… (19)
1.6 复习效果检测题参考答案 ……………………………………… (20)

第 2 章 随机变量及其分布 ………………………………………… (26)

2.1 考试内容与考试要求 …………………………………………… (26)
2.2 知识网络 ………………………………………………………… (27)
2.3 知识点归纳 ……………………………………………………… (28)
2.4 常考题型与真题解析 …………………………………………… (33)
2.5 复习效果检测题 ………………………………………………… (46)
2.6 复习效果检测题参考答案 ……………………………………… (47)

第 3 章 多维随机变量及其分布 …………………………………… (52)

3.1 考试内容与考试要求 …………………………………………… (52)
3.2 知识网络 ………………………………………………………… (53)
3.3 知识点归纳 ……………………………………………………… (54)
3.4 常考题型与真题解析 …………………………………………… (59)
3.5 复习效果检测题 ………………………………………………… (81)
3.6 复习效果检测题参考答案 ……………………………………… (85)

第 4 章 随机变量的数字特征 ……………………………………… (95)

4.1 考试内容与考试要求 …………………………………………… (95)

4.2 知识网络 …… (95)
4.3 知识点归纳 …… (97)
4.4 常考题型与真题解析 …… (100)
4.5 复习效果检测题 …… (118)
4.6 复习效果检测题参考答案 …… (120)

第5章 大数定律和中心极限定理 …… (124)

5.1 考试内容与考试要求 …… (124)
5.2 知识网络 …… (124)
5.3 知识点归纳 …… (125)
5.4 常考题型与真题解析 …… (127)
5.5 复习效果检测题 …… (133)
6.6 复习效果检测题参考答案 …… (135)

第6章 数理统计的基本概念 …… (140)

6.1 考试内容与考试要求 …… (140)
6.2 知识网络 …… (141)
6.3 知识点归纳 …… (141)
6.4 常考题型与真题解析 …… (146)
6.5 复习效果检测题 …… (155)
6.6 复习效果检测题参考答案 …… (157)

第7章 参数估计 …… (162)

7.1 考试内容与考试要求 …… (162)
7.2 知识网络 …… (163)
7.3 知识点归纳 …… (163)
7.4 常考题型与真题解析 …… (168)
7.5 复习效果检测题 …… (179)
7.6 复习效果检测题参考答案 …… (180)

第8章 假设检验(数学一) …… (185)

8.1 考试内容与考试要求 …… (185)
8.2 知识网络 …… (186)
8.3 知识点归纳 …… (186)
8.4 常考题型与真题解析 …… (189)
8.5 复习效果检测题 …… (194)
8.6 复习效果检测题参考答案 …… (195)

第 1 章
随机事件与概率

1.1　考试内容与考试要求

考试内容(数学一、数学三)

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

考试要求(数学一、数学三)

(1)了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.

(2)理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式等.

(3)理解事件的独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

1.2 知识网络

- 随机事件与概率
  - 随机试验
    - 定义
    - 样本空间，样本点
  - 随机事件
    - 定义：样本空间的子集
    - 关系与运算
      - 关系：包含，相等，互斥，对立
      - 运算：和，积，差
    - 独立性
      - 定义及判定条件
      - 性质
  - 概　率
    - 定义：古典定义，几何定义，公理化定义
    - 性质
      - 有界性：$0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1$
      - 单调性：若 $A \subset B$，则 $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$
      - 加法公式：$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$
      - 减法公式：$\mathrm{P}(A - B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB)$
      - 求逆公式：$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$
    - 计算
      - 古典概型：$\mathrm{P}(A) = \dfrac{A\text{ 中包含样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}$
      - 几何概型：$\mathrm{P}(A) = \dfrac{A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}$
      - 条件概率：$\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}(\mathrm{P}(A) > 0)$
      - 乘法公式：$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)$
      - 全概率公式：$\mathrm{P}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i)$
      - 贝叶斯公式：$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{P}(B_j)\mathrm{P}(A \mid B_j)}$

1.3　知识点归纳

一、四个基本概念

1. 随机现象

在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律的现象称为随机现象，概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

2. 随机试验

称一个试验为随机试验，若其满足以下三个条件：

(1) 可重复性，即在相同条件下可重复进行；

(2) 结果明确性，即每次试验结果不止一个，且能事先明确所有可能的结果；

(3) 随机性，即在试验之前无法预知哪一个结果会出现.

3. 样本空间

随机试验所有可能结果组成的集合称为样本空间，记为 Ω.

4. 随机事件

(1) 随机事件：样本空间的子集，即随机试验可能出现的结果.

(2) 基本事件：由一个样本点组成的事件，其中样本点是随机试验的每个结果，为样本空间的元素，记为 w.

(3) 必然事件：每次试验必发生的事件，亦记为 Ω.

(4) 不可能事件：每次试验必不发生的事件，记为 $\varnothing$.

【说明】 ① 事件的发生：每次试验中，有且仅有一个样本点出现，若此样本点属于事件 A，则定义事件 A 发生.

② 必然事件包含所有样本点，等价于样本空间.

③ 不可能事件不包含任何样本点，等价于空集.

二、事件之间的关系与运算

1. 四种关系

(1) 包含关系：若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$.

(2) 等价关系，若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 等价，记为 $A=B$.

(3) 互斥关系：若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 互斥，记为 $AB=\varnothing$. 亦称为 A 与 B 互不相容.

(4) 对立关系：若事件 A 与事件 B 必发生且仅发生一个时，则称事件 A 与事件 B 对立，记为 $A=\overline{B}$，其充分必要条件是：$AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$.

【说明】 由两个事件之间的对立关系推广到 n 个事件之间的完备事件组，即设 A_1，A_2，…，A_n 中必发生且仅发生一个时，则称 A_1，A_2，…，A_n 构成一个完备事件组．其充分必要条件是：A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$.

2. 三种运算

(1) 和运算：若事件 C 可表示为事件 A 与事件 B 中至少一个发生时，则称事件 C 为事件 A 与 B 的和事件，记为 $C=A\cup B$.

(2) 积运算：若事件 C 可表示为事件 A 与事件 B 同时发生时，则称事件 C 为事件 A 与 B 的积事件，记为 $C=AB$ 或 $C=A\cap B$.

(3) 差运算：若事件 C 可表示为事件 A 发生而事件 B 不发生时，则称事件 C 为事件 A 与 B 的差事件，记为 $C=A-B$.

【说明】 $A-B=A\overline{B}=A-AB$；$\overline{A}=\Omega-A$.

3. 运算法则

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$，

$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$，

$A(B-C)=AB-AC$；

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

【说明】 事件运算顺序为先进行求逆运算，而后积运算，最后和运算或差运算．

三、频率与概率

1. 频率

(1) 频率的定义：进行 n 次试验，若件 A 发生了 k 次，则比值 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$.

(2) 频率的性质

(ⅰ) 非负性：$f_n(A)\geqslant 0$；

(ⅱ) 规范性：$f_n(\Omega)=1$；

(ⅲ) 有限可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 两两互斥，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_t);$$

(ⅳ) 稳定性：当试验次数 n 无限增大时，频率 $f_n(A)$ 具有稳定性，逐渐稳定于某个常数．

2. 概率

(1) 概率的定义：设随机试验的样本空间为 Ω，若对每一个事件 A 都赋予一个实数 $\mathrm{P}(A)$，称为事件 A 的概率，如果事件函数 $\mathrm{P}(\cdot)$ 满足下列条件：

(ⅰ) 非负性，即 $\mathrm{P}(A) \geqslant 0$；

(ⅱ) 规范性，即 $\mathrm{P}(\Omega) = 1$；

(ⅲ) 可列可加性，即对两两互斥事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots (A_iA_j = \varnothing, i \neq j)$，有 $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots$.

(2) 概率的性质

(ⅰ) 有界性：$0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1, \mathrm{P}(\varnothing) = 0, \mathrm{P}(\Omega) = 1$；

(ⅱ) 求逆公式：$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$；

(ⅲ) 单调性：若 $A \subset B$，则 $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$，且 $\mathrm{P}(B - A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$；

(ⅳ) 加法公式：$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$；

(ⅴ) 减法公式：$\mathrm{P}(A - B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB)$.

【说明】 $\mathrm{P}(A) = 0$，不能断言 $A = \varnothing$；$\mathrm{P}(A) = 1$，不能断言 $A = \Omega$.

四、古典概型

1. 古典概型的定义

随机试验满足以下两个条件：

(1) 有限性：即样本空间中的样本点数有限；

(2) 等可能性，即样本点发生等可能，则称其为古典概型．

2. 古典概型的计算

$$\mathrm{P}(A) = \frac{k}{n},$$

其中 k 为 A 包含的样本点个数，n 为 Ω 包含样本点个数．

五、几何概型

1. 几何概型的定义

随机试验满足以下两个条件：

(1) 有限区域、无限样本点：试验所有可能结果为无穷多个样本点，但其样本空间 Ω 表现为直线、平面或三维空间中具有几何变量的有限区域；

(2) 等可能性:即样本点发生等可能,则称其为几何概型.

2. 几何概型的计算

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega},$$

其中 S_A,S_Ω 分别为 A 与 Ω 的几何度量,几何度量指长度、面积、体积等.

六、条件概率及其应用

1. 条件概率

(1) 定义:若 $P(A)>0$,则称事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率为条件概率,记为 $P(B\mid A)$.

(2) 计算:$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\quad(P(A)>0)$.

【说明】 条件概率也是概率,概率的一切性质和结果对其都适用.

2. 乘法公式

若 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$;

若 $P(A_1\cdots A_{n-1})>0$,则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1})$.

3. 全概率公式

定理:设 $B_1,B_2,\cdots B_n$ 为样本空间 Ω 的一个完备事件组,A 为 Ω 中的任一事件,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A\mid B_n).$$

4. 贝叶斯公式

定理:设 $B_1,B_2,\cdots B_n$ 为样本空间 Ω 的一个完备事件组,A 为 Ω 中的事件,且 $P(A)>0$,$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}.$$

七、事件的独立性

1. 独立性的定义

(1) 描述性定义:设 A,B 为两个事件,若其中任意一个事件发生的概率不受另一事件发生与否的影响,则称事件 A,B 相互独立.此定义可推广到 n 个事件的相互独立.

(2) 数学定义:若 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与 B 相互独立.

【说明】① 三个事件 A,B,C 相互独立的充分必要条件为：A,B,C 满足

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\P(AC)=P(A)P(C),\\P(BC)=P(B)P(C),\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C).\end{cases}$$

② 也可推广到 n 个事件的相互独立.

2. 独立性的性质

(1) 若事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立；

(2) 概率为 1 或 0 的事件与任何事件都相互独立；

(3) 若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，A 与 B 互斥或存在包含关系，则 A 与 B 不相互独立.

(4) 事件组 A,B,C 相互独立，则 A,B,C 两两独立；反之不真.

3. 伯努利概型

(1) 定义：设试验 E 只有两个可能结果：A 及 $\overline{A}$，则称 E 为伯努利试验. 设 $P(A)=p$，则 $P(\overline{A})=1-p$. 将 E 独立地重复进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验，或 n 重伯努利概型.

(2) 计算：在 n 重伯努利概型中，事件 A 发生 k 次的概率为 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)$.

1.4　常考题型与真题解析

题型一　随机事件的关系及运算

例 1.1　设事件 A,B,C 构成一个完备事件组，即 A,B,C 两两互斥且其和为 Ω，则有

(A) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\Omega$.　　(B) $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 两两互斥.

(C) $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 两两独立.　　(D) $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 相互独立.　　【　】

[考点]　考查事件与事件之间的关系与运算.

[详解]　应选(A).

因为 A,B,C 两两互斥，所以 $ABC=\varnothing$，则 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}=\overline{\varnothing}=\Omega$. 故应选(A).

例 1.2　对于任意两个事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是

(A) $A\subset B$.　　(B) $\overline{B}\subset\overline{A}$.　　(C) $A\overline{B}=\varnothing$.　　(D) $\overline{A}B=\varnothing$.　　【　】

[考点]　考查事件之间的关系与运算.

[详解] 应选(D).

因为 $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow \overline{A}\supset\overline{B}\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing$. 而$\overline{A}B=B-A$,因 $A\subset B$,$\overline{A}B=\varnothing$不一定成立. 故应选(D).

例 1.3[2005,三] 在电炉上安装 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电,以 E 表示事件"电炉断电",而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则事件 E 等于

(A) $T_{(1)}\geqslant t_0$.　(B) $T_{(2)}\geqslant t_0$.　(C) $T_{(3)}\geqslant t_0$.　(D) $T_{(4)}\geqslant t_0$.　【 】

[考点] 考查事件之间的关系

[详解] 应选(C).

设事件 $A_i=\{T_{(i)}\geqslant t_0\}(i=1,2,3,4)$,由已知可知 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset A_4$,而事件 E 表示这 4 个事件中至少有 2 个发生,即事件 A_3,A_4 发生,因此 $E=A_3$. 故应选(C).

例 1.4[2009,三] 设事件 A 与 B 互斥,则

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$.　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(\overline{A})=1-P(B)$.　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.　【 】

[考点] 考查事件之间的关系及概率的性质.

[详解] 应选(D).

因为事件 A 与 B 互斥,则 $AB=\varnothing$,于是$\overline{AB}=\Omega$. 故 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=P(\Omega)=1$. 故应选(D).

题型二　概率的基本性质

例 2.1 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$ 且 $P(A)=p$,则 $P(B)=$ ______.

[考点] 考查概率的基本性质及事件的运算.

[详解] 应填 $1-p$.

由对偶律可得

$$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$

于是 $P(A)+P(B)=1$,故 $P(B)=1-P(A)=1-p$.

例 2.2 设 A,B,C 是任意三事件,则下列命题正确的是

(A) 若 $A\cup C=B\cup C$,则 $A=B$.　(B) 若 $P(A)=P(B)$,则 $A=B$.

(C) 若 $A-B=A$,则 $AB=\varnothing$.　(D) 若 $P(AB)=0$,则 $AB=\varnothing$.　【 】

[考点] 考查概率的性质及事件间的关系.

[详解] 应选(C).

选(A)者误认为事件的运算满足消去律，实则不然；概率相等的两事件可能是完全不同的两个事件，排除(B)；选(D)者误认为只有不可能事件 $\varnothing$ 的概率为 0.

而由 $A-B=A$ 可知 $A\overline{B}=A$，则 $A\subset\overline{B}$，于是 $AB=\varnothing$. 故应选(C).

例 2.3　设 X 和 Y 为两个随机变量，且 $P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7}$，$P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}$，则 $P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=$________.

[考点]　考查概率的性质中的加法公式.

[详解]　应填 $\frac{5}{7}$.

事件 $\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=\{X\geqslant 0\cup Y\geqslant 0\}$，应用加法公式有

$$\begin{aligned}P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}&=P\{X\geqslant 0\cup Y\geqslant 0\}\\&=P\{X\geqslant 0\}+P\{Y\geqslant 0\}-P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}\\&=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.\end{aligned}$$

例 2.4　设两两相互独立的三事件 A，B 和 C 满足条件：$ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$________.

[考点]　考查加法公式及独立性.

[详解]　应填 $\frac{1}{4}$.

由加法公式及独立性可知

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(\varnothing)\\&=3P(A)-3[P(A)]^2=\frac{9}{16},\end{aligned}$$

解方程得 $P(A)=\frac{1}{4}$　($P(A)=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$ 不合题意舍去).

例 2.5　一个工人看管三台车床，在一小时内车床不需要工人照管的概率分别为：第一台等于 0.9，第二台等于 0.8，第三台等于 0.7. 求在一小时内三台车床最多有一台需要工人照管的概率.

[考点]　考查概率的基本性质及事件的独立性.

[详解]　设事件 A 表示所求事件，B_i 表示第 i 台车床在一小时内要工人照管 $(i=1,2,3)$. 则

$$P(A)=P(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3+B_1\overline{B}_2\overline{B}_3+\overline{B}_1B_2\overline{B}_3+\overline{B}_1\overline{B}_2B_3),$$

由已知 $P(\overline{B}_1)=0.9$，$P(\overline{B}_2)=0.8$，$P(\overline{B}_3)=0.7$，而 B_1,B_2,B_3 是相互独立的，可知

$$P(A)=P(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3)+P(B_1\overline{B}_2\overline{B}_3)+P(\overline{B}_1B_2\overline{B}_3)+P(\overline{B}_1\overline{B}_2B_3)$$

$$=0.9\times0.8\times0.7+0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3$$

$$=0.902.$$

例 2.6 设当事件 A 与 B 同时发生时 C 也发生,则

(A)$P(C)=P(AB)$. (B)$P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.

(C)$P(C)=P(A\cup B)$. (D)$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$. 【 】

[考点] 考查概率的基本性质及事件之间的关系.

[详解] 应选(D).

方法 1 由题设,有 $AB\subset C$,于是

$$P(C)\geqslant P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})$$

$$=1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B})]$$

$$=1-[1-P(A)+1-P(B)-P(\overline{A}\,\overline{B})]$$

$$=P(A)+P(B)-1+P(\overline{A}\,\overline{B})\geqslant P(A)+P(B)-1.$$ 故应选(D).

方法 2 由题设,有 $AB\subset C$,于是

$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$. 故应选(D).

题型三 古典概型与几何概型

例 3.1 从 5 双不同鞋号的鞋子中任取 4 只,求 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率.

[考点] 考查古典概型的计算.

[详解] 设 A 表示“4 只鞋子中至少有 2 只配成一双”. 显然,问题中所有可能的基本事件总数为 C_{10}^4.

方法 1 事件 A 中包含的基本事件有下面两种情况:“恰有 2 只配成一双”和“4 只正好配 2 双”,而前者有 $C_5^1C_4^22^2$ 种取法. 因为,配成对的一双有 C_5^1 种取法,剩下的 2 只可以是其余 4 双中任 2 双中各取一只,2 双的取法有 C_4^2 种,2 双中各取一只有 2^2 种取法,故以上搭配共有 $C_5^1C_4^22^2$ 种取法. 后者“4 只正好配成 2 双”共有 C_5^2 种取法. 故利用古典概型计算公式有

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^22^2+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}.$$

方法 2 考虑 A 的对立事件 $\overline{A}$,$\overline{A}$ 表示“4 只中都不成双”,则 $\overline{A}$ 包含基本事件数目为 $2^4C_5^4$. 故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{2^4C_5^4}{C_{10}^4}=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

例 3.2　设袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，求第二个人取到黄球的概率．

［考点］　考查古典概型的计算，或考查全概率公式的应用．

［详解］　设 A 为"第二个人取到黄球"，B_1，B_2 分别为第一个人取到白球和黄球．

方法 1　利用古典概型公式计算

显然，两人依次各取一球，不放回抽样，则样本空间 Ω 包含的基本事件总数为 50×49，而事件 A 中包含基本事件的数目应为事件"第一个人取到白球，且第二个人取到黄球"与事件"第一个人取到黄球，且第二个人取到黄球"所含基本事件之和，即 $C_{30}^1C_{20}^1+C_{20}^1C_{19}^1=20\times 49$.

故由古典概型公式得　$$P(A)=\frac{20\times 49}{50\times 49}=\frac{2}{5}.$$

方法 2　利用全概率公式计算

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)\\&=\frac{30}{50}\times\frac{20}{49}+\frac{20}{50}\times\frac{19}{49}=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

例 3.3　如图 1－1 所示，设区域 D 是坐标为 $(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ 的四个点围成的正方形，今向 D 内随机地投入 10 个点，求这 10 个点中至少有 2 个点落在曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围成的区域 D_1 内的概率．

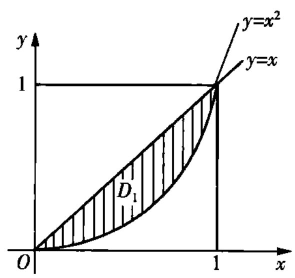

图 1－1

［考点］　考查几何概型的计算及伯努利公式．

［详解］　设事件 A 表示"任投一点落在区域 D_1 内"，此时样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，事件 A 中包含样本点集合为 $D_1=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant x\}$，由几何概型公式可知

$$P(A)=\frac{S_{D_1}}{S_D}=\frac{\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x}{1}=\frac{\frac{1}{6}}{1}=\frac{1}{6}.$$

设事件 B_i 表示"投入的 10 个点中有 i 个落入区域 D_1"，$i=0,1,2,\cdots,10$；则本题所求概率为

$$\begin{aligned}P(B_2\cup B_3\cup\cdots\cup B_{10})&=1-P(B_0)-P(B_1)\\&=1-(1-P(A))^{10}-C_{10}^1P(A)(1-P(A))^9\\&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}-10\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^9\approx 0.52.\end{aligned}$$

例 3.4［2007，一、三］　在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值

小于$\frac{1}{2}$的概率为________.

［考点］ 考查几何概型的计算.

［详解］ 应填$\frac{3}{4}$.

这是一个几何型概率的计算题.设所取的两个数分别为x和y,则以x为横坐标以y为纵坐标的点(x,y)随机地落在边长为1的正方形内(如图1-2所示),设事件A表示"所取两数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$",则样本空间$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$;事件$A$的样本点集合为区域$G$中所有的点,即$G=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1,|y-x|<\frac{1}{2}\}$.区域$\Omega$的面积$S_\Omega=1$,区域$G$的面积 $S_G=S_\Omega-S_{G_1}-S_{G_2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

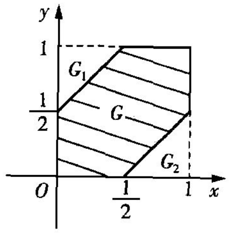

图1-2

因此

$$P(A)=\frac{S_G}{S_\Omega}=\frac{3}{4}.$$

题型四　条件概率的性质及运算

例4.1 已知$0<P(B)<1$且$P[(A_1\cup A_2)\mid B]=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$,则下列选项成立的是

(A)$P[(A_1\cup A_2)\mid \overline{B}]=P(A_1\mid \overline{B})+P(A_2\mid \overline{B})$.

(B)$P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$.

(C)$P(A_1\cup A_2)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$.

(D)$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$. 【　】

［考点］ 考查条件概率的计算.

［详解］ 应选(B).

由已知$P[(A_1\cup A_2)\mid B]=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$得

$$\frac{P(A_1B\cup A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)},$$

则$P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$.故应选(B).

例4.2 设A,B是两个随机事件,且$0<P(A)<1$,$P(B)>0$,$P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$,则必有

(A)$P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)(B)P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$.

(C)$P(AB)=P(A)P(B)$.(D)$P(AB)\neq P(A)P(B)$. 【　】

［考点］ 考查条件概率的计算.