

LISANSHUXUEXITIJIEXI

离散数学 习题解析

● 朱怀宏 编 著



南京大学出版社

离散数学 习题解析

朱怀宏 编 著



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题解析 / 朱怀宏编著. —南京: 南京大学出版社, 2012. 8

ISBN 978 - 7 - 305 - 10235 - 6

I. ①离… II. ①朱… III. ①离散数学—高等学校—题解 IV. ①O158 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 152080 号

出版发行 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093

网 址 <http://www.NjupCo.com>

出 版 人 左 健

书 名 离散数学习题解析

编 著 朱怀宏

责任编辑 倪 琦 编辑热线 025 - 83686531

照 排 江苏南大印刷厂

印 刷 宜兴市盛世文化印刷有限公司

开 本 787×960 1/16 印张 14.75 字数 265 千

版 次 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 305 - 10235 - 6

定 价 26.00 元

发行热线 025-83594756

电子邮箱 Press@NjupCo.com

Sales@NjupCo.com(市场部)

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购
图书销售部门联系调换

前 言

离散数学是高等教育中许多专业的基础课程之一,特别是在计算机科学及相关信息类学科已作为必修的核心课程.

由朱怀宏编著、南京大学出版社出版的《离散数学》(普通高校系列教材·信息技术)教材自2005年初出版以来,已有较大的发行量,对于教材中所列的大量习题,读者已多次向作者及出版社要求配以习题解答的教学辅助用书.

离散数学课程的学习有其特殊性,表现于其内容繁多、题目解法种类较多,所学知识要通过大量解题加以巩固,鉴于上述情况及读者要求,由原教材作者编写了此配套的复习及习题解答用书,按各章节内容进行编写,书中包含了相应教材中几乎所有的习题及解答,同时又选取了诸如徐洁磐编著的《离散数学导论》(高等教育出版社出版)等多个层次的10多本相关教材、习题集中的一些典型习题,并给出解答.书中有近千道题目(有的大题中包含若干小题),分为集合论、关系、函数、集合的基数、代数结构、图论、命题逻辑、谓词逻辑共8章,每章均由内容提要及注意事项、分类习题、相关分类习题解答各部分组成.

另外,本书还具有如下特点:① 每章开头的内容提要及注意事项部分仅列出了此章的重要条目及特别注意点,仅想起点睛作用,而未采取有些辅导书把所有概念均详细解释并列出相关定理的方法(编者认为详细概念解释及定理可以查阅所学教材);② 由于离散数学的某些相同的概念、解题中的相同含义在不同教材中的提法及表达形式有所不同,本书在选用时尽量尊重原书中的表达形式,故会偶尔出现对同类题目的解题时相同意思的不同表达形式;③ 部分题目除证明或解答外,增加了分析、说明、注意等部分以帮助读者加深理解、记忆;④ 将习题与习题解答分开列出(而不是像某些书中在每道题后直接给出解答),以防止读者忍不住直接看答案,因此建议读者先研究习题部分,然后再对照、研究相应

的解答,这样可以真正弄清概念,牢固地掌握知识.

本书是一本密切配合教材进行教学的参考书,它可以作为大多数离散数学教材的配套用书,也可以作为一般学习、复习离散数学时的习题解答用书,适合在校本、专科生、成教生、函授生、自考生、考研人员等使用.

希望本书对学习离散数学的读者具有一定的帮助,书中难免出现一些不足和错误之处,恳请广大读者批评指正,同时在此对参考文献中所列书目的作者表示感谢.

朱怀宏

2012年7月

目 录

第 1 章 集合论	1
1.1 内容提要及注意事项	1
1.2 集合论概念与计算	3
1.2.1 集合论概念与计算习题	3
1.2.2 集合论概念与计算习题解答	9
第 2 章 关系	21
2.1 内容提要及注意事项	21
2.2 关系的概念与性质	24
2.2.1 关系的概念与性质习题	24
2.2.2 关系的概念与性质习题解答	28
2.3 关系的闭包求法和关系的矩阵表示	36
2.3.1 关系的闭包求法和关系的矩阵表示习题	36
2.3.2 关系的闭包求法和关系的矩阵表示习题解答	38
2.4 关系的分类	44
2.4.1 关系的分类习题	44
2.4.2 关系的分类习题解答	47
第 3 章 函数	54
3.1 内容提要及注意事项	54
3.2 函数的概念与性质	55
3.2.1 函数的概念与性质习题	55
3.2.2 函数的概念与性质习题解答	58
第 4 章 集合的基数	64
4.1 内容提要及注意事项	64
4.2 可数集与不可数集的概念与性质	65

4.2.1 可数集与不可数集的概念与性质习题	65
4.2.2 可数集与不可数集的概念与性质习题解答	66
第5章 代数结构	73
5.1 内容提要及注意事项	73
5.2 代数系统的概念	76
5.2.1 代数系统的概念习题	76
5.2.2 代数系统的概念习题解答	79
5.3 半群与单元半群	85
5.3.1 半群与单元半群习题	85
5.3.2 半群与单元半群习题解答	87
5.4 群论	92
5.4.1 群论习题	92
5.4.2 群论习题解答	96
5.5 环与域	110
5.5.1 环与域习题	110
5.5.2 环与域习题解答	112
5.6 格、布尔代数	118
5.6.1 格、布尔代数习题	118
5.6.2 格、布尔代数习题解答	120
第6章 图论	127
6.1 内容提要及注意事项	127
6.2 图的基本概念	133
6.2.1 图的基本概念习题	133
6.2.2 图的基本概念习题解答	139
6.3 欧拉图与哈密顿图	150
6.3.1 欧拉图与哈密顿图习题	150
6.3.2 欧拉图与哈密顿图习题解答	152
6.4 树	154
6.4.1 树的习题	154
6.4.2 树的习题解答	157
6.5 平面图与二分图	163
6.5.1 平面图与二分图习题	163

6.5.2 平面图与二分图习题解答	166
第7章 命题逻辑	171
7.1 内容提要及注意事项	171
7.2 命题概念	175
7.2.1 命题概念习题	175
7.2.2 命题概念习题解答	177
7.3 命题公式化简及形式化	182
7.3.1 命题公式化简及形式化习题	182
7.3.2 命题公式化简及形式化习题解答	184
7.4 范式	189
7.4.1 范式习题	189
7.4.2 范式习题解答	190
7.5 推理论	195
7.5.1 推理论习题	195
7.5.2 推理论习题解答	197
第8章 谓词逻辑	206
8.1 内容提要及注意事项	206
8.2 谓词逻辑的基本概念及其公式	208
8.2.1 谓词逻辑的基本概念及其公式习题	208
8.2.2 谓词逻辑的基本概念及其公式习题解答	210
8.3 谓词逻辑的推理论	216
8.3.1 谓词逻辑的推理论习题	216
8.3.2 谓词逻辑的推理论习题解答	219
参考文献	228

第 1 章

集 合 论

1.1 内容提要及注意事项

- (1) 集合 一些研究对象的全体.
- (2) 元素 组成集合的对象.
- (3) 集合与元素间的关系 $a \in A, a \notin A$ (其中 a 是元素, A 是集合).
- (4) 集合间的比较关系 $A = B, A \neq B, A \subset B, A \supset B, A \subseteq B, A \supseteq B$.
- (5) 集合的子集 集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记为 $A \subseteq B$.
- (6) 三种不同的子集
 - ① 子集 $A \subseteq B$;
 - ② 真子集 $A \subset B$;
 - ③ 集合相等 $A = B$.
- (7) 三种特殊的集合
 - ① 空集 没有元素的集合 $\emptyset$;
 - ② 全集 包含所有被考虑范围中元素的集合 E ;
 - ③ 幂集 集合 A 的所有子集作为元素构成的集合 $\rho(A)$.
- (8) 集合的四种表示法
 - ① 枚举法 将集合中的元素一一列出;
 - ② 特性刻画法 用元素的性质刻画集合;
 - ③ 图示法 用文氏图表示集合及集合间的关系;
 - ④ 运算法 用已知集合的运算构造新的集合.
- (9) 集合的运算
 - ① 交运算 $A \cap B$;
 - ② 并运算 $A \cup B$;
 - ③ 差运算 $A - B$;

④ 补运算 $\bar{A}$;

⑤ 对称差运算 $A \oplus B$;

⑥ 笛卡尔乘积 $A \times B$.

(10) 集合的 21 个公式

① 交换律

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

② 结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

③ 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

④ 同一律

$$A \cup \emptyset = A,$$

$$A \cap E = A.$$

⑤ 零一律

$$A \cup E = E,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

⑥ 互补律

$$A \cup \bar{A} = E,$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset,$$

$$\bar{\bar{E}} = \emptyset,$$

$$\bar{\emptyset} = E.$$

⑦ 双补律

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

⑧ 等幂律

$$A \cup A = A,$$

$$A \cap A = A.$$

⑨ 吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A,$$

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

⑩ 德·摩根定律

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B},$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

(11) 笛卡尔乘积

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n\}.$$

特别注意

* 集合和元素是集合论中的原始概念,元素和集合的关系为是否属于的关系,一个元素要么属于某集合,要么不属于,两者必居其一.常用列举法、特性刻画法、通过计算规则定义和文氏图四种方法来表示集合.

* 集合间的基本关系有相等或不相等、包含或不包含.常用分别证明 $A \subseteq B, B \subseteq A$ 来求证 $A = B$. $A \subseteq B$ 称 A 为 B 的子集,即 B 包含 A .

* 全集、空集、幂集有各自特定的含义.

* 集合间常见的运算有并、交、差、补、对称差.文氏图是一种表示集合或集合间运算的直观工具.

* 对任意三个有限集合 A, B, C ,有:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = & |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - \\ & |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

1.2 集合论概念与计算

1.2.1 集合论概念与计算习题

1. 用列举法表示下列各集合的元素:

(1) $X = \{x \mid x^2 < 90, x \text{ 为正奇数}\};$

(2) 小于等于 17 的素数;

(3) $A = \{n \mid n \in \mathbf{N}, n^2 - 1 = 15, \text{且 } n^3 = 80\}.$

2. 设 $\mathbf{N}$ 的子集: $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}, B = \{n \mid n^2 \leq 70\}, C = \{n \mid n \text{ 整除 } 50\},$
 $D = \{n \mid n = 2^m, m \in \mathbf{N}, 0 \leq m \leq 5\}.$ 求下列集合:

(1) $A \cup (B \cap (C \cup D));$ (2) $B - (A \cup C);$

(3) $(\bar{A} \cap B) \cup D.$

3. 求下列集合的幂集:

(1) $\{2, 4, 6\};$

(2) $\{\emptyset, 1, \{1\}\}.$

4. 对于任意集合 X, Y, Z , 判断下列各题的正确性:

- (1) 若 $X \in Y, Y \subseteq Z$, 则 $X \in Z$;
- (2) 若 $X \in Y, Y \subseteq Z$, 则 $X \subseteq Z$;
- (3) 若 $X \subseteq Y, Y \in Z$, 则 $X \in Z$;
- (4) 若 $X \subseteq Y, Y \in Z$, 则 $X \subseteq Z$.

5. 判定下列各式是否成立.

- (1) $\{a\} \in \{\{a\}\}$;
- (2) $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$;
- (3) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$;
- (4) $\{a\} \subseteq \{a, \{a\}\}$.

6. 林强喜欢吃苹果、梨子、桃子、香蕉, 用集合表示他喜欢吃的水果.

7. 下列集合中哪些是相等的?

- (1) 单词“spear”中包含的字母所构成的集合.
- (2) 单词“spears”中包含的字母所构成的集合.
- (3) 单词“pears”中包含的字母所构成的集合.
- (4) 单词“spares”中包含的字母所构成的集合.

8. 下列集合中是空集的是

()

- A. 世界上不是联合国会员的国家所组成的集合
- B. 74 与 78 之间的素数构成的集合
- C. 按英文字母表的顺序, Z 以后的字母所组成的集合

9. 求下列集合的幂集:

- (1) $\{a, \{a\}\}$;
- (2) $\{\emptyset, a, \{a\}\}$;
- (3) $\{1, 2, 3, 4\}$.

10. 设 $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}$. 试求:

- (1) $A \times B$;
- (2) $A^2 \times B$;
- (3) $B \times A$;
- (4) $(A \times B)^2$.

11. 设 A, B, C 为任意集合. 试证:

- (1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
- (2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

12. 下列各式中不正确的是

()

- A. $\emptyset \in \emptyset$
- B. $\emptyset \subseteq \emptyset$
- C. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- D. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

13. 设 $A = \{\emptyset\}$, $B = \rho(\rho(A))$. 下列各小题是否成立?
- (1) $\emptyset \in B$ 且 $\emptyset \subseteq B$;
 - (2) $\{\emptyset\} \in B$ 且 $\{\emptyset\} \subseteq B$;
 - (3) $\{\{\emptyset\}\} \in B$ 且 $\{\{\emptyset\}\} \subseteq B$.
14. 设 A, B, C 为三个任意集合. 证明: $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.
15. 请列出下列集合的所有元素:
- (1) 大于 5 并且小于 30 的素数的集合;
 - (2) 大于 39 且小于 78 的偶数的集合.
16. 设 $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{2, 4\}$, 其中 E 为全集. 试求下列集合:
- (1) $A \cap \bar{B}$;
 - (2) $\bar{A} \cup \bar{B}$;
 - (3) $(A \cap B) \cup \bar{C}$;
 - (4) $\overline{(A \cap B)}$;
 - (5) $A \cup \bar{B} \cup C$.
17. 利用文氏图法证明下列等式:
- (1) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup C) = (A \cap C) \cup (\bar{A} \cap B)$;
 - (2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.
18. 设有集合 A, B .
- (1) 若 $A - B = B$, 则 A 与 B 有什么关系?
 - (2) 若 $A - B = B - A$, 则 A 与 B 有什么关系?
19. 设 U 为全集, A, B 为非空集合, 且 $B \subset A$. 下列运算结果中是否有空集?
- (1) $A \cap B$; (2) $\bar{A} \cap \bar{B}$; (3) $\bar{A} \cap B$; (4) $A \cap \bar{B}$.
20. 求证: $A - (A - B) = A \cap B$.
21. 已知 $A \subseteq B$ 且 $A \in B$. 下列结论中正确的是 ()
- A. 是不可能的
 - B. 是可能的
 - C. A 必须是空集
 - D. B 必须是全集
 - E. A, B 均为空集
22. 集合 $\{1\}$ 的所有子集是 ()
- A. $\emptyset$
 - B. $\{\emptyset\}$
 - C. $\emptyset, \{1\}$
 - D. $\{\emptyset, \{1\}\}$
23. 化简:
- (1) $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$;

$$(2) (A - B - C) \cup ((A - B) \cap C) \cup (A \cap B - C) \cup (A \cap B \cap C).$$

24. 下列等式中错误的是

()

A. $A \cup A = A$

B. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

C. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

D. $A \cup \emptyset = A$

25. 证明: $A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$.

26. 下列陈述中哪些为真? 哪些为假?

(1) $\{\text{张三}\} \supseteq \{\text{张三}, \text{张小三}\}$;

(2) $\{\text{张三}, \text{张小三}\} \subset \{\text{张三}\}$;

(3) $\{\text{张三}\} \not\subset \{\text{张三}\}$;

(4) $\{\text{张三}\} \not\subset \{\text{张三}\}$;

(5) $\emptyset \subseteq \{\text{张小三}\}$;

(6) $\emptyset \subset \{\text{张小三}\}$.

27. 证明下列集合论中的等式:

(1) $A \cap A = A$;

(2) $A \cup A = A$;

(3) $A - A = \emptyset$;

(4) $A \cap \emptyset = \emptyset$;

(5) $A \cup \emptyset = A$;

(6) $A - \emptyset = A$.

28. 证明下列陈述:

(1) $\{a, b, c\} \not\subseteq \{b, c, d\}$;

(2) $\{a, b, c, d\} \subset \{a, b, c, d, e\}$.

29. 给定集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 和下列条件, 计算集合 B 和 C .

(1) $A = B \cap C$; (2) $C - A = \{e, f\}$; (3) $(A \cup B) - C = \{g\}$.

30. 列举出下列集合的元素.

(1) $\rho(\{1, 2\})$; (2) $\rho(\emptyset)$; (3) $\rho(\rho(\emptyset))$; (4) $\rho(\{\emptyset, \{1, 2\}\})$.

31. 证明: 对于任意的集合 A 和 B , 有

$$(A - B) \cap B = \emptyset.$$

32. 证明: 对于任意的集合 A 和 B , 有

$$(A - B) \cup B = A \cup B.$$

33. 设有集合 $A = \{a, b, c\}$, $\emptyset$ 为空集, 则下列表示中正确的是 ()

A. $\{a\} \in A$

B. $\{a\} \subset A$

C. $a \subset A$

D. $\emptyset \in A$

34. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 3\}$, 则 $(A \cup B) \oplus C =$ ()
A. $\{1, 2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{1, 4, 5\}$ D. $\{1, 2, 3\}$
35. 设集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c\}$, 那么 $\rho(A) - \rho(B) =$ _____, $\rho(B) - \rho(A) =$ _____.
36. 设 S, T, M 为任意集合, 判断下列哪些为正确的, 哪些为错误的.
(1) $\emptyset$ 是 $\emptyset$ 的子集;
(2) 如果 $S \cup T = S \cup M$, 则 $T = M$;
(3) 如果 $S - T = \emptyset$, 则 $S = T$;
(4) 如果 $\bar{S} \cup T = E$, 则 $S \subseteq T$;
(5) $S \oplus S = S$.
37. 用枚举法表示下列集合:
(1) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ 并且 } x^2 \leq 7\}$;
(2) $A = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 并且 } (x+1)^2 \leq 0\}$.
38. 设集合 $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{d\}$, 求 $A \times B \times C$.
39. 设集合 $A = \{1, 2\}$, 求 $A \times \rho(A)$.
40. 若 N_1 为偶数集合, N_2 为奇数集合, N_3 为质数集合, 求:
(1) $N_1 \cap N_2$; (2) $N_1 \cap N_3$; (3) $N_1 \cap N_3 \cap N_2$.
41. 设 $A = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, 6\}$, 判断下列哪些成立, 哪些不成立.
(1) $2 \in A$; (2) $\{3, 4, 5\} \subseteq A$; (3) $\emptyset \in A$; (4) $\{\{1, 2\}\} \subset A$;
(5) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$; (6) $\emptyset \subseteq A$; (7) $\{1, 2\} \in A$; (8) $\{1, 2\} \subseteq A$.
42. $A = \{a, b, c, d\}$, 列出 A 中所有不含元素 a 的子集.
43. 设全集 $U = \{\text{全班男女学生}\}$, 有子集 $A = \{\text{男学生}\}$, $B = \{\text{身高 } 1.5 \text{ m 以上的学生}\}$, 求下列集合运算的结果:
(1) $A \cap B$; (2) $\bar{A} \cap B$; (3) $A \cup B$; (4) $\bar{A} \cup B$.
44. 下列等式成立的条件分别是什么?
(1) $(A - B) \cup (A - C) = A$;
(2) $(A - B) \cup (A - C) = \emptyset$;
(3) $(A - B) \cap (A - C) = \emptyset$.
45. 设集合 $A = \{\{2, 1\}, \{1, 2, 1\}\}$. 求:
(1) 幂集 $\rho(A)$;
(2) 求幂集 $\rho(\rho(A))$.
46. 设 A, B 为任意集合. 试证: $A - B = B - A$ 之充分必要条件为 $A = B$.

47. 设集合 $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}, C = \{c, d\}$, 试求 $A \times (B \cap C)$.
48. 证明: 对集合 A, B 若 $A \subseteq B$, 则有 $(A \cap B) = A, (A \cup B) = B$.
49. 已知 E 是全集, 则下列等式中错误的是 ()
- A. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- B. $A \cap A = A$
- C. $A \cap E = A$
- D. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
50. 化简: $(A - B - C) \cup ((A - B) \cap C) \cup (A \cap B - C) \cup (A \cap B \cap C)$.
51. 下列式子中错误的是 ()
- A. $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
- B. $A \oplus B = B \oplus A$
- C. $A \oplus A = \emptyset$
- D. $A \cap (B \oplus C) \neq (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
52. 设 E 为全集, A, B 为非空集且 $B \subset A$, 则空集为 ().
- A. $A \cap B$ B. $\bar{A} \cap \bar{B}$ C. $\bar{A} \cap B$ D. $A \cap \bar{B}$
53. 设 $A = \{a, b, \{a, b\}, c\}, B = \{b, \{b, c\}, \{a\}\}$, 求 $A - B, B - A, A \oplus B$.
54. 设 $A = \{b, c\}, B = \{a, d, f\}, C = \{c, e\}$, 则 $A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$ 是否成立?
55. 证明: $\rho(A) \cup \rho(B) \subseteq \rho(A \cup B)$, 并举例说明 $\rho(A) \cup \rho(B) \neq \rho(A \cup B)$.
56. 证明: $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.
57. 证明: $A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$ 不一定成立.
58. (1) 已知 $A \cup B = A \cup C, B = C$ 是否一定成立?
- (2) 已知 $A \cap B = A \cap C, B = C$ 是否一定成立?
- (3) 已知 $A \oplus B = A \oplus C, B = C$ 是否一定成立?
59. 设 A, B, C 是 U 的子集, 利用文氏图证明下列等式:
- (1) $\overline{(A \cup B)} \cup C = \bar{A} \cap \bar{B} \cup C$;
- (2) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
60. 证明: $(A - B) \oplus B = A \cup B$.
61. 设 $A = \emptyset$, 求: $\rho(A), \rho(\rho(A)), \rho(\rho(\rho(A)))$.
62. 如果 $A \subseteq B, C \subseteq D$, 试证明:
- (1) $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$;

$$(2) (A \cap C) \subseteq (B \cap D).$$

1.2.2 集合论概念与计算习题解答

1. 分析 (1) 此集合中元素要满足本身为正奇数、其平方值小于 90 两个条件.

(2) 此集合中的元素为包括 17 在内的所有小于等于 17 的素数.

(3) 没有自然数的立方为 80.

解 (1) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$;

(2) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$;

(3) $\emptyset$.

2. 解 列举出 N 的各子集如下: $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$, $D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

(1) $A \cup (B \cap (C \cup D)) = A \cup (B \cap \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 25, 32, 50\}) = A \cup \{1, 2, 4, 5, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$;

(2) $B - (A \cup C) = B - \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 25, 50\} = \{0, 4, 6\}$;

(3) $(\bar{A} \cap B) \cup D = \{0, 2, 4, 6\} \cup D = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 16, 32\}$.

3. 解 (1) $\rho(\{2, 4, 6\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}\}$;

(2) $\rho(\{\emptyset, 1, \{1\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{1, \{1\}\}, \{\emptyset, 1, \{1\}\}\}$.

4. 分析 (1) 因为 $Y \subseteq Z$, 所以集合 Y 的每个元素均是集合 Z 中的元素. 由 $X \in Y$ 可得 X 是 Y 中的一个元素(集合中的元素也可以是一个集合), 因此 X 也是 Z 中的一个元素, 故 $X \in Z$.

(2) 错误, 可举反例来说明有结论不成立的情况. 设 $X = \{x\}$, $Y = \{\{x\}, y_1, y_2\}$, $Z = \{\{x\}, y_1, y_2, z_1\}$. 此时 $X \in Y$, $Y \subseteq Z$, 但 $X \notin Z$. 因为 $x \in X$, 但 $x \notin Z$ (Z 中只有 $\{x\}$ 元素, 没有 x 元素).

(3) 错误, 可举反例说明. 设 $X = \{x\}$, $Y = \{x, y\}$, $Z = \{\{x, y\}, z_1, z_2\}$. 此时有 $X \subseteq Y$, $Y \in Z$, 但 $X \notin Z$, 因为 Z 中没有元素 $\{x\}$.

(4) 错误, 可举反例说明. 设 $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{x_1, x_2, y_1\}$, $Z = \{\{x_1, x_2, y_1\}, z_1, z_2\}$. 此时有 $X \subseteq Y$, $Y \in Z$, 但 $X \notin Z$, 因为集合 X 中的元素 x_1, x_2 在 Z 中找不到.

(2)~(4)中的结论实际上有时成立, 有时不成立, 因此只要找到一种不成立的例子, 就能推翻总是成立的结论.

解 (1)正确, (2)(3)(4)不正确.