三角级数研究中的单调性条件：发展和应用

周颂平／著

科学出版社

三角级数研究中的单调性条件：发展和应用

周颂平　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

为了对三角级数(Fourier 级数)进行近似计算和有效应用，必须研究其收敛性，这个课题有长久的研究历史，引起了包括许多著名数学家在内的学者的兴趣，形成了分析数学中一条讨论热烈但进展困难的主流．其中，在三角级数一致收敛性和平均收敛性问题中，人们一直关心三角级数系数的单调递减条件的最终推广，这个开始于英国学者 Chaundy-Jollife 在 1916 年和 Young 在 1913 年的工作，最近出现了突破性的进展，产生了许多完善的结果．本书将对这方面的历史、发展给出系统的综述，重点介绍和证明最近的应用成果，并对以后的工作给出研究思路和线索．

本书可供分析数学领域特别是 Fourier 分析方向的高校教师和研究工作者作为研究资料，也可供数学学科的研究生和高年级大学生作为学习材料，还可供应用工程领域的技术人员、数学教育工作者以及数学史研究者与爱好者参考．

图书在版编目(CIP)数据

三角级数研究中的单调性条件：发展和应用/周颂平著．—北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-034570-7

Ⅰ．①三…　Ⅱ．①周…　Ⅲ．①三角级数-研究　Ⅳ．①O174.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 113957 号

责任编辑：王丽平　房　阳／责任校对：宋玲玲

责任印制：钱玉芬／封面设计：耕者设计室

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012 年 6 月第 一 版　开本：B5(720×1000)

2012 年 6 月第一次印刷　印张：13 3/4

字数：267 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

周颂平教授把他即将出版的著作《三角级数研究中的单调性条件：发展和应用》的预印本发给我, 让我先睹为快. 的确, 对于偏好分析学的学者而言, 单调系数的三角级数是一个饶有兴趣的研究对象, 因为在本科的基础教材中就已经出现 W. H. Young 的初步研究结果. 然而, 从基础教材层面上升到学术专著水准, 著者却做到了深入浅出, “雅俗共赏”.

具体来说, 该书具有下列特点：

(1) 立论严谨周密, 阐述全面系统.

这本著作全面系统地论述了加诸三角级数系数数列上的单调性条件的推广扩展路径, 直至最终得到对我们关注的结果而言不可改进的条件. 该书不但详尽介绍了历史发展过程, 更把着眼点放在 2001 年以来这方面研究取得重大突破的最新、最终成果和在 Fourier 分析、函数逼近论以及其他经典分析领域的应用上, 其中多数结果是由著者和其合作者获得的. 这是国际上第一本系统介绍这方面成果和方法的专业著作. 同时, 在进入主要内容之前, 著者介绍了三角级数和 Fourier 级数收敛性的基础理论, 对有关的基础进行了严谨的论述和证明, 从而建立了完善的整体结构.

(2) 论证循序渐进, 结构完备自洽.

该书的系统性还体现在可读性中, 著者在全书的内容安排上颇具匠心. 第 1 章即全面论证了单调性条件推广的发展历史和最终突破, 以后各章阐述了在经典分析各方面的深入应用, 尤其在论证方法上采用由易入难、由简入繁、循序渐进的方式. 同时, 全书的结构是完备自洽的, 对书中使用的不方便查阅文献的基本定义和结论, 如分数阶连续模、拟几何单调概念及结果都进行了简要的论证, 以方便阅读.

(3) 注释详尽准确, 文字通俗流畅.

著者在全书每章末的注释中对相关内容的历史发展和文献来源作了精确严肃的索引和评论, 为读者理解和掌握研究的历史及最新进展提供了有效和有益的工具. 通俗流畅的文字风格以及少量练习题的配备有助于这本专著能够用来作为相关分析专业的研究生教材, 也为其他专业的数学工作者阅读参考该书增加了可读性.

数学发展到今天, 专业性已然很强, 这使得专业著作的阅读面比较狭窄, 专业之间的交流比较困难. 这本著作是分析数学基础领域的一本专业性著作, 相信其领域的基础性和著者写作风格的流畅性能够使它在数学专业内 “雅俗共赏” 成为可

能, 并且使它的出版发行取得成功.

我与著者交往多年, 以著者治学严谨与追求完美的态度, 也相信这本专著一定可以给同行及年轻的数学爱好者以启迪与帮助.

王兴华

2012 年 3 月 20 日

目　录

第 1 章　综　　述

1.1　导　　言

基础数学包含三个分支：代数学、几何学和分析学 分析学是三个分支中最后发展起来的学科，是为了克服代数和几何的分离状态，将它们结合起来，用于描述运动的学科，是现代数学的开端，是计算数学和应用数学的基础.

数学作为一门科学，含有四个要素：数学起源于逻辑推理，从**定义**(包括公理、原理等源流性知识基础) 出发，演绎出**性质**(包括运算、推理)，使**计算**成为可能并可行，最终**应用**于数学和其他科学技术分支 在分析学系统中，任何其他方向的结果都可以看成是极限论的应用

当人们开始研究级数论时发现，对级数进行精确的计算几乎是不可能的，但是级数，特别是能对函数空间构成基的级数，具有计算上无可置疑、不可替代的重要性 众所周知，Taylor 级数、Fourier 级数和小波在理论和实践中，在科学和技术上对整体发展和应用产生过或依然正在产生着巨大的作用，其中，Fourier 级数在工程技术上的大量重要应用构成了现代技术的强大基础

为叙述方便起见，首先给出一些原始的概念和术语

形如

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

的级数称为三角级数，其 n 阶部分和 $S_n(x)$是指

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

更一般地，给定一个复系数的三角级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 后，同样将其 n 阶部分和记作 $S_n(x)$，即

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

设 $C_{2\pi}$为所有实值或复值的具有 2π 周期的连续函数 $f(x)$ 所组成的空间，并赋予范数

$$\|f\| = \max_{-\infty<x<\infty} |f(x)|,$$

而 $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 是所有具有 2π 周期的 p 次幂可积函数组成的空间, 并简记 $L_{2\pi} = L_{2\pi}^1$, 记其范数为

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

从 $f \in L_{2\pi}$ 出发, 可以由下面的公式:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

或者

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x$$

求得 Fourier 系数, 然后将 $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 或者 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ 称为 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

或者

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

同样地, 可以定义其 n 阶部分和, 但此时记作 $S_n(f, x)$. 从下面的内容可以看出, 一个三角级数的和函数的 Fourier 级数未必就是其本身, 记号 $S_n(x)$ 与 $S_n(f, x)$ 的区别还是应该引起足够的注意.

当 $x \in (0, 2\pi)$ 时, 记

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

与

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

分别为 n 阶 Dirichlet 核和 n 阶共轭 Dirichlet 核. 下面的结果是周知的.

引理 1.1　设 $x \in (0,\pi)$, 则下面的估计成立:

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}x^{-1},$$

$$|\tilde{D}_n(x)| \leqslant \pi x^{-1}.$$

引理 1.2　下面的估计成立:

$$\|D_n\|_{L^1} \leqslant M\log n,$$

$$\|\tilde{D}_n\|_{L^1} \leqslant M\log n,$$

其中 $M>0$ 为某个绝对常数.

使用通常的符号，记

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

一个三角级数可能收敛或不收敛, 又可能是或不是一个 Fourier 级数. 虽然许多简单的级数可以兼有这两个性质, 但是这两种性质之间也没有必然的联系. 例如, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}$ 显然对一切 x 都收敛, 但它不是一个 Fourier 级数; 另一方面, 也存在着对任何 x 都不收敛的 Fourier 级数.

但是, 已知有下面的事实.

定理 1.1　如果一个三角级数除了一个可列集外处处收敛于一个有限的可积函数 $f(x)$, 则它就是 $f(x)$ 的 Fourier 级数.

证明　以 $\overline{\mathrm{D}}f(x)$ 表示 $f(x)$ 在 x 点的上导数, 以 $\underline{\mathrm{D}}f(x)$ 表示 $f(x)$ 在 x 点的下导数, 即

$$\overline{\mathrm{D}}f(x) = \limsup_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad \underline{\mathrm{D}}f(x) = \liminf_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

同样地, 以

$$\overline{\mathrm{D}}_2f(x) = \limsup_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{(\Delta x)^2},$$

$$\underline{\mathrm{D}}_2f(x) = \liminf_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{(\Delta x)^2}$$

表示 $f(x)$ 在 x 点的广义二阶上导数和广义二阶下导数.

这个基础性定理 1.1 的证明是相当复杂的, 为了全书的完整性, 这里给出一个证明的思路. 为简洁起见, 将有些基础知识列为性质不作证明, 并建议读者可以先略过这一段, 它与全书的主题没有联系.

在基础分析中有如下结果:

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则有两个连续函数列 $\{p_n(x)\}$ 与 $\{q_n(x)\}$, 满足 $p_n(a)=q_n(a)=0$ $(n=1,2,\cdots)$, 在 (a,b) 内一致成立

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x)=\lim_{n\to\infty} q_n(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

并且在 $f(x)$ 的值为有限的 $x\in(a,b)$ 处成立

$$\overline{\mathrm{D}}p_n(x)\leqslant f(x)\leqslant \underline{\mathrm{D}}q_n(x).$$

(2) 设 $g(x)$ 在 (a,b) 内具有一阶连续的导函数. 若 $g(x)$ 在 (a,b) 内除去至多一个可列集外有 $\overline{\mathrm{D}}_2 g(x)\geqslant 0$, 则 $g(x)$ 是凸的; 若 $g(x)$ 在 (a,b) 内除去至多一个可列集外有 $\underline{\mathrm{D}}_2 g(x)\leqslant 0$, 则 $g(x)$ 是凹的.

现在设三角级数 $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 除了一个可列集外处处收敛于一个有限的可积函数 $f(x)$, 对 $f(x)$ 取性质 (1) 中的两个函数列 $\{p_n(x)\}$ 与 $\{q_n(x)\}$, 并定义

$$P_n(x)=\int_a^x p_n(t)\mathrm{d}t,\quad Q_n(x)=\int_a^x q_n(t)\mathrm{d}t,$$

这样 $P_n(x)$ 与 $Q_n(x)$ 具有连续导函数, 而且它们一致收敛于

$$F(x)=\int_a^x \mathrm{d}t\int_a^t f(u)\mathrm{d}u.$$

由 Cauchy 中值定理,

$$\frac{Q_n(x+h)+Q_n(x-h)-2Q_n(x)}{h^2}=\frac{q_n(x+\theta h)-q_n(x-\theta h)}{2\theta h},$$

其中 $0<\theta<1$. 因此, 除去一个可列集 E 外,

$$\underline{\mathrm{D}}_2 Q_n(x)\geqslant \underline{\mathrm{D}}q_n(x)\geqslant f(x).$$

同样地, 除去一个可列集 E 外,

$$\overline{\mathrm{D}}_2 P_n(x)\leqslant \overline{\mathrm{D}}p_n(x)\leqslant f(x).$$

令

$$\varPhi(x)=\frac{1}{4}a_0x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^2},$$

其中 $A_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx$, 则有

$$\underline{\mathrm{D}}_2\varPhi(x)\leqslant f(x)\leqslant \overline{\mathrm{D}}_2\varPhi(x).$$

于是除 E 外,

$$\overline{\mathrm{D}}_2\left(Q_n(x)-\Phi(x)\right) \geqslant \underline{\mathrm{D}}_2 Q_n(x)-\underline{\mathrm{D}}_2 \Phi(x) \geqslant f(x)-f(x)=0.$$

同理,

$$\underline{\mathrm{D}}_2\left(P_n(x)-\Phi(x)\right) \leqslant 0.$$

这样 $Q_n(x)-\Phi(x)$ 为凸, 而 $P_n(x)-\Phi(x)$ 为凹. 同时, $Q_n(x)-\Phi(x)$ 与 $P_n(x)-\Phi(x)$ 一致收敛于 $F(x)-\Phi(x)$, 因而推出 $F(x)-\Phi(x)$ 为线性函数. 如果

$$f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos n x+\beta_n \sin n x\right),$$

则从 Fourier 级数的逐项积分定理可知

$$F(x)-\frac{\alpha_0}{4} x^2+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos n x+\beta_n \sin n x}{n^2}$$

是线性函数, 从而

$$\frac{a_0-\alpha_0}{4} x^2+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(a_n-\alpha_n\right) \cos n x+\left(b_n-\beta_n\right) \sin n x}{n^2}=: \frac{a_0-\alpha_0}{4} x^2+\Psi(x)$$

是一个线性函数 $Ax+B$. 由于上面的级数 $\Psi(x)$ 一致收敛, 其和函数有界, 所以有 $a_0=\alpha_0$, $A=0$. 又因为级数 $\Psi(x)$ 一致收敛, 因此, 它是一个 Fourier 级数, 于是 $B=0$, 从而对一切 $n=1,2,\cdots$, 成立 $a_n=\alpha_n$, $b_n=\beta_n$. 定理 1.1 因此得证. □

现在不清楚的是: 当一个三角级数是收敛的, 并且是 Fourier 级数时, 它是否就是其和函数的 Fourier 级数?

在一定条件下, 有如下定理:

定理 1.2 设实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n=0 \tag{1.1}$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta a_n\right|<\infty, \tag{1.2}$$

则三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x \tag{1.3}$$

或者

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n x \tag{1.4}$$

是 Fourier 级数的充分必要条件是它们的和函数分别属于 $L_{2\pi}$.

证明　利用 Abel 变换有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta a_kD_k(x)+a_nD_n(x),$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx=\sum_{k=1}^{n-1}\Delta a_k\tilde{D}_k(x)+a_n\tilde{D}_n(x).$$

这样由条件 (1.1) 与 (1.2), 三角级数 (1.3) 在 $(0,2\pi)$ 内处处收敛于其和函数 $f(x)$, (1.4) 在 $[0,2\pi)$ 内处处收敛于其和函数 $g(x)$, 并且在 $(0,2\pi)$ 的任何内闭区间, (1.3) 与 (1.4) 对其和函数是一致收敛的. 应用定理 1.1 即可推出定理 1.2 的充分性.

现在考虑其必要性. 因为三角级数(1.3) 在 $(0,2\pi)$ 中是内闭一致收敛于其和函数的, 所以 $F(x)=\int_x^{\pi}\mathrm{d}t\int_t^{\pi}f(u)\mathrm{d}u$ 在 $(0,\pi]$ 中具有二阶连续导函数, $F''(x)=f(x)$ $(x\in(0,\pi])$. 根据级数的逐项积分定理, 在 $(0,\pi]$ 中, $F(x)-\frac{a_0}{4}x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\cos nx$ 是一个线性函数. 另一方面, 假设级数 (1.3) 是一个 Fourier 级数, 即有 $\varphi\in L_{2\pi}$, 使得 $\varphi(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$. 从 Fourier 级数的逐项积分定理又可知, 对于所有 x, $\Phi(x)-\frac{a_0}{4}x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\cos nx$ 是一个线性函数, 其中 $\Phi(x)=\int_0^x\mathrm{d}t\int_0^t\varphi(u)\mathrm{d}u$ 一阶连续可导, 并且几乎处处具有二阶导函数 $\Phi''(x)=\varphi(x)$. 总之, $F(x)-\Phi(x)$ 在 $(0,\pi]$ 中是一个线性函数. 因此, 当 $x\in(0,\pi)$ 时,

$$f(x)=F''(x)=\Phi''(x)=\varphi(x)$$

几乎处处成立, 而 $\varphi\in L_{2\pi}$, 这说明 $f(x)$ 是 $[0,\pi]$ 上的可积函数, 或者说, $f\in L_{2\pi}$. 同理可证三角级数 (1.4) 的和函数 $g\in L_{2\pi}$. □

结合定理 1.1 与定理 1.2 还可得到下面经常使用的推论.

推论 1.1　设实数列 $\{a_n\}$ 满足 (1.1) 与 (1.2). 如果三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

或者

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$$

的和函数属于 $L_{2\pi}$, 则它们分别是其和函数的 Fourier 级数.

注意：定义 $\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta a_n|$ 前需要 (1.1)，条件 (1.1) 与 (1.2) 一起被称为数列 $\{a_n\}$ 的有界变差(bounded variation) 条件，它与后面所定义的各类更进一步的有界变差条件有密切的联系.

为了有效地对三角级数或者 Fourier 级数进行近似计算，首先必须研究其收敛性. 这个课题有长久的历史，从 19 世纪起，研究 Fourier 级数及其所构成的各种工具 (求和方法、算子等) 的各种收敛性，形成了分析数学中的一条热烈但困难的主线，吸引了包括许多著名数学家在内的学者进行研究.

因此，先简单地介绍 Fourier 级数点态收敛和几乎处处收敛方面的结果.

关于点态收敛，下面两个经典结果是熟知的.

定理 1.3(Dini 判别法)　设 $f \in L_{2\pi}$，记

$$\phi_x(f,t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}.$$

如果在 x 处 $\phi_x(f,t)/t$ 可积，则 $S_n(f,x)$ 在 x 处收敛于 $f(x)$.

定理 1.4(Dirichlet-Jordan 判别法)　设 $f \in L_{2\pi}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $S_n(f,x)$ 在 (a,b) 内每一点 x 处收敛于

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

8.2.2 小节将从不同的观点 (三角级数的系数条件) 出发，讨论一些点态收敛问题.

Fourier 级数的几乎处处收敛问题要复杂得多. 人们早就知道存在 $f \in C_{2\pi}$ 但其 Fourier 级数不处处收敛. 同时，也知道存在对任何 x 都不收敛的 Fourier 级数. 1913 年，Lusin 提出一个著名的猜想：若 $f \in L_{2\pi}^2$，即 $f(x)$ 平方可积，则其 Fourier 级数几乎处处收敛. 此后，许多数学家试图解决这个问题，但在一个长时期内，即使假设 $f \in C_{2\pi}$，也未能对此加以证明. 直到 1966 年，Carleson 才证实了 Lusin 猜想是正确的. 1968 年，Hunt 推广了 Carleson 的方法，证明当 $p>1$ 时，$f \in L_{2\pi}^p$ 含有其 Fourier 级数几乎处处收敛.

定理 1.5　设 $p>1$，$f \in L_{2\pi}^p$，则其 Fourier 级数几乎处处收敛.

定理 1.5 与本书主题没有联系，其证明极其复杂且极具技巧性，因此，不在本书中给出.

现在考虑三角级数 (Fourier 级数) 的一致收敛性和平均收敛性问题. 与前面讨论点态收敛与几乎处处收敛问题的着眼点不同 (人们考虑的是函数条件)，在一致收敛性和平均收敛性问题中，人们一直关心三角级数系数的单调递减条件最终的推广. 这类研究及相关讨论开始于英国学者 Chaundy 与 Jollife 在 1916 年的工作和 Young 在 1913 年的工作，产生了大量优秀的成果.

周颂平和其合作者一起从 2003 年开始研究这个课题, 最终证明了这个方向一个最终的推广是他们提出的 MVBV 条件 (均值有界变差条件), 而且这个条件本质上不能再进一步减弱. 这个成果构成了他们获得 2006 年浙江省科学技术奖一等奖的 (科学) 发现点之一.

同时, 在正弦级数的可积性和 L^1 收敛性的基础性研究中, 自从 Boas, Heywood 于 20 世纪 50 年代发表了关于单调系数的经典结论外, 一直未见进一步的推广工作出现. 最近, 我们研究发现, 通常的单调性条件的推广即使是拟单调性, 也不足以保证这个经典结论成立. 因此, 我们提出了一个确切的新条件 ——LBV 条件 (对数有界变差条件), 能够取代单调性条件, 推广了 Boas-Heywood 的经典定理, 并且这个条件本质上也不能进一步减弱.

这些方面的详细进展将在 1.3 节中叙述, 而在各个经典方向上的应用将在有关章节阐明.

下面除了在前面已经给出的概念、术语和符号外, 先给出整本专著其他通用的符号、定义及有关数学关系.

1.2 常用符号和定义

如果 $\omega(t)$ 是一个在 $[0,\infty)$ 上的递增函数, 并且对于任何 $a,b>0$ 都满足以下性质:

$$0=\omega(0)<\omega(a)\leqslant\omega(a+b)\leqslant\omega(a)+\omega(b)$$

以及 $\lim\limits_{t\to0+}\omega(t)=\omega(0)$, 则称之为一个连续性模函数.

当 $f\in C_{2\pi}$ 时, 对于实数 $\beta>0$, 定义其 β 阶光滑模为

$$\omega_\beta(f,t)=\sup_{|h|\leqslant t}\left\|\Delta_h^\beta f(x)\right\|:=\sup_{|h|\leqslant t}\left\|\sum_{v=0}^{\infty}(-1)^v\binom{\beta}{v}f(x+(\beta-v)h)\right\|,$$

其中

$$\binom{\beta}{v}=\begin{cases}\dfrac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-v+1)}{v!}, & v\geqslant1,\\ 1, & v=0.\end{cases}$$

当 β 是一个自然数 k 时, $\omega_k(f,t)$就是通常的 k 阶光滑模. 当 $k=1$ 时, $\omega_1(f,t)=\omega(f,t)$ 即为 $f(x)$ 的连续性模.

同样地, 记 $\omega(f,t)_{L^p}$ 是 L^p 范数下的连续性模.

以 $E_n(f)$表示 $f\in C_{2\pi}$ 的 n 阶最佳逼近. 对于 $p\geqslant1$, 以 $E_n(f)_{L^p}$表示 $f\in L^p_{2\pi}$ 的 n 阶最佳逼近.

以

$$K_n(x)=\sum_{v=0}^{n}D_v(x)=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)^2$$

表示 n 阶 Fejer 核, 以

$$V_{n,m}(f,x)=\frac{1}{n-m}\sum_{k=m}^{n-1}S_k(f,x),\quad n\geqslant m+1$$

表示 $f\in L_{2\pi}$ 的 (n,m) 阶 Vallee-Poussin 和. 特别地,

$$V_n(f,x)=V_{2n,n}(f,x)=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}S_k(f,x).$$

下面的函数表达式也是常用的,

$$\phi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin(n+k)x}{k}-\frac{\sin(n-k)x}{k}\right)=2\cos nx\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}.$$

全书总是以 $\log n$ 表示自然对数, 以 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

设 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ 都是正数列, $A_n=O(B_n)$ 指存在一个与 n 无关的常数 $M>0$, 使得 $A_n\leqslant MB_n$; $A_n=o(B_n)(n\to\infty)$ 是指 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n/B_n=0$; 而 $A_n\approx B_n$ 的意义是 $M^{-1}B_n\leqslant A_n\leqslant MB_n$ 成立; 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n/B_n=1$, 则表示成 $A_n\simeq B_n(n\to\infty)$; 类似地也有 $A(x)\simeq B(x)(x\to x_0)$ 的表示法.

全书总使用 M 或者 $M(x)$ 来表示一个正常数, 或者一个仅依赖于 x 的正常数, 其值在不同的场合未必相同. 但有时在特定的章节, 为了区别常数的需要, 也使用不同的符号, 如 C,K,M_1,M_2,M^* 等来表示.

此外, 各章内容所需要的特殊符号和定义将在有关章节给出.

1.3 单调数列集合及其各种推广

1.3.1 定义

非负单调递减数列 $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的定义是周知的：对于所有 $n=1,2,\cdots$, 总成立 $a_n\geqslant a_{n+1}\geqslant 0$, 则称这个数列为非负单调递减的, 记作 $A\in \mathrm{MS}$ (monotone sequences, MS).

非负数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为拟单调的, 如果对于某一 $\alpha\geqslant 0$, 数列 $\{a_n/n^{\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调递减的, 记作 $A\in \mathrm{QMS}$ (quasi-monotone sequences, QMS).