

# 图像恢复的全变分模型 及数值方法

石玉英 杨晓忠 常谦顺 著



科学出版社

013031833

TN911.73

82

# 图像恢复的全变分模型 及数值方法

石玉英 杨晓忠 常谦顺 著



科学出版社

北京



北航

C1636454

TN911.73  
82

## 内 容 简 介

本书从图像恢复的全变分模型入手,对已有的模型进行了改进,并对改进模型和旧模型分别进行理论分析(分析模型的稳定性、收敛性和解的存在唯一性),采用不同的离散格式、不同的数值方法(含 Split Bregman 方法、Lattice Boltzmann 方法和代数多重网格方法)来解相应的大型线性方程组.针对解决大型线性方程组非常有效的代数多重网格方法,从矩阵角度给出了简单的收敛性证明和误差分析,并进一步给出了插值算子的构造方法,给出了相应的收敛性证明和数值结果.本书的内容包含了作者和其他学者近年来的有关图像恢复的工作.

本书可供数学专业科研人员、大学教师使用,亦可供从事科学和图像处理问题研究的科研人员、研究生和高年级大学生参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

图像恢复的全变分模型及数值方法/石玉英,杨晓忠,常谦顺著. —北京:科学出版社,2013

ISBN 978-7-03-036161-5

I. 图… II. ①石… ②杨… ③常… III. ①图像恢复-研究 IV. ①TN911.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 293685 号

责任编辑:姚莉丽 / 责任校对:鲁 素

责任印制:阎 磊 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京佳艺恒彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2013 年 3 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2013 年 3 月第一次印刷 印张:12

字数:232 000

定价:39.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 前 言

图像恢复问题是图像处理中的一个重要研究领域,用全变分方法来研究图像恢复问题更是受到许多科学家和工程师的重视.本书介绍了以下几个方面独创性的科研成果:

第一,在应用广泛的 ROF 模型和 MO 模型的基础上,我们首先对两个模型的初值分别进行了预处理,使模型的收敛速度加快,计算量减少.之后对这两个模型分别进行了变形,提出了两个相应的新模型.理论上证明了模型黏性解的收敛性、稳定性和唯一性.数值试验中使用了改进信噪比这一指标来评价恢复效果的好坏,试验结果表明,我们的新模型分别比相应的旧模型的恢复效果好,计算迭代次数减少,计算时间减少.

第二,针对图像模糊过程中涉及的边界条件问题,在前人已提出的零边界条件、周期边界条件、反射边界条件和逆反射边界条件基础上,我们提出了新的中值边界条件,理论上证明了新边界条件的精度高,利用已有的模型和本书中提出的新模型对不同的图像进行数值试验,结果都表明,我们的中值边界条件比已有的边界条件恢复效果更好.

第三,数值试验中我们应用简单的显式离散格式和不动点方法对新旧模型进行了离散,形成了大型线性方程组.之后我们利用了简单迭代法、Krylov 加速方法和代数多重网格 (AMG) 对方程组进行了求解.使用不动点方法得到了大型线性方程组,理论上证明了利用代数多重网格方法解这种方程组的收敛性.

第四,针对  $TV-L^p(p=1)$  和  $TV-L^p(p>1)$  分别进行了讨论,发现  $TV-L^p(p>1)$  模型具有  $TV-L^1$  所不具有的特性:可以选取不同的 Lagrangian 参数,来区分尺度和灰度值不同的区域,而  $TV-L^1$  只具有尺度不变性.从理论和数值试验两方面验证了上述结论的正确性.

第五,ROF 模型在保持图像的非连续性和跳跃幅度方面比 LLT 模型好;而另一方面,LLT 模型在保持图像光滑性和细节方面比 ROF 模型好.然而,使用同一个模型,希望既保持图像的非连续性,又保持图像的光滑性看起来比较困难.我们提出一种新的组合模型,使得两种模型的优点可以得到有效的发挥.随后我们还考虑了 TV-Stokes 模型,结果显示此模型在恢复图像的同时,可以很好地保持边界.

第六,本书应用了当前被认为快速的 Split Bregman 方法<sup>[76]</sup>来对图像恢复问题进行处理.具体来说,是利用 Split Bregman 方法将非线性问题转化为线性问题,之后利用 AMG 方法来求解此线性系统,其中还应用了 Krylov 加速算法.当 AMG

方法被用于求解 Bregman 方法中的线性系统时, 需要添加一个稳定项来加速迭代过程. 从理论上严格证明了此线性项可以保持迭代方法的稳定性, 数值试验结果表明, AMG 和 Split Bregman 方法的结合是有效和快速的.

第七, 提出了一种新的 Lattice Boltzmann(LB) 格式来求解著名的 ROF 模型进行图像去噪. LB 方法的优势在于计算速度快并且极其容易地扩展到完全的并行程序. 另外还讨论了 LB 方法的线性稳定性. 数值试验结果显示 LB 方法是有效的和健壮的. 有时候虽然使用 LB 方法得到的恢复图像质量稍逊于 ROF 模型的恢复效果, 但是使用 LB 方法得到的恢复图像也是清晰的、令人满意的. 重要的是, LB 方法的计算速度远远快于 ROF 模型. 一般来说, LB 方法的 CPU 时间大约是 ROF 模型的十分之一.

第八, 针对代数多重网格方法, 我们从矩阵分解角度证明了代数多重网格方法的收敛性, 简化了证明过程, 并且新的收敛性定理包括了前几位研究者提出的不同插值公式的情况, 扩大了收敛性定理的应用范围. 为了保持系数矩阵的稀疏性, 应用了双重放弃原则, 同时给出了收敛性的证明定理. 同时对代数多重网格方法的误差进行了精确的分析. 随后, 我们提出了不同的插值算子来改进代数多重网格方法, 对各种类型的方程进行了各种改进方法的比较. 结果表明不同的插值算子具有不同的效果, 应该根据不同问题选取不同的插值算子来改进计算精确度和计算效率.

本书的出版得到了国家自然科学基金项目 (No. 10771065, No. 11271126)、北京市共建项目专项资助和华北电力大学基金资助, 谨此致谢.

图像恢复问题及其数值方法是一个庞大的研究领域, 即使是基于全变分方法的图像恢复问题, 本书也未完全涉及, 其中的疏漏、取舍不当、抑或谬误之处恐亦难免, 诚望读者批评指正.

石玉英 杨晓忠

华北电力大学

常谦顺

中国科学院数学与系统科学研究院

2012 年 9 月

# 目 录

## 前言

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| 第 1 章 绪论                        | 1  |
| 1.1 基于全变分方法的图像恢复模型              | 3  |
| 1.1.1 ROF 模型 ( $TV-L^2$ 模型)     | 5  |
| 1.1.2 $TV-L^p$ 模型               | 6  |
| 1.1.3 $TV-L^1$ 模型               | 6  |
| 1.1.4 $TV-G$ 模型                 | 7  |
| 1.1.5 $TV-F$ 模型                 | 8  |
| 1.1.6 $TV-Hilbert$ 模型           | 8  |
| 1.1.7 $TV-Stokes$ 模型            | 9  |
| 1.1.8 MO 模型                     | 10 |
| 1.1.9 LLT 模型                    | 11 |
| 1.2 基于全变分方法的图像恢复问题的偏微分方程模型的数值方法 | 11 |
| 第 2 章 ROF 模型的变形和中值边界条件          | 14 |
| 2.1 ROF 模型的变形                   | 14 |
| 2.1.1 PROF 模型和 PMO 模型           | 15 |
| 2.1.2 NROF 模型和 NMO 模型           | 16 |
| 2.2 中值边界条件                      | 16 |
| 2.2.1 零边界条件                     | 18 |
| 2.2.2 周期边界条件                    | 19 |
| 2.2.3 反射边界条件                    | 19 |
| 2.2.4 逆反射边界条件                   | 20 |
| 2.2.5 中值边界条件                    | 21 |
| 2.2.6 边界条件误差分析                  | 22 |
| 2.3 模型黏性解的收敛性、唯一性和稳定性证明         | 24 |
| 第 3 章 数值方法                      | 33 |
| 3.1 显式离散格式                      | 33 |
| 3.2 不动点方法                       | 36 |
| 3.3 代数多重网格法                     | 37 |
| 3.4 代数多重网格法解不动点方法形成的方程组的收敛性     | 41 |



|       |                              |     |
|-------|------------------------------|-----|
| 3.5   | Krylov 子空间加速方法               | 42  |
| 第 4 章 | 数值试验结果和比较                    | 43  |
| 4.1   | MO 模型显式离散格式试验                | 44  |
| 4.2   | PROF 和 PMO 模型显式离散格式试验        | 48  |
| 4.3   | ROF、MO 和 NMO 模型显式离散格式试验      | 50  |
| 4.4   | ROF 模型不动点方法试验                | 53  |
| 第 5 章 | 图像恢复的 $TV-L^1$ 模型            | 56  |
| 5.1   | $TV-L^1$ 模型的变形               | 56  |
| 5.2   | 数值试验                         | 57  |
| 5.2.1 | 参数的选取                        | 62  |
| 5.2.2 | 试验结果                         | 62  |
| 第 6 章 | 图像恢复的 $TV-L^p$ 模型            | 75  |
| 6.1   | $TV-L^p$ 模型的几何特性             | 75  |
| 6.2   | 最小值特性                        | 79  |
| 6.3   | 数值方法和结果                      | 83  |
| 6.3.1 | $TV-L^p$ 模型的增广 Lagrangian 方法 | 84  |
| 6.3.2 | 数值结果                         | 85  |
| 第 7 章 | 图像恢复的高阶模型                    | 89  |
| 7.1   | 数值试验                         | 92  |
| 7.2   | 试验结果和讨论                      | 92  |
| 7.3   | 试验结果比较                       | 93  |
| 7.3.1 | 二色图和四色图                      | 93  |
| 7.3.2 | 人脸图像                         | 97  |
| 7.3.3 | 具有几何结构的图像                    | 100 |
| 第 8 章 | 图像恢复的 $TV$ -Stokes 模型        | 103 |
| 8.1   | $TV$ -Stokes 去噪模型            | 103 |
| 8.1.1 | 第一步: 光滑切方向                   | 103 |
| 8.1.2 | 第二步: 恢复图像                    | 104 |
| 8.2   | 差分方程和基本算法                    | 105 |
| 8.2.1 | 中心差分格式                       | 105 |
| 8.2.2 | 第一步: 算子分裂技巧求解 Stokes 方程      | 106 |
| 8.2.3 | 第二步: 基于 AMG 不动点迭代方法求解非线性方程组  | 108 |
| 8.3   | 数值试验                         | 109 |
| 8.3.1 | 参数选择                         | 109 |
| 8.3.2 | 迭代停止准则                       | 110 |

---

|                                          |            |
|------------------------------------------|------------|
| 8.3.3 试验结果 .....                         | 110        |
| <b>第 9 章 Split Bregman 方法 .....</b>      | <b>114</b> |
| 9.1 结合 AMG 算法进行去噪 .....                  | 116        |
| 9.2 去噪的数值试验 .....                        | 117        |
| 9.3 收敛性分析 .....                          | 119        |
| 9.4 模糊算子和线性稳定项 .....                     | 120        |
| 9.5 去噪去模糊的数值试验 .....                     | 122        |
| <b>第 10 章 Lattice Boltzmann 方法 .....</b> | <b>125</b> |
| 10.1 LB 方法介绍 .....                       | 125        |
| 10.2 守恒律 .....                           | 127        |
| 10.3 微观 PDE .....                        | 128        |
| 10.4 线性稳定性 .....                         | 130        |
| 10.5 数值试验 .....                          | 131        |
| 10.5.1 二色图和四色图 .....                     | 132        |
| 10.5.2 Lena 脸图 .....                     | 134        |
| 10.5.3 几何结构图 .....                       | 136        |
| <b>第 11 章 代数多重网格方法 .....</b>             | <b>138</b> |
| 11.1 矩阵角度分析代数多重网格法的收敛性 .....             | 138        |
| 11.1.1 BILUM 和 AMG 的基本联系 .....           | 139        |
| 11.1.2 收敛性分析 .....                       | 140        |
| 11.1.3 误差矩阵分析 .....                      | 147        |
| 11.2 改进 AMG 算法 .....                     | 151        |
| 11.2.1 收敛性分析 .....                       | 157        |
| 11.2.2 基本收敛定理 .....                      | 157        |
| 11.2.3 新程序的收敛性证明 .....                   | 158        |
| 11.2.4 数值例子 .....                        | 162        |
| 11.2.5 结论 .....                          | 169        |
| <b>参考文献 .....</b>                        | <b>171</b> |
| <b>索引 .....</b>                          | <b>181</b> |



# 第1章 绪 论

正所谓“百闻不如一见”，在各种信息交换、保存、传递等过程中，图像、影像等对于人类来说，是最重要的手段。在最广泛的意义上，图像(image)也就是图片(picture)：即记录和表示可视信息的一种方式。图像处理(image processing)是一个比较宽泛的词语，在各种方式上的任何修正、提高图像都可称为图像处理。数字图像处理(digital image processing)即用计算机以及图形图像外围设备来处理图像的一门学科。因为可以获取人类在视觉上容易接受的多种媒体信息，所以图像处理在计算机应用的多个领域被广泛应用。具有代表性的应用有化学、航空、自动控制等领域中的系统响应的仿真；医学、生物、教育、艺术等领域的各种应用。由于对图像处理的要求在不断增加，图像的应用领域还在不断地扩大，因此对图像处理的理论也要不断地补充和发展。例如近来的形态学、混沌学和分维理论的引入就使图像处理技术更加丰富了。

人类最早的图像处理是光学的处理，如放大和缩小等，这些都属于模拟图像的处理。数字图像是把需处理的模拟图像数字化。数字图像处理大致可以分为二维图像处理和三维图像处理。本书主要介绍二维图像处理的主要方法和应用。数字图像中所谓的二维图像，通常如图 1.1 所示，在水平方向 ( $x$ ) 和垂直方向 ( $y$ ) 上，按照某个幅值单位将其分割成许多正方形的方格，在方格中填入相应的值，就得到一个点集合。这个点集合就可以表示文字、线和图像。一般情况下，在被划分后的各个

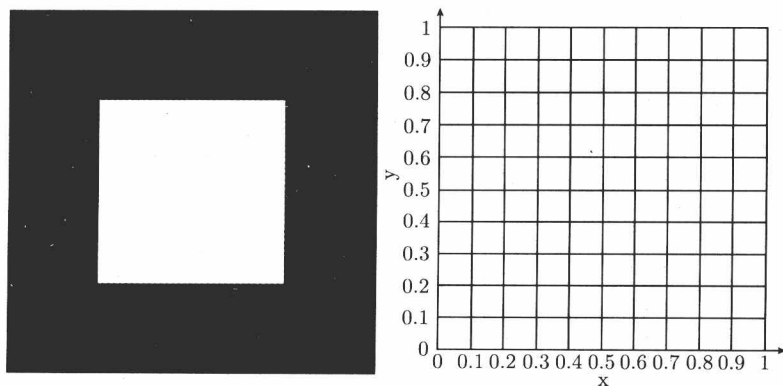


图 1.1 连续图像在二维坐标系下的离散化

区域, 水平方向确定了从左到右排列的所在列位置上的值, 垂直方向确定了从上到下 (或者是从下到上) 排列的所在行位置上的值, 水平方向上  $x$  的值和垂直方向上  $y$  的值定义为坐标. 这时, 被分割成的每个小方格称为像素(pixel). 在整个画面上, 即水平方向和垂直方向的像素个数的乘积称为该图像的像素总数, 或者在显示时称为分辨率. 分辨率选择合适后, 才能表示清晰的图像; 否则, 可能遗漏细节, 输出模糊图像.

一般情况下, 以像素为单位描述的图像称为数字图像, 也称为位图 (栅格图). 在数字图像上, 将各个像素点的亮度作为其灰度, 用灰度值来描述. 所谓的灰度级, 是指在显示图像时, 将最暗像素点的值到最亮像素点的值的区间, 分成若干个级别, 然后对亮度用某种码字来进行表示. 灰度级是以位 (bit) 为单位来描述的. 处理数字图像时, 实际上编辑的是各点上的像素而不是图像本身.

图 1.1 中的 8bit 灰度图利用 Matlab 中的命令  $A=\text{imread}('filename')$ , 即可得到矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 255 & 255 & 255 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

图像处理在数学上主要从三个角度来进行了研究: 偏微分方程、概率统计和小波分析. 文献 [111] 是将偏微分方程用于图像处理的最早工作之一. 这一工作有着深远的影响, 它刺激了基于偏微分方程的图像分析的数学研究并导致了有关方法在各种反问题上的发展. 从偏微分方程 (Partial Differential Equation, PDE) 角度研究图像处理有它本身的优点:

1. PDE 本身的局部性. 图像一般有许多局部特征, 全局特征如频率(在稳定的信号处理中应用广泛) 不太容易清楚地描述图像. 因此线性方法不能达到处理图像所需要的特性, 自适应的非线性方法就应运而生了.

2. PDE 的发展历史决定了它广泛而坚实的理论基础, 可以直接拿来使用, 其中包括某些解的收敛性、稳定性和唯一性证明 (尤其对凸模型).

3. 基于 PDE 的已经发展成熟的数值计算方法.

4. 数值方法的程序包简单精密, 理解容易.

5. 易于利用拉普拉斯算子、散度算子和梯度算子推广到高维空间.

6. 最重要的原因是它的工程性, 基于 PDE 的程序保持了图像的结构和信息.

## 1.1 基于全变分方法的图像恢复模型

图像处理的内容涉及图像去噪、图像恢复、图像压缩、图像分割、图像增强、图像分解、边缘检测和特征提取等. 本书主要讨论图像恢复方面的问题. 图像恢复技术是图像处理领域一类重要的处理技术, 与图像增强等其他基本图像处理技术类似, 该技术也是以获取视觉质量得到某种程度改善为目的的, 所不同的是, 图像恢复过程需要根据指定的图像退化模型来完成, 根据这个退化模型对在某种情况下退化或恶化了的退化图像进行恢复, 以获取到原始的、未经过退化的原始图像. 换句话说, 图像恢复的处理过程实际是对退化图像品质的提升, 并通过图像品质的提升来达到图像在视觉上的改善.

传统的解决图像恢复问题的方法主要有最小二乘法、傅里叶变换法和其他  $L^2$  范数逼近法. 现在从人工神经网络角度研究图像恢复问题也有很大进展. 逆滤波和维纳 (Wiener) 滤波两种算法对退化图像的恢复实现在早期也有不少的应用. 因为图像最大的特点就是不稳定特性, 图像一般有局部特性, 不容易被全局特征量如频率来表示, 因此线性方法有其限制性, 必须考虑非线性方法来解决图像恢复问题. 全变分图像恢复模型是基于一个变分问题得来的, 变分问题就是在某个限制条件下求某个全变分范数的最小值.

本书主要考虑二维灰度图像(也就是说图像的灰度值为  $0 \sim 255$ ), RGB 图像可以看作三维的灰度图像, 那么假设在矩形区域  $\Omega \subset R^2$  内考虑图像, 在没有误解的情况下, 本书使用  $x$  作为区域中的任何一点. 对图像进行恢复处理通常需要根据一定的图像退化模型来进行, 一个简单的通用图像退化模型可将图像的退化过程模型转化为一个作用在原始图像  $f(x)$  上的退化系统  $H$ , 作用结果与一个加性噪声  $r(x)$  的联合作用导致产生出了退化图像  $f(x)$ , 表现成数学形式为

$$f(x) = H[u(x)] + r(x). \quad (1.1.1)$$

而退化系统一般假设为模糊造成的, 假设  $k$  是模糊算子, 那么  $H[u(x)] = k * u(x)$ ,  $*$  代表卷积的意思. 当  $k$  为未知的情况下, 称这种问题为盲卷积问题. 本书不讨论这种问题, 也就是说本书总是假设模糊的过程是已知的. 并且还假设模糊算子为线性的并且具有空间不变性, 即这种模糊是和位置没有关系的 (模糊图像在各个位置看起来是一样的). 对于空间变化的模糊算子来说, 可以简单地用空间不变的模糊算子来逼近此空间变化模糊算子<sup>[103]</sup>.

在图像传输、测量等多种因素影响下, 可以形成多种噪声  $r(x)$ , 包括有规律的和无规律的. 本书所讨论的噪声为可加的高斯白噪声, 即  $r$  在每一个点  $x$  的值  $r(x)$  是独立的随机变量, 并且满足平均值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的高斯分布. 那么 (1.1.1) 式可

以记作  $f(x) = k * u(x) + r(x)$ , 需要根据  $f(x)$ ,  $k$  和  $r(x)$  来重构  $u(x)$ . 另外还将考虑椒盐噪声和 Laplace 噪声 (即噪声满足 Laplace 分布). 在一般的实际问题,  $k$  和  $r(x)$  是不可能知道的, 只能根据  $f(x)$  的信息和得到图像的途径、方法利用统计的工具预测关于  $k$  和  $r(x)$  的信息, 再求  $u(x)$ .

本书主要基于全变分方法得到相应的偏微分方程模型, 通过求解方程, 得到所希望的接近原图像的解. 为了研究模型性质方便, 一般假设  $u(x), r(x)$  均为连续函数 (实际数字图像中每个像素的值是离散和有限的). 一些研究者在 20 世纪 90 年代主要研究无模糊的情况 (也就是  $k = 1$  的情况):  $f(x) = u(x) + r(x)$ . 我们也可以把根据  $f(x)$  求  $u(x)$  的过程看作是图像分解为  $u(x)$  和  $r(x)$  的过程, 当然此时的  $u(x)$  不是原图像, 只是接近于原图像, 通常把  $u(x)$  称为图像的光滑 (cartoon) 部分, 而  $r(x)$  也不是原来所称的噪声, 被称为图像的振荡部分 (包含纹理(texture)和噪声). 下面为了书写方便, 一般就把  $u(x), f(x), r(x)$  记为  $u, f, r$ . 要把图像  $f$  分解为  $u + r$ , 可以通过求解能量最小值问题:

$$\inf_{(u,r) \in X_1 \times X_2} \{J(u) + \lambda H(r) : f = u + r\}, \quad (1.1.2)$$

其中  $J(u), H(r)$  为非负函数, 函数空间  $X_1 = \{u : J(u) < \infty\}, X_2 = \{r : H(r) < \infty\}$ . 假设  $f \in X_1 + X_2$ , 常数  $\lambda > 0$  为协调常数, 来协调  $J(u), H(r)$  之间的权重. 通常  $J(u), H(r)$  为函数空间的范数或半范数 (即  $J(u) = \|u\|_{X_1}, H(r) = \|r\|_{X_2}$ ), 对应的恢复模型称为  $(X_1, X_2)$  模型. 针对  $J(u)$  和  $H(r)$ , 可以给出不同的定义. 对  $J(u)$  的不同定义有:

Rudin 等<sup>[116]</sup> 首先使用了 BV 半范数:

$$J(u) = \|Du\| := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx : \varphi \in C_0^1(\Omega)^2, \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}, \quad (1.1.3)$$

其中  $BV(\Omega)$  表示在区域  $\Omega$  上的有界变分函数空间.

**定义 1.1.1** 假设有界开集  $\Omega \subset R^2$ , 函数  $u \in L^1(\Omega)$ , 那么  $BV(\Omega)$  即被定义为  $BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) : \|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + \|Du\| < \infty \right\}$ .

在本书中, 我们将采用普通的  $J(u)$  定义 (也称为全变分)

$$TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx,$$

其中  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ . 有关 TV 和 BV 空间的更多理论分析, 请参阅文献 [9, 40, 74, 102].

具体计算过程中, 为了避免  $|\nabla u|$  等于 0, 全变分的逼近格式经常被采用:

$$J_{\beta}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta} dx, \quad (1.1.4)$$

其中  $\beta > 0$  为一个比较小的常数. 因为要对  $J_\beta(u)$  求微分, 这样的逼近格式可以简化数值计算, 并且在某些情况下, 可以避免阶梯影响. 这种形式被许多研究者所使用, 现在应用仍然很广.

其他也有不同的变形, 如 TV 范数的一般形式:

$$J(f) = \int_{\Omega} G(\nabla u) dx, \quad (1.1.5)$$

其中  $G: R^2 \rightarrow R^+$  为连续的函数<sup>[102]</sup>, 比较特殊的有 TV 范数的幂形式:  $J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx$ , 当  $q$  值较大时, 上述范数不利于保持图像的边缘, 特殊地, Tikhonov 正则化采用的是  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  ( $q = 2$ ). 相反,  $q$  值比较小时, 可以较好地保持图像的边缘, 但是计算会相当困难. 另外, 有界变分的导数形式如下:

$$J(u) = \int_{\Omega} \varphi(u, \nabla u, D^2 u) dx, \quad (1.1.6)$$

其中  $D^2 u$  表示  $u$  的 Hessian 矩阵, 函数  $\varphi: R \times R^2 \times R^{2 \times 2} \rightarrow R_+$ , 详细内容请参考文献 [39, 83].

本书将只考虑高斯模糊. 高斯模糊具有对称性, 那么在求解对应的 Euler-Lagrange 方程的时候, 形式上相对来说容易一些. 针对  $J(u) = \text{TV}(u)$ , 空间  $X_2$  也可以有不同变形. 下面介绍几种不同的模型.

### 1.1.1 ROF 模型 (TV- $L^2$ 模型)

标准的 Rudin-Osher-Fatemi (ROF) 模型<sup>[116]</sup> 中使用了

$$H(r) = \frac{1}{2} \|r\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |r|^2 dx. \quad (1.1.7)$$

对于有模糊和噪声的情况,  $r = f - k * u$ , 再根据 (1.1.2), 我们需要解决无限制条件的最小化问题

$$\min_u \int_{\Omega} \left[ |\nabla u| + \frac{\lambda}{2} (f - k * u)^2 \right] dx, \quad (1.1.8)$$

下面我们将省略推导 Euler-Lagrange 方程的过程. 它对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$0 = -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda k * (k * u - f), \quad (1.1.9)$$

其中参数  $\lambda$  为大于零的常数.

因为当  $\nabla u = 0$  时, (1.1.9) 没有定义, 所以我们在全变分函数上加一个小扰动项, 就把全变分函数变成了

$$\int_{\Omega} |\nabla u|_{\beta} dx = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta} dx. \quad (1.1.10)$$

参数  $\beta$  称为正则参数, 通常为比较小的正数. 另外, Q. Chang 等<sup>[42]</sup> 提出, 我们可以选择正的最小的机器数  $\beta = 10^{-32}$ .

如果引入时间参数  $t$ , 函数  $u(x)$  可以记为  $u(x, t)$ , 为了方便, 我们仍然用  $u$  来表示. 那么依赖于时间的 ROF 模型为

$$u_t = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda k * (k * u - f), \quad (1.1.11)$$

使用  $u(x, 0)$  为初始值 (即把原始的模糊噪声图像  $u_0$  也就是观察图像  $f$  作为迭代初始值), 一致 Neumann 边界条件. 这个模型可以很好地保持边界, 所以很多研究者使用这个模型进行了图像恢复问题的研究.

### 1.1.2 TV- $L^p$ 模型

TV- $L^p$  模型的最小化问题为

$$\min_u \int_{\Omega} \left( |\nabla u| + \frac{\lambda}{p} (f - k * u)^p \right) dx. \quad (1.1.12)$$

当  $p > 1$  时, 上述模型为凸的, 那么依赖于时间的 TV- $L^p$  模型为

$$u_t = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda k * (k * u - f)^{p-1}, \quad (1.1.13)$$

使用  $u(x, 0)$  为初始值 (即把原始的模糊噪声图像  $u_0$  也就是观察图像  $f$  作为迭代初始值), 一致 Neumann 边界条件.

当  $0 < p < 1$  时, 依赖于时间的 TV- $L^p$  模型为

$$u_t = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda k * \frac{k * u - f}{(k * u - f)^{1-p}}, \quad (1.1.14)$$

使用  $u(x, 0)$  为初始值 (即把原始的模糊噪声图像  $u_0$  也就是观察图像  $f$  作为迭代初始值), 一致 Neumann 边界条件. 我们将在第 6 章中详细分析一下此模型.

### 1.1.3 TV- $L^1$ 模型

考虑  $k = 1$  的情况<sup>[35, 37]</sup>, 也就是  $r = f - u$ , 那么需要解决的最小值问题为

$$\min_u \int_{\Omega} \left( |\nabla u| + \frac{\lambda}{2} |f - u| \right) dx. \quad (1.1.15)$$

因为问题 (1.1.15) 为凸的, 但并不是严格凸的, 所以局部最小值不是唯一的. 这一点已经在文献 [37] 中有比较详细的讨论. 对应的依赖时间  $t$  的偏微分方程模型为

$$u_t = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda k * \frac{k * u - f}{\sqrt{(k * u - f)^2 + \delta}}, \quad (1.1.16)$$

使用  $u(x, 0)$  为初始值 (即把观察图像  $f$  作为迭代初始值), 一致 Neumann 边界条件,  $\delta > 0$  为比较小的常数.

#### 1.1.4 TV-G 模型

Y. Meyer 在文献 [102] 中提到了可以包含振荡幅度比较大的函数空间  $G$ , 定义如下.

**定义 1.1.2**  $G$  是巴拿赫空间,

$$G = \{r | r = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = \operatorname{div}(w), f_1, f_2 \in L^\infty\},$$

定义空间  $G$  的范数:

$$\begin{aligned} \|r\|_G &= \inf \{ \|w\|_{L^\infty} | r = \operatorname{div}(w), w = (f_1, f_2), f_1 \in L^\infty, f_2 \in L^\infty, \\ &\quad |w(x)| = \sqrt{(|f_1|^2 + |f_2|^2)(x)} \}. \end{aligned}$$

因为  $r \in G$ , 所以图像恢复模型就是

$$\inf_u \left\{ \int |\nabla u| + \lambda \|r\|_*, f = u + r \right\}.$$

上述模型不宜求解, 那么就有了逼近上述模型的一个模型<sup>[146]</sup>:

$$\inf_{u, f_1, f_2} \left\{ \int |\nabla u| + \lambda \int |f - u - \partial_x g_1 - \partial_y g_2|^2 dx dy + \mu \left[ \int \left( \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \right)^p dx dy \right]^{\frac{1}{p}} \right\},$$

其中  $\lambda, \mu$  为大于零的协调常数,  $p \rightarrow \infty$ .

针对上述模型, 给出了相应的 Euler-Lagrange 方程:

$$\begin{aligned} u &= f - \partial_x g_1 - \partial_y g_2 + \frac{1}{2\lambda} \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), \\ \mu (\|\sqrt{f_1^2 + f_2^2}\|_p)^{1-p} (\sqrt{f_1^2 + f_2^2})^{p-2} f_1 &= 2\lambda \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u - f) + \partial_{xx}^2 f_1 + \partial_{xy}^2 f_2 \right], \\ \mu (\|\sqrt{f_1^2 + f_2^2}\|_p)^{1-p} (\sqrt{f_1^2 + f_2^2})^{p-2} f_2 &= 2\lambda \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u - f) + \partial_{xy}^2 f_1 + \partial_{yy}^2 f_2 \right]. \end{aligned}$$

记外边界法向量为  $(n_x, n_y)$ , 那么相应的边界条件为

$$\begin{aligned} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} (n_x, n_y) &= 0, \\ (f - u - \partial_x g_1 - \partial_y g_2) n_x &= 0, \\ (f - u - \partial_x g_1 - \partial_y g_2) n_y &= 0. \end{aligned}$$



计算试验得知  $p = 1$  时, 在每一步迭代中计算速度比较快.

### 1.1.5 TV-F 模型

空间  $F = \text{div}(BMO)$  是首先由 H. Koch 等<sup>[90]</sup> 提出来研究 Navier-Stokes 方程的. TV-F 模型对应的 Euler-Lagrange 方程<sup>[92]</sup>:

$$\begin{aligned}
 & -\text{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - 2\mu(f - u - \Delta P) = 0, \\
 & -2\mu\Delta(f - u - \Delta P) - \frac{\lambda}{|B_1|} \left[ \partial_x \left( \frac{P_x - P_{x,B_1}}{|P_x - P_{x,B_1}|} H_\epsilon(\phi_1) \right) \right] \\
 & + \frac{\lambda}{|B_1|^2} \left( \int \frac{P_x - P_{x,B_1}}{|P_x - P_{x,B_1}|} H_\epsilon(\phi_1) \right) \partial_x H_\epsilon(\phi_1) \\
 & - \frac{\lambda}{|B_2|} \left[ \partial_y \left( \frac{P_y - P_{y,B_2}}{|P_y - P_{y,B_2}|} H_\epsilon(\phi_2) \right) \right] \\
 & + \frac{\lambda}{|B_2|^2} \left( \int \frac{P_y - P_{y,B_2}}{|P_y - P_{y,B_2}|} H_\epsilon(\phi_2) \right) \partial_y H_\epsilon(\phi_2) = 0,
 \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

边界条件为

$$\begin{aligned}
 & \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \mathbf{n} = 0, \\
 & (f - u - \Delta P)n_x = 0, (f - u - \Delta P)n_y = 0, \\
 & (\nabla(f - u - \Delta P)) \cdot \mathbf{n} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

T. Le 等<sup>[92]</sup> 对 TV-G 模型和 TV-F 模型进行了计算比较, 得出两个模型计算的结果基本相同, TV-G 模型收敛到平衡态的速度要慢些.

### 1.1.6 TV-Hilbert 模型

这种模型<sup>[12]</sup> 的最小值问题可以记作:

$$\inf_{(u,r) \in (BV \times \mathcal{H}) / f=u+r} \left\{ \int |\nabla u| + \lambda \|r\|_{\mathcal{H}}^2 \right\}, \tag{1.1.19}$$

其中  $\mathcal{H}$  为某个 Hilbert 空间. 当  $\mathcal{H} = L^2$  的时候, 模型就是 TV- $L^2$  模型. 另外有  $(BV, H), (BV, H^{-1}), (BV, H^{-s}), \dots$  的分解模型, 对应的范数被定义为

$$\begin{aligned}
 \|u\|_H &= \|\nabla u\|_{L^2}, \\
 \|u\|_{H^{-1}} &= \sqrt{\langle -u, \Delta^{-1}u \rangle_{L^2}}, \\
 \|u\|_{H^{-s}} &= \int (1 + |\xi|^2)^s \hat{u} \bar{\hat{u}} d\xi.
 \end{aligned}$$

对  $(BV, H^{-s})$  模型, 相应的 Euler-Lagrange 方程<sup>[96]</sup> 为

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda K * \left( 2\operatorname{Re} \left\{ \mathfrak{F} \left( \frac{\hat{u} - \bar{K}u}{(1 + |\xi|^2)^s} \right) \right\} \right) &= 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \\ u &= 0, \quad \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 外.} \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

针对  $TV-H^{-1}$  模型, 相应的偏微分方程模型<sup>[112]</sup> 为

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{2\lambda} \Delta \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right] - (u - f), \\ u(\mathbf{x}, 0) &= f, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \frac{\partial \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

### 1.1.7 TV-Stokes 模型

ROF 模型具有计算复杂和恢复图像具有阶梯结果的缺陷, 也就有了 ROF 的改进模型<sup>[97, 112]</sup>. Tai 等<sup>[114]</sup> 提出了一种两步法, 这里我们记为 RTO 方法. 第一步建立关于切向量  $\tau$  的能量函数, 其 Euler-Lagrange 方程可以类比于一个 Stokes 方程, 然后通过求解这个方程得到切方向; 第二步根据切方向建立极小化泛函, 找到匹配于切方向的图像  $u$ .

令法向量  $\mathbf{n} = \nabla u = (u_x, u_y)^T \triangleq (v, w)$ , 切向量  $\tau = \nabla^\perp u = (u_y, -u_x)^T \triangleq (w, -v)$ . 关于切向量  $\tau$  的能量函数为

$$\min_{\tau} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \tau| dx + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |\tau - \tau^0|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot \tau dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \tau)^2 dx \right\}, \quad (1.1.22)$$

其中参数  $\lambda > 0, \delta > 0, \gamma > 0$ . 因为  $\nabla \tau = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}$ , 那么

$$|\nabla \tau| = \sqrt{\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2}.$$

实际上就是矩阵  $\nabla \tau$  的  $F$  范数.