随机最优控制及其在保险中的应用

张景肖 著

科学出版社

随机最优控制及其在保险中的应用

张景肖　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

随机最优控制理论是控制论的一个重要分支，而保险公司如何选择最优的经营策略来达到预期的经营目标是一类非常重要的随机最优控制问题，这类问题对随机控制理论的发展也具有重要的推动作用. 本书首先介绍了随机最优控制的基础理论；之后介绍了这些理论在保险公司选择最优投资、再保险以及分红等策略时的应用；最后介绍了作者及合作者最新的一些研究成果，这些成果主要考虑了在一些务实因素比如卖空、借贷等限制下的保险公司最优经营策略问题.

本书可为相关研究人员及从业人员学习随机控制理论及其在保险中的应用问题提供参考.

图书在版编目(CIP)数据

随机最优控制及其在保险中的应用/张景肖著. —北京：科学出版社，2013. 2

ISBN 978-7-03-036575-0

Ⅰ.①随… Ⅱ.①张… Ⅲ.①最佳控制-应用-保险业务-研究

Ⅳ.①F840.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 018754 号

责任编辑：李 欣／责任校对：鲁 素

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 2 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2013 年 2 月第一次印刷 印张：13 1/2

字数：262 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

最优控制问题在自然科学和社会生活的各个领域都非常常见, 它的通常描述是: 对于一个用来描述现实世界的动力系统, 寻求最优的控制策略从而可以实现某个目标, 这个目标通常是使得某个感兴趣的量达到最大或者最小. 例如物理学中的熵、生产中的成本或者利润等. 鉴于现实世界中充满了随机干扰, 随机动力系统成为了动力系统领域内非常重要的研究领域. 随机动力系统的最优控制即所谓的随机最优控制问题在近年来得到了很多研究人员的重视并已经取得了丰硕的成果. 在这个过程中, 大量来自数理金融和保险精算领域的随机控制问题为该领域的发展起到了重要的推动作用. 特别地, 保险精算中有一类非常重要的问题即保险公司如何选择最优的经营策略来达到预期的经营目标, 随机控制理论几乎可以看做是为这些问题“量身打造”的理论. 而同时这些问题也反过来促进了随机控制理论的发展. 随机最优控制在保险中的应用, 或者说是保险中的随机最优控制问题成为了一个非常重要的研究领域. 这一领域开始得到迅速发展是在 20 世纪 90 年代, 从那时起, 随机控制理论开始被广泛深入地应用于保险精算领域, 并迅速发展成为研究保险问题的主要工具之一. 关于最优投资、最优再保险和最优红利分配策略的选择近来成为随机控制和保险精算学中的热点问题. 随着研究的逐步深入, 越来越多的从实际出发的因素被考虑进来, 比如: 交易费用、税收、随机利率、Solvency II 等各种法规的规定、金融市场中的一些实际限制因素如不许卖空等, 使得模型结果对实际更具指导意义, 但同时也增加了模型建立和模型求解的难度.

本书考虑的随机动力系统是一个随机过程 $\{X^u(t)\}$, 它被 $u=u(t)$ 控制, 通常对控制过程 $u(t)$ 有一定要求, 比如可容许性等. 在给定系统的初始状态 x 之后, 在一个可容许的控制过程 $u(t)$ 作用下, 动力系统 $\{X^u(t)\}$ 发生动态的变化. 通常不同的初始状态 x 和控制过程 u 会使动力系统有不同的表现. 考虑一个相应的回报函数 $V^u(x)$, 这个回报依赖于系统的表现, 受到 x 和 u 的影响. 最优控制问题就是去寻找一个最优的策略 u^*, 使得在 u^* 控制下, 回报函数达到最大即 $V^{u^*}(x)=V(x):=\sup\limits_u V^u(x)$, $V(x)$ 称为值函数. 这一问题实际上包含了两个相联系的问题: 一是值函数 $V(x)$ 是什么; 二是最优策略 u^* 是否存在, 如果存在, 是什么策略.

求解值函数和最优策略常用的方法有动态规划原理、极大值原理以及近期发展起来的凸对偶鞅方法等. 动态规划原理是将最优控制问题与一个偏微分方程联系起来, 此方程称为 Hamilton-Jacobi- Bellman (HJB) 方程; 随机极大值原理自 Pontryagin 非随机情况下的极大值原理发展而来, 通常在倒向随机微分方程（BSDE）框架下描述; 而凸对偶鞅方法是结合了凸分析和随机分析的一种方法. 本书中主要介绍第一种方法. 在动态规划原理中, 主要的问题有两个: 一是如果 HJB 方程可解, 要证明这个解确实是值函数, 称为验证定理; 二是证明 HJB 方程可解. 相对来说后者更难解决一些. HJB 方程可能的解都要满足一定的光滑性, 而当值函数不具有此种光滑性时, 验证定理就没有意义了. 为此 HJB 方程黏性解的概念被引入, 它只需具备连续性即可. 黏性解理论在数理金融领域的随机最优控制问题中具有非常重要的应用, 但本书中将不会对黏性解做过多的介绍.

保险中的随机控制问题诸如最优投资-再保险、最优分红策略等问题的研究成果非常丰富, 这在本书正文中有比较详细的介绍. 对这些内容的总结可以参见 Hanspeter Schmidli 非常有影响的专著 [104]. 在针对保险公司的随机最优控制问题的研究, 深入研究的趋势之一是从实务角度出发构建更符合现实情况的模型以使模型更具实际意义. 作者及其合作者近来在一些实务元素如卖空和借贷限制、红利分配效应等限制条件下的最优投资、再保险和红利分配策略等问题中已经取得了一定的研究成果, 将作为本书的主要内容来介绍.

为了读者阅读方便, 本书的结构如下: 第 1 章将把本书需要的随机过程和随机分析的基础理论作一个概要的介绍, 包括一些必要的概念和结论, 但限于篇幅, 忽略证明过程. 第 2 章对一般的随机最优控制问题进行一个概括的介绍, 包括三种典型情况: 离散时间模型、连续时间扩散模型和连续时间跳扩散模型. 除了一般的理论结果之外, 将简要介绍一些相关数值求解方法. 在证明的叙述上, 作者多采用启发式的做法而不追究严格的细节. 第 3 章介绍保险精算领域内几类典型的随机最优控制问题, 包括最优再保险、最优投资以及最优分红策略等问题. 第 2、3 章的内容选择和编排主要借鉴了 H.Schmidli[104] 的做法. 第 4 章介绍在卖空和借贷限制下的最优投资-再保险问题, 对于两种不同的再保险形式考虑了最优的策略. 第 5 章介绍在有红利分配效应的情况下保险公司的最优红利分配问题, 首先给出了一个红利分配效应的概念, 在其影响下红利应如何分配才能使保险公司的经营达到最优的目标是本章的研究内容. 最后一章介绍了最优的再保险-红利分配问题. 后三章的内容是作者及合作者近些年的研究成果的一部分.

本书的写作和出版得到了中央高校基本科研业务费专项资金和中国人民大学科研基金 (项目编号 11XNI008) 的资助. 在写作过程中, 作者所在研究团队的张波教授、刘圣博士、曹凯同学等给予了大力的支持和帮助, 在此深表谢意. 另外还要感谢中国人民大学应用统计研究中心对本书写作和出版方面的帮助.

鉴于作者水平有限, 书中难免有不当之处, 敬请读者批评指正.

目　　录

第 1 章　随机过程与随机分析基础

随机过程和随机分析的很多基础理论是本书后面章节的基础, 虽然这些内容在其他随机过程或者随机分析的书中都可以找到, 但是为了阅读本书方便, 第 1 章首先对这些相关内容作一个系统而又概括的介绍. 为节省篇幅, 本章一般只罗列一些结论, 并不详细给出证明, 但是一般会给出相关证明所在的参考文献. 熟悉这些基础知识的读者可跳过本章.

1.1　随机过程一般理论

要描述一个随着时间发展变化的随机现象, 可以考虑使用一族随时间不断变化的随机变量, 这就是随机过程. 本书中涉及的随机过程, 在不做特殊说明的情况下, 都假定它是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上.

定义 1.1.1　I 是一个非空集合, $X = \{X(t,\cdot); t \in I\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上, 取值在一个可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 的一族随机变量, 称 X 是一个参数取值于指标集 I 的随机过程. 通常 I 可取为 $\mathbb{R}^+$, $[0,T]$ 或者 $\mathbb{N}$ 等. 当 I 为 $\mathbb{R}^+$ 或者 $[0,T]$ 时, 称 X 为连续随机过程; 当 I 取值为 $\mathbb{N}$ 时, 称 X 为离散随机过程或者随机序列. 对任意的 $\omega \in \Omega$, $t \to X(t,\omega)$ 称为随机过程的轨道.

在本书中, 一般取 $(E, \mathcal{E})$ 为装备了相应 Borel σ 代数的 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{R}^d$. 另外, 本书考虑的随机过程如果不做特殊说明, 其轨道都是右连续有左极限的, 称这类过程为右连左极过程.

定义 1.1.2　两个过程 X, Y 称为无区别的, 如果

$$X(t,\omega) = Y(t,\omega), \qquad \forall t$$

对几乎所有 ω 成立, 也就是说, 两个无区别的过程几乎所有的轨道重合. 从而, 如果一个过程的轨道几乎都是右连续有左极限的, 它就和一个右连左极的过程无区别, 也可以看做是右连左极的.

定义 1.1.3　两个过程 X, Y 称为互为修正的, 或者随机等价的, 如果 $\forall t$,

$$X(t,\omega) = Y(t,\omega).$$

两个随机等价的过程 X, Y 不一定会无区别, 因为虽然对于任何一个固定的时刻 t, 除掉一个零测集之外, $X(t,\omega) = Y(t,\omega)$, 但是这个零测集是依赖于时刻 t 的.

由此只可以推出 X, Y 具有相同的有限维分布, 但是它们的轨道可以有极大差别, 例子请参见文献 [118] 例 2.4.

对于随机过程的研究通常还要考虑随时间变化而不断增加的信息, 这些信息可以用一族递增的 σ- 代数 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ 来表示. 所谓单增的意思是指, $\forall s \leqslant t, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. $\{\mathcal{F}_t : t \in I\}$ 称为一个流, 并称 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 为装备了流的概率空间. 此外在本书中, 还假定 $\{\mathcal{F}_t : t \in I\}$ 是右连续的, 即 $\forall t \in I, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, 其中 $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$. 任给一个 σ- 代数流 $\mathcal{F}_t$, 只要取 $\mathcal{F}_{t+}$ 来代替 $\mathcal{F}_t$, 就可以使得 σ- 代数流右连续化.

如果一个 σ- 代数流满足递增性、右连续性以及完备性 (指的是 $\mathcal{F}_0$ 中包含 $\mathcal{F}$ 中所有的 P- 零测集), 则称它是满足通常条件的.

给定一个随机过程 $X(t,\omega)$, 可以考虑由其生成的自然 σ- 代数流 $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{\sigma(X_s, s \leqslant t) \cup \mathcal{N}\}, t \in I, \mathcal{N}$是$\mathcal{F}$中$P$零集全体. 这个 σ- 代数流可以理解为随着时间的推移, 从过程 X 所能导出的所有信息.

给定 σ- 代数流 $\mathcal{F}_t, t \in I$, 可以定义

$$\mathcal{F}_{t-} := \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s = \sigma(\cup_{s<t} \mathcal{F}_s),$$

$$\mathcal{F}_{\infty} := \bigvee_{s<\infty} \mathcal{F}_s = \sigma(\cup_{s<\infty} \mathcal{F}_s).$$

如果 $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, 则称它是连续 σ- 代数流.

定义 1.1.4　称过程 $X = \{X(t,\cdot); t \in I\}$ 适应的, 如果对任意的 $t \in I$, 有 X_t 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测.

显然, X 关于它的自然 σ- 代数流 $\mathcal{F}_t^X$ 是适应的.

适应性是一个重要的概念, 它的含义是: 过程在任意时刻 t 时的取值由在 t 时刻已经掌握的信息 $\mathcal{F}_t$ 决定.

定义 1.1.5 (循序可测)　一个过程 $X(t)$ 称为是循序可测的, 如果对任意 $t \in \mathbb{T}$, 映射 $(s,\omega) \to X_s(\omega)$ 在 $[0,t] \times \Omega$ 上是关于 $B([0,t]) \times \mathcal{F}_t$ 可测的.

在随机过程的研究中, 除了考虑它在一个确定时刻 t 的取值外, 还经常要考虑它在某些随机时刻的表现. 随机时刻的例子有很多, 比如某种资产价格达到某个事先给定水平的时刻、保险公司的破产时刻等. 这些时间不是事先确定而是随机的. 在这些随机时刻中, 有一类特别重要的情况, 它出现与否只需要到目前为止的信息就可以判断, 并不依赖于未来的任何信息, 这种随机时刻称为停时.

定义 1.1.6　称随机变量 $\tau \in I \cup \{\infty\}$ 为 $\mathcal{F}_t$ 停时, 如果 $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ 对所有 $t \in I$ 成立.

一般情况下, 本书中取 $I = [0,\infty)$ 或者 $[0,T]$. 如果 $\tau \leqslant T < \infty$, 则称之为有界停时.

注意到, 确定性时间 s 也是停时, 因为 $\{s \leqslant t\} \in \{\varnothing, \Omega\}$.

如果 X 是一个适应的随机过程, τ 是一个停时, 则停止过程 $\{X_{\tau\wedge t}\}$ 也是适应的.

给定一个停时 τ, 还可以考虑 τ 时刻之前的所有信息 $\mathcal{F}_\tau$,

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} | A \cap (\tau \leqslant t) \in \mathcal{F}_t, \forall t \in I\}.$$

很容易验证 $\mathcal{F}_\tau$ 是一个 σ- 代数.

命题 1.1.1 (停时的性质)

(1) $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ 是一个停时当且仅当 $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$.

(2) 停时 τ 是 $\mathcal{F}_\tau$ 可测的.

(3) 一个随机变量 ξ 是 $\mathcal{F}_\tau$ 可测的当且仅当对任意 $t \geqslant 0$, $\xi I_{\tau \leqslant t}$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测.

(4) 若 σ, τ 都是停时, 则 $\sigma + \tau$, $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$ 都是停时,

$$(\sigma > \tau), (\sigma \geqslant \tau), (\sigma = \tau) \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau;$$

$$\sigma \leqslant \tau \Rightarrow \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau;$$

$$\mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau := \sigma(\mathcal{F}_\sigma \cup \mathcal{F}_\tau) = \mathcal{F}_{\sigma\vee\tau}.$$

(5) 对任意停时 τ, 存在只取有限个值的停时列 $\{\tau_n\}$, 使得 $\tau_n \downarrow \tau$.

关于停时更多的性质以及相关证明可以参见文献 [130],[133] 等.

首达时是停时中很重要的例子：令 $A \subset E$ 是一个 Borel 集, 定义首达时

$$\tau_A = \inf\{t \in I : X_t \in A\}, \quad \tau_A^* = \inf\{t \in I : X_t \in A \text{或} X_{t-} \in A\}.$$

如果 A 是开集, 则 τ_A 是一个停时. 如果 A 是闭集, 则 τ_A^* 是一个停时.

一个一般的随机过程首次到达一个任意的 Borel 可测集的时刻未必是停时, 关于这个问题的讨论需要 Choquet 的容度理论, 感兴趣的读者可以参见文献 [130].

在概率论中, 随机变量的分布是一个非常重要的概念, 给定一个分布函数, 可以构造一个随机变量使得其分布恰如所给定的分布. 在随机过程中也可以考虑一个过程的分布, 不过这里要考虑的是过程的"有限维分布", 它不再是一个分布而是一族分布：

$$\begin{cases} F_{t_1}(x_1) := P\{X_{t_1} \leqslant x_1\}, \\ F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) := P\{X_{t_1} \leqslant x_1, X_{t_2} \leqslant x_2\}, \\ \qquad\qquad \vdots \\ F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) := P\{X_{t_1} \leqslant x_1, X_{t_2} \leqslant x_2, \cdots, X_{t_n} \leqslant x_n\}, \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases} \tag{1.1}$$

容易验证一个过程的有限维分布族满足如下条件:

- 对称性: 对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 所有的排列 σ, 有

$$F_{t_{\sigma(1)},\cdots,t_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})=F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n). \tag{1.2}$$

- 相容性: 对一切 $m\in\mathbb{N}$, 有

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=F_{t_1,\cdots,t_n,t_{n+1},\cdots,t_{n+m}}(x_1,\cdots,x_n,\infty,\cdots,\infty). \tag{1.3}$$

反之, 当一族给定的函数满足这两个条件时, 也可以构造一个过程使得其分布族恰如给定的这族函数, 这就是著名的 Kolmogorov 扩张定理.

定理 1.1.1 (Kolmogorov 扩张定理)　*设 $\nu=\{\nu_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),n\geqslant 1\}$ 是一族满足以上对称性和相容性条件的函数族, 则存在一个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及定义在其上的随机过程 $\{X_t\}$, $X_t:\Omega\to\mathbb{R}$, 使得此过程的有限维分布族恰为 ν.*

注 1.1.1　*本节所罗列的内容可以在很多随机过程的教材中找到, 其中中文教材可以参考文献 [130], [133], 英文教材可以参考文献 [56], [118] 等.*

注 1.1.2　*关于随机过程的分类, 还可以细分为可选、可料过程等, 鉴于本书的难度, 对这些内容不多涉及, 感兴趣的读者可以参见文献 [129], [130] 等. 虽不多作说明, 但是本书中考虑的过程基本都具有循序可测性及可选性, 有的过程还具有可料性质.*

注 1.1.3　*根据随机过程具有的不同性质, 还可以把它们分为一些不同的类型, 例如马氏过程、鞅等, 本章后面的内容将分别介绍几类非常重要的过程.*

1.2　马氏过程、鞅

马氏过程和鞅都是非常重要的过程类型, 对马氏过程和鞅的研究是随机过程研究的重要分支. 马氏过程是一类具有“忘记过去”性质的过程, 鞅起源于对公平赌博过程的数学描述, 二者也存在着很密切的联系.

1.2.1　马氏过程

马氏过程一般分为两类, 当时间参数和取值空间均为离散时, 相应的过程称为马氏链; 当时间参数为连续时, 相应的过程称为连续时间马氏过程. 在连续时间马氏过程中, 又根据它取值的情况分为连续时间马氏链 (又称为 Q 过程) 和连续的马氏过程.

定义 1.2.1 (马氏链)　*随机序列 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 称为马氏链, 若它只取有限或可列个值 $E_0,E_1,E_2,\cdots$ (一般以 $\{0,1,2,\cdots\}$ 来表示 $E_0,E_1,E_2,\cdots$, 并称它*

们是过程的状态，过程的所有状态是 $\{0,1,2,\cdots\}$ 或者其子集，记为 S，称为过程的状态空间)，且对任意的 $n \geqslant 0$ 及状态 $i,j,i_0,i_1,\cdots,i_{n-1}$，有

$$\begin{aligned}&P\{X_{n+1}=j|X_0=i_0,X_1=i_1,X_2=i_2,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}\\=&P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

(1.4) 称为马氏性，直观上看，马氏性就是在已知过程现在取值的情况下，它将来的发展与过去无关. 即它的过去和将来在已知现在的条件下相互独立.

定义 1.2.2 (转移概率) 称马氏链定义中的条件概率 $P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$ 为马氏链 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 的一步转移概率，简称转移概率. 称 $P\{X_{n+m}=j|X_n=i\}$ 为马氏链 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 的 m 步转移概率.

定义 1.2.3 (时齐马氏链) 当马氏链的转移概率 $P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$ 只与状态 i,j 有关，而与 n 无关时，称马氏链为时齐的，并记 $p_{ij}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}(n\geqslant 0)$，此时 m 步转移概率同样与 n 无关，记为 p_{ij}^n；否则，就称之为非时齐的.

定理 1.2.1 (Chapman-Kolmogorov 方程) 对于一切 $n,m\geqslant 0$，及状态 i,j 有

$$P_{ij}^{m+n}=\sum_{k\in S}P_{ik}^m P_{kj}^n.$$

定义 1.2.4 若存在 $n\geqslant 0$ 使得 $p_{ij}^n>0$，则称马氏链可以从状态 i 到达状态 j，记为 $i\to j$. 如果 $i\to j$ 和 $j\to i$ 都成立，则称状态 i,j 是互通的.

互通是一种等价关系，可以根据状态之间的互通关系来对马氏链的状态归类. 当马氏链只有一类即所有状态都互通时，称马氏链是不可约的，否则称为可约的.

处于同一类的状态具有很多共同的重要性质.

定义 1.2.5 (周期性) 若集合 $\{n\geqslant 1,p_{ii}^n>0\}$ 非空，则称它的最大公约数 $d=d(i)$ 为状态 i 的周期. 当 $d>1$ 时，称 i 有周期，当 $d=1$ 时，称 i 非周期，特别当 $\{n\geqslant 1,p_{ii}^n>0\}$ 为空集时，称 i 的周期为无穷大.

在同一类的状态具有相同的周期.

定义 1.2.6 (常返和暂留) 对于马氏链的任意两个状态 i,j，令

$$f_{ij}^{(0)}=0,$$

$$f_{ij}^{(n)}=P\{X_n=j,X_k\neq j,\forall 1\leqslant k\leqslant n-1|X_0=i\},\quad n\geqslant 1,$$

$f_{ij}:=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$，若 $f_{ii}=1$，则称 i 是常返状态，否则称它为暂留状态.

定义 1.2.7 (正常返，零常返，遍历) 对于常返状态 i，如果 $\mu_i:=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}<\infty$，则称它为正常返状态，否则称为零常返状态. 若 i 正常返同时非周期，则称它为遍历状态.

对于同一类中的状态，它们同为常返或暂留，常返时同为正常返或者零常返. 由此若某一类中有一个状态时遍历的，则此类中所有状态都是遍历的.

命题 1.2.1　状态 i 正常返当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$; 状态 i 非常返时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}.$$

马氏链具有很重要的应用，其中不可约、状态遍历的马氏链 (称为遍历马氏链) 尤为重要，遍历马氏链具有非常好的性质. 在介绍这个性质之前，先来介绍平稳分布和极限分布的概念.

定义 1.2.8 (平稳分布)　概率分布 $\{P_i, i \in S\}$ 称为马氏链的平稳分布，如果

$$P_j = \sum_{i \in S} P_i P_{ij}.$$

如果一个马氏链是从它的一个平稳分布出发，那么它在之后任一时刻的分布都还是这个分布，这就是平稳的含义.

定义 1.2.9 (极限分布)　对于一个遍历马氏链，极限

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad j \in S$$

称为此马氏链的极限分布，其中 $\pi_j = \dfrac{1}{\mu_j}$.

命题 1.2.2　对于不可约非周期马氏链,

(1) 如果它是遍历马氏链，则 $\pi_j > 0$ 是它的平稳分布且它是此链唯一的平稳分布;

(2) 如果它的状态都是暂留或者零常返的，则它不存在平稳分布.

注 1.2.1　离散时间马氏链的内容在很多随机过程的教材中都可以找到，可以参考文献 [133], [139] 等.

以下介绍连续时间马氏过程.

定义 1.2.10 (连续时间马氏过程)　令 X 是一个 $\{\mathcal{F}_t\}$ 适应的随机过程，称 X 是一个 $\{\mathcal{F}_t\}$ 马氏过程，如果对任意的 $B \in \mathcal{E}$ 有

$$P[X_{t+s} \in B | \mathcal{F}_t] = P[X_{t+s} \in B | X_t].$$

当 $\{\mathcal{F}_t\}$ 取为 X 的自然 σ- 代数流 $\{\mathcal{F}_t^X\}$ 时，简称 $\{\mathcal{F}_t^X\}$ 马氏过程为马氏过程. 马氏过程有诸多等价定义，详情请参考文献 [133].

类似马氏链情况，可以考虑马氏过程的转移概率 (又称为转移函数). 令

$$P(t, s, x, B) := P[X_s \in B | X_t = x].$$

如果转移函数只与 $s-t$ 有关, 与时间 t, s 无关, 则称这个马氏过程是时齐的, 此时转移函数中可以省略脚标 t, 写为 $P(t-s,x,B)$. 若

$$P(t,s,x,B)=\int_B p(t,s,x,y)\mathrm{d}y,$$

则称 $p(t,s,x,y)$ 为转移密度函数, 当过程为时齐时, 简单记为 $p(s-t,x,y)$.

令 τ 是一个停时, X 是一个时齐的马氏过程. 如果

$$P[X_{\tau+s}\in B|\mathcal{F}_\tau]=P(s,X_\tau,B),$$

则称 X 在 τ 是强马氏的. 如果 X 在所有的停时都是强马氏的, 则称 X 是一个强马氏过程.

显然, 马氏过程的有限维分布族完全由过程的初始分布 $P(\omega,X(0,\omega)\in B)$ 和转移函数族 $P(t,s,x,B)$ 来决定. 从 Kolmogorov 扩张定理受到启发, 一个自然的问题就是能不能直接通过转移函数族来构造一个马氏过程? 答案是在一定条件下可以做到. 为介绍此结论, 首先给出一般的转移函数族的定义.

定义 1.2.11 (转移函数族) 称函数族

$$\{P(t,s,x,B),t\leqslant s\in I,x\in E,B\in\mathcal{E}\}$$

为一个转移函数族或者转移概率族, 如果它满足下列三个条件:

(1) 对固定的 t,s,x, $P(t,s,x,B)$ 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的一个概率;

(2) 对固定的 t,s,B, $P(t,s,x,B)$ 是定义在 $(E,\mathcal{E})$ 上的一个可测函数;

(3) 对任意的 $t\leqslant r\leqslant s,B$, $P(t,s,x,B)$ 满足 Chapman-Kolmogorov 方程:

$$P(t,s,x,B)=\int P(t,r,x,\mathrm{d}y)P(r,s,y,B).$$

命题 1.2.3 令 E 是一个完备可分度量空间, $\mathcal{E}$ 是其上的一个 σ- 代数, $\{P(t,s,x,B),t\leqslant s\in I,x\in E,B\in\mathcal{E}\}$ 是一个转移概率族, 那么可以构造一个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 以及定义在上面的一个马氏过程 $X(t)$, 使得此马氏过程的转移概率族恰为 $P(t,s,x,B)$.

可以说马氏过程的转移函数族决定了一个过程的很多性质, 其实还可以从另外的角度来看待这一族转移函数:

考虑 $(E,\mathcal{E})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 的有界可测函数全体 $B(E)$, 对任意 $f\in B(E)$, 定义它的范数为

$$\|f\|=\sup_{x\in E}|f(x)|.$$

由马氏过程的转移概率族, 可以定义如下一族算子 $P_{t,s}:\ B(E)\to B(E)$:

$$P_{t,s}f(x) = \int P(t,s,x,\mathrm{d}y)f(y) = \mathbb{E}(f(X_s|X_t = x)).$$

容易证明这样定义出的 $P_{t,s}$ 是线性压缩正算子, $P_{t,s}1 = 1$, $P_{t,t}$ 是恒同算子, $\forall t \leqslant r \leqslant s$, $P_{t,s} = P_{t,r}P_{r,s}$. 当过程为时齐时, $P_{t,s} = P_{0,s-t}$ 简记为 P_{t-s}, 从而 $(P_s, s \geqslant 0)$ 是一个收缩的正算子半群.

下面介绍另一个非常重要的概念: 生成元或者说无穷小生成元. 设 $f \in B(E)$, 如果极限

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}[f(X_t) - f(x)|X_0 = x]$$

(在 $B(E)$ 上一致收敛的意义下) 存在, 则 $f \in D(\mathcal{A})$ 并将上述极限记做 $\mathcal{A}f(x)$, 其中 $D(\mathcal{A})$ 是算子 $\mathcal{A}$ 的定义域, 称 $\mathcal{A}$ 为生成元或者无穷小生成元.

命题 1.2.4

(1) $P_tD(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{A})$;

(2) 任意 $f \in D(\mathcal{A})$, P_tf 关于 t 可微,

$$\frac{\mathrm{d}P_tf}{\mathrm{d}t} = P_t\mathcal{A}f = \mathcal{A}P_tf, \quad t \geqslant 0.$$

在连续时间马氏过程中有一类状态为离散的过程, 称为连续时间马氏链. 在连续时间马氏链情形, 转移函数族可以类似于马氏链情形来写成矩阵的形式: $P(t) = (P_{ij}(t))$. 在这种情况下, 生成元的表示比较简单, 有如下定理.

定理 1.2.2　设转移矩阵 $P(t)$ 满足条件

$$\lim_{t\downarrow 0} P_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.5}$$

则

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{P_{ii}(t) - 1}{t} = -q_{ii}$$

存在, 可能无限;

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{P_{ij}(t) - 1}{t} = -q_{ij}(i \neq j)$$

存在有限,

$$P_{ii}(t) > 0, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

定义 1.2.12 (Q 矩阵)　矩阵 $Q = (q_{ij})$ 称为一个 Q 矩阵, 如果

(1)　$q_{ii} = -q_i \leqslant 0$, q_i 可以取 ∞;

(2)　$0 \leqslant q_{ij} < \infty, i \neq j$;

(3)　$\sum_{j\neq i} q_{ij} \leqslant q_i$.

如果马氏链的 Q 矩阵为 $\mathcal{Q}$, 则称它是 $\mathcal{Q}$ 的 Q 过程.

注 1.2.2 连续时间马氏过程的内容可以参考文献 [26], [133] 等, 连续时间马氏链可以参考文献 [133], [139] 等.

1.2.2 鞅

"鞅" 这个名称是在 1939 年 Lévy 引入概率论的, 之后 Doob 和 Meyer 等对鞅进行了系统深入的研究, 现在鞅论和鞅方法已经成为了随机过程研究的重要领域和重要的研究工具.

定义 1.2.13 设 M 是一个 $\mathcal{F}_t$ 适应过程, $(M_t, \mathcal{F}_t)$ 称为一个下鞅 (或上鞅), 如果 $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ 对所有 $t \in I$ 成立, 且

$$\mathbb{E}[M_{t+s}|\mathcal{F}_t] \geqslant (\text{或} \leqslant) M_t \text{对一切 } t, s \in I. \tag{1.6}$$

如果 $(M_t, \mathcal{F}_t)$ 既是下鞅也是上鞅, 则称它是鞅, 这时 (1.6) 中等号成立.

如果以 M_t 来表示 t 时刻一个赌徒拥有的本金, 则鞅性质实际上就是一种"公平性": 无论赌徒在 t 时刻之后如何运用他在 t 时刻之前拥有的经验, 他所能期望在将来拥有的本金仍然是 M_t. 上鞅和下鞅则分别描述了不公平的赌博, 前者对赌博者不利而后者对赌博者有利.

如果对任意的 $t \in I$, $\mathbb{E}|M_t|^p < \infty$, $p \geqslant 1$, 称 M 为 L^p 鞅 (或下鞅、上鞅), 进一步, 如果 $\sup\limits_{t\in I} \mathbb{E}|M_t|^p < \infty$, 称 M 为 L^p 有界鞅 (或下鞅、上鞅).

命题 1.2.5

(1) 设 $(M_t, \mathcal{F}_t)$ 为一个下鞅, $\psi(\cdot)$ 是一个非降凸函数, 如果 $\mathbb{E}|\psi(M_t)| < \infty$ 对所有 $t \in I$ 成立, 则 $(\psi(M_t), \mathcal{F}_t)$ 也是一个下鞅;

(2) 若 $(M_t, \mathcal{F}_t)$ 是一个 L^p 鞅, 则 $(|M_t|^p, \mathcal{F}_t)$ 是下鞅;

(3) 若 $(M_t, \mathcal{F}_t)$ 为一个下鞅, $c \in \mathbb{R}$, 则 $(M_t \vee c, \mathcal{F}_t)$ 也是下鞅, 特别地, 令 $c = 0$, 则 $(M_t^+, \mathcal{F}_t)$ 是一个下鞅.

下面介绍鞅论中的几个重要结论: 收敛定理、停时定理等.

首先引入一致可积的概念.

定义 1.2.14 (一致可积性) 称一族随机变量 $\{X_\alpha, \alpha \in I\}$ 是一致可积的, 如果对任意 $\alpha \in I$, $\mathbb{E}|X_\alpha| < \infty$,(即 $\{X_\alpha, \alpha \in I\} \subset L^1$), 并且

$$\lim_{A\to\infty} \sup_{\alpha\in I} \int_{|x_\alpha|\geqslant A} |X_\alpha| \mathrm{d}P = 0. \tag{1.7}$$

命题 1.2.6 设 $\{X_\alpha, \alpha \in I\} \subset L^1$, 则它是一致可积的充要条件是

(1) 它是 L^1 有界的, 即 $\sup\limits_{\alpha\in I} \mathbb{E}|X_\alpha| < \infty$;