理論力学

（第二冊）

徐芝綸 吳永禎 合編

上海科学技术出版社

理论力学

（二）

徐芝綸　吴永禎　合編

（第二版）

上海科学技术出版社

內容提要

本书共分两册，第一册計有靜力学及运动学两篇，第二册包括质点动力学和质点系动力学两篇；以讲述基本理論为主，并适当結合实际問題，以說明其应用。每章之后附有习题，可作为高等学校理論力学課程教本或参考书。

理论力学（二）

（第二版）

徐芝綸　吳永禎　合編

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
上海洪兴印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32　印張6 4/32　字数160,000
（原新亚、科技版共印17,000册　1954年8月第1版）
1959年4月新1版印4次共印19,000册
1962年12月第2版　1962年12月第1次印刷
印数 1—3,500

統一书号：13119·75
定　价：（十四）1.05元

目　次

第三篇　质点动力学

第四篇　质点系动力学

第三篇

质点动力学

• • •

第19章 基本定律

§19-1 緒　言

在静力学里，研究了作用于物体的力底簡化及平衡条件，而不論物体底运动；在运动学里，研究了物体运动底几何学性质，而不論作用于物体的力；但在动力学里，则将研究物体底运动与作用于物体的力两者之間的关系。由經驗而知，同样的力作用于不同的物体时，对于各該物体底运动将产生不同的影响，这就說明，物体底运动不仅与它所受的力有关，而且与它本身的某些性质（这种性质称为**力学性质**）有关。因此，比較确切地說，动力学所研究的是物体底运动、作用于物体的力及物体底力学性质三者之間的关系。不过，对于一定的物体，它的力学性质是一定的，因而它的运动与作用于它的力之間有着完全确定的关系，而我們也就簡单地說：动力学研究物体底运动与作用于物体的力两者之間的关系。

动力学所研究的問題，基本上可以分作两大类：一类是，要使一定的物体发生一定的运动，須要对它施以什么样的力？另一类是，一定的物体在一定的力作用下，它的运动規律如何？以后可以看到，第一类問題是比較簡单的；于是，第二类問題就成为动力学所注意的中心。

随着生产底发展，工程技术中提出的动力学問題愈来愈多。机械設計中的动力分析、均衡問題、振动問題等，固不必說，就是在土木、水利建筑物底設計中，过去认为主要是靜力学問題，現在也

愈益需要研究动力載荷底作用,研究振动問題以至动力稳定問題;在許多尖端科学中,如人造地球卫星以至宇宙火箭底飞行,其中也包含着許多动力学問題. 虽然我們不可能在理論力学中討論这些专門問題,但在理論力学中所討論的动力学基本知識,却是研究这些問題的必需基础. 于此可見,掌握动力学基本理論知識,实有极为重要的意义.

动力学一般分为**质点动力学**及**质点系动力学**两部分. 质点系动力学底理論可直接从质点动力学底原理推演出来, 而它所反映的物体运动規律,比較更具有一般性. 不过,质点动力学也自有其独立的实用价值. 因为,不但当物体可以看作质点时,它的問題属于质点动力学底范圍,就是有关质点系的某些問題(如剛体底平行移动及质点系质心底运动),也可以直接应用质点动力学底原理求得解答.

現在首先研究质点动力学.

质点动力学底基础(自然也就是全部动力学底基础)是根据对自然現象的观察及实驗底結果而建立起来的几个定律. 这几个定律是分别由伽利略和牛頓建立的,不过牛頓在它的名著"自然哲学底数学原理"一书中作了綜合的和有系統的陈述. 下面就来叙述并解释这几个定律.

§19-2 慣性定律

任何质点,如不受外力影响,则将保持静止的或勻速直綫运动的状态.

这一定律是首先由伽利略建立的, 但牛頓在他的书中把它列为第一定律,因此,一般都称这一定律为牛頓第一定律.

物体不受外力影响时保持静止的或勻速直綫运动的状态, 这是物体底特性, 这种特性称为**慣性**, 所以上述定律又称为**慣性定律**,而勻速直綫运动也称为**慣性运动**.

設质点由静止而开始运动, 或者所作的运动不是勻速直綫运动,也就是説,該质点具有加速度,则由慣性定律可知,該质点必受

有外力作用．因此，可以說，力是破坏质点底靜止或改变质点底运动状态的原因，或者說，力是使质点产生加速度的因素．这样，我們又得到了关于力的概念．当然，这里仍然是只考察力底效应而不研究力底本质．

在运动学里曾說过，靜止与运动是相对的概念，必須对一定的坐标系而言才有意义．那末，慣性定律里所說的靜止或匀速直綫运动，究竟是以什么样的坐标系作为标准的呢？是不是对于任何坐标系慣性定律都适用呢？对于这一問題須要作簡短的說明．

牛頓在陈述各个定律之前，曾引进"絕对空間"的概念．他所謂的"絕对空間"，是与物质无关的，絕对不动的空間．质点对于"絕对空間"的运动（或者說，对于絕对靜止的坐标系的运动）则称为絕对运动．按照牛頓底意見，他所陈述的定律（当然包括慣性定律在內）只适用于这样的絕对运动．不过，由力学底相对性原理（将在第23章中讲述）可知，設某一坐标系对靜坐标系作匀速直綫运动，则对于該动坐标系，慣性定律也适用．凡是适用慣性定律的坐标系就称为**慣性坐标系**．

当然，认为空間与物质无关，这是錯誤的，而且，在宇宙間根本就找不到一个絕对靜止的坐标系，因而也就不能找到一个眞正的慣性坐标系．但是，这些定律和以它們为基础而建立起来的全部动力学理論并不就因此而失去了实用的价值．事实上，我們虽然不能找到一个眞正的慣性坐标系，却可以找到近似的慣性坐标系；对于这样的坐标系，应用动力学底定律和理論，能得到足够精确的結果．例如，在絕大多数的工程問題中，只須将剛連于地球的坐标系看作近似的慣性坐标系，所得的結果底精确度就已經超过实际所需要的了；只有在少数問題中，当須要考虑地球自轉底影响时，才取通过地心而指向三个恒星的軸为慣性坐标系．在天文計算中，则取太阳中心坐标系，即，以太阳中心为坐标原点，而三个坐标軸分别指向三个恒星．

在以后的論述中，如果沒有特别指明，则所有运动都是对慣性

坐标系而言的，而在实际問題中，都是以剛連于地球的坐标系为慣性坐标系.

§19-3 动力定律

慣性定律只說明力是产生加速度的原因，至于力与加速度之間的关系，則由下述的动力定律来表明：

质点受一个力作用时，所产生的加速度与作用力底大小成正比，加速度底方向与作用力底方向一致.

这一定律可用矢量方程表为：

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}. \tag{19-1}$$

其中 $\boldsymbol{w}$ 为质点底加速度，m 为质点底**质量**，$\boldsymbol{F}$ 为质点所受的力.

設以相等的力作用于不同的质点，則由式(19-1)可見，质量 m 愈大的质点，所产生的加速度 $\boldsymbol{w}$ 愈小. 这就表示，质点底质量 m 愈大，它的慣性也愈大. 因此，质量是质点底慣性底量度.

方程 (19-1) 表明质点底质量、它所受的力及因此而产生的加速度三者之間的关系，是质点动力学(也就是全部动力学)底**基本方程.**

設有一力作用于质量已知的质点，則根据质点所得到的加速度就能确定作用力底大小及方向. 这是应用动力学原理来量度力的方法.

将方程 (19-1) 改写为标量方程 $F=mw$，則有

$$m=\frac{F}{w}. \tag{a}$$

設已知作用于一质点的力底大小 F 及該质点因此而产生的加速度底大小 w，則該质点底质量 m 就可由式 (a) 算出. 現在，令一质点在近地面处的眞空中自由降落，則該质点所受的力只有重力，它的大小就是质点底重量 W，而质点降落的加速度底大小就等于重力加速度底大小 g，于是由式 (a) 求得該质点底质量为

$$m=\frac{W}{g}, \tag{19-2}$$

而方程 (19-1) 亦可改写成为

$$F=\frac{W}{g}w. \tag{19-3}$$

在地面上不同之处，重力加速度 g 底数值并不相同，同一物体底重量 W 也不相等，但在古典力学中，因为把物体底质量看作常量，所以，不論在地面上何处，W 与 g 的比值看作是不变的.

在物理学上，通常采用 CGS 单位制(絕对单位制)，以长度、质量、时間这三个量底单位为基本单位. 长度底单位用厘米，时間底单位用秒，质量底单位用克，即在标准大气压下及 4°C 时 1 立方厘米的水底质量. 这样，力底因次是[质量][长度]/[时間]^2，而力底单位是克·厘米/秒^2.

設在公式 $F=mw$ 中，令 $m=1$ 克(质量)，$w=1$ 厘米/秒^2，则 $F=1$ 克·厘米/秒^2. 这就是說，在 CGS 制中，以使 1 克质量产生 1 厘米/秒^{2}加速度的力为单位力. 这单位力称为**达因**. 当具有 1 克质量的物体在眞空中自由降落时，$w=g$，而 $F=mg$ 就是这物体所受的重力底大小，也就是这物体底重量. 在物理学上，把这物体底重量称为 1 克，因此，如取 $g=980$ 厘米/秒^2，则 1 克重量 $=980$ 达因.

在工程上，通常采用重力单位制，以长度、时間、力底单位米、秒、公斤为基本单位，如以前各章中所用. 这样，质量底因次是力除以加速度的因次，即[力][时間]^2/[长度]，而质量底单位是公斤·秒^2/米.

設在公式 $m=\dfrac{F}{w}$ 中，令 $F=1$ 公斤，$w=1$ 米/秒^2，则 $m=1$ 公斤·秒^2/米，这就是說，以在 1 公斤力作用下产生 1 米/秒^{2}加速度的质量为单位质量. 这一单位并无特殊名称，通常就称为**工程单位质量**. 如令重 W 的物体在眞空中自由降落，并取 $g=9.80$ 米/秒^2，则 $m=\dfrac{W}{9.80}$，而当 $W=9.80$ 公斤时，$m=1$ 工程单位质量. 这就是說，1 工程单位质量等于重 9.80 公斤的物体底质量.

§19-4 力底独立作用定律

动力定律所表示的是质点只受到一个力时的情形，設一质点同时受有几个力底作用，它的加速度将由下述定律决定：

設一质点同时受有几个力底作用，則該质点底加速度，等于各力单独作用于該质点时所产生的加速度底矢量和.

这一定律称为**力底独立作用定律**，也叫做**力底作用互不相干定律**.

設有一质点，其质量为 m，同时受力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 作用. 以 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ 代表各力单独作用时质点底加速度，$\boldsymbol{w}$ 代表各力同时作用时质点底加速度，則根据本定律可有如下的关系：

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2+\cdots+\boldsymbol{w}_n. \tag{a}$$

将上式底两边同乘以 m，根据动力定律有 $\boldsymbol{F}_1=m\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{F}_2=m\boldsymbol{w}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{F}_n=m\boldsymbol{w}_n$，并命

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{w}, \tag{b}$$

于是有

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n. \tag{c}$$

这样就从动力学出发得出了靜力学中熟知的共点力底合成法則——合力等于各分力底矢量和. 当然，如果从分力与合力的关系式 (c) 出发，也可以得到加速度的关系式 (a). 这里須要說明，力底合成及加速度底合成法則，都是实驗底結果，而不是純粹的数学的演繹，因而无論从 (a) 推出 (c)，或从 (c) 推出 (a)，都是一样的.

由 (b) 及 (c) 又可得

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n. \tag{19-4}$$

这就表示：几个力同时作用于一质点时所产生的加速度，等于各力底合力单独作用时所产生的加速度.

以后凡是談到作用于质点的力时，都是指作用于质点的所有的力，即基本方程具有如 (19-4) 的形式. 如果质点是受有約束的非自由质点，則約束力也包含在方程 (19-4) 中；此外，从运动学的

观点来看，质点底运动还須滿足約束所加于它的限制条件.

在方程 (19-4) 中，如 $\boldsymbol{w}=0$，即，质点是靜止的或作勻速直綫运动，則 $\boldsymbol{F}=0$，即 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=0$. 这就是靜力学中所研究的共点力系成平衡时的情况.

§ 19-5 反作用定律

两物体相互作用的力同时存在，大小相等，作用綫相同而方向相反，或者說，任何作用必有与它大小相等而方向相反的反作用存在.

这一定律曾在靜力学中讲述过. 不过，在靜力学中所考察的作用力与反作用力，主要是出現在两个靜止的物体相接触之处，而这里則說明：对于两个运动的和不相接触的物体，反作用定律同样适用.

設有两个质点 A 及 B. 不論它們的运动情况如何，若质点 A 以力 $\boldsymbol{F}$ 作用于质点 B，則质点 B 必同时以力 $\boldsymbol{F}'$ 作用于质点 A，而且 $\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}'$，并都沿連接 A 及 B 的直綫作用.

再說一次，作用力与反作用力是分别作用在两个质点上的. 如研究质点 A 底运动，就只須考虑它所受的力 $\boldsymbol{F}'$，而不应考虑它对于质点 B 的作用力 $\boldsymbol{F}$；反之，对于质点 B 則只須考虑力 $\boldsymbol{F}$ 而不应考虑力 $\boldsymbol{F}'$.

反作用定律对于研究质点系动力学問題具有特別重要的意义. 因为，前述的几个定律都是就一个质点而言的，而这一定律則使我們有可能将质点动力学底原理推广，据以研究质点系动力学問題.

第20章 质点运动微分方程

§20-1 质点运动微分方程底各种形式

設有一质点 P，其质量为 m，在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿某一曲綫运动(图 20-1)，則据动力定律，质点底加速度 $\boldsymbol{w}$ 与力 $\boldsymbol{F}$ 之間的关系为：

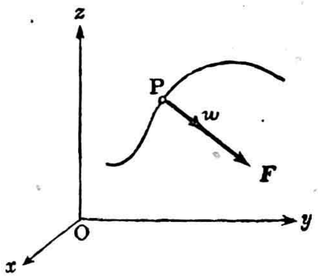

图 20-1

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}. \tag{20-1}$$

若质点 P 同时受若干个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$ 作用，則据力底独立作用定律，方程(20-1)中的 $\boldsymbol{F}$ 应等于各力底矢量和，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n.$$

由运动学[方程(13-8)]已知，

$$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \tag{a}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为质点 P 底速度，而 $\boldsymbol{r}$ 为质点 P 对于原点 O 的矢徑．于是方程(20-1)成为

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}, \tag{20-2}$$

或

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}. \tag{20-3}$$

这就是用矢量表示的质点运动微分方程．

过原点 O 取直角坐标系 $Oxyz$，并将方程(20-3)两边分别投影于 x，y，z 軸．于是有

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z. \tag{20-4}$$

这就是用直角坐标表示的质点运动微分方程．方程 (20-4) 中的 x, y, z 为质点 P 底位置坐标，而 X, Y, Z 为作用于质点的各力在 x, y, z 軸上的投影底代数和．

若质点 P 底运动是平面曲綫运动，取运动平面为 xy 面，则方程 (20-4) 成为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\ m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\ Z=0. \tag{20-5}$$

若质点作直綫运动，取該直綫为 x 軸，则方程 (20-4) 成为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\ Y=0,\ Z=0. \tag{20-6}$$

在实际应用上，也常常采用路徑表示法．沿路徑取自然坐标軸 T, N, B, 并将方程 (20-1) 底两边投影于三軸，而以 w_τ, w_n, w_b 代表 $\boldsymbol{w}$ 在三軸上的投影，F_τ, F_n, F_b 代表作用于质点的各力在三軸上投影底代数和，则

$$mw_\tau=F_\tau,\ mw_n=F_n,\ mw_b=F_b. \tag{b}$$

但 $w_b=0$, 而 $w_\tau=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$, $w_n=\dfrac{v^2}{\rho}$, 于是得

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_\tau,\ m\frac{v^2}{\rho}=F_n,\ F_b=0. \tag{20-7}$$

这就是用路徑表示的质点运动微分方程．

§ 20-2　据已知运动求力

現在首先研究质点动力学中的第一类問題：已知质点底运动情况，求作用于质点的力．一般說来，这类問題是比較簡单的，因为在解答問題时只須用微分法就够了．

設已知质点 P 底质量为 m, 而它的用直角坐标表示的运动方程为

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t),$$

则由方程 (20-4) 有

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{d^2x}{dt^2} = mf_1''(t), \\ Y &= m\frac{d^2y}{dt^2} = mf_2''(t), \\ Z &= m\frac{d^2z}{dt^2} = mf_3''(t). \end{aligned}\right\} \tag{20-8}$$

于是，只須求出质点底各坐标对于时間的导数在任一瞬时的值，就可求得质点在該瞬时所受的合力底投影，自然也就可以完全确定质点所受的合力底大小及方向.

設已知质点底运动路徑及沿路徑表示的运动方程为 $s=f(t)$，則由方程(20-7)有

$$F_\tau = m\frac{d^2s}{dt^2}, \quad F_n = m\frac{v^2}{\rho} = \frac{m}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \quad F_b = 0. \tag{20-9}$$

利用这一組公式，可以求出任一瞬时作用于质点的力在自然坐标軸上的投影，质点所受的力也就完全确定.

若质点P同时受几个力作用，而其中某些力已知，某些力未知(如約束力)，这时，公式(20-8)及(20-9)中的 $X, Y, Z, F_\tau, F_n, F_b$ 应等于各已知力及未知力投影底代数和，据此卽可求得各未知力.

【例題 20-1】 质点 P 的质量为 m，在坐标平面 Oxy 内运动(图 20-2)，其运动方程为

$$x = a\cos\omega t, \quad y = b\sin\omega t,$$

其中 a, b, ω 都是常数. 求质点 P 所受的力 $\boldsymbol{F}$.

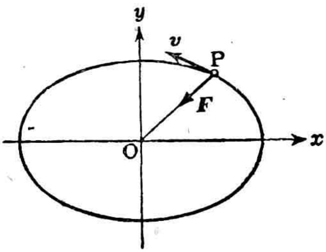

图 20-2

解： 消去时間 t，得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

所以质点底路徑是以 a 及 b 为半軸的椭圓.

将运动方程对时間 t 求微分，代入方程 (20-8) 底前两式，得

$$X = -ma\omega^2\cos\omega t = -m\omega^2 x,$$

$$Y=-mb\omega^2\sin\omega t=-m\omega^2 y.$$

于是，力 $\boldsymbol{F}$ 底大小为

$$F=\sqrt{X^2+Y^2}=m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}=m\omega^2 r,$$

其中 r 为动点 P 底矢徑 $\boldsymbol{r}$ 底模. 力 $\boldsymbol{F}$ 底方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{F},x)=\frac{X}{F}=-\frac{x}{r},\quad \cos(\boldsymbol{F},y)=\frac{Y}{F}=-\frac{y}{r},$$

恰与矢徑 $\boldsymbol{r}$ 底方向余弦底数値相等而符号相反. 所以，力 $\boldsymbol{F}$ 与矢徑 $\boldsymbol{r}$ 成比例而方向相反(卽指向坐标原点 O)，这关系可用矢量方程表为

$$\boldsymbol{F}=-m\omega^2\boldsymbol{r}.$$

这种力称为**有心力**.

【例題 20-2】 电梯重 W，容許的加速度(或減速度)为 $0.2g$，求悬挂电梯的索內拉力底最大及最小值.

解: 电梯所受的力有：重力 $\boldsymbol{W}$，鉛直向下；悬索拉力 $\boldsymbol{T}$，鉛直向上. 取 x 軸向下，則

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=W-T,\quad 卽\quad \frac{W}{g}w_x=W-T,$$

于是得

$$T=W\left(1-\frac{w_x}{g}\right).$$

当电梯以加速度下降或以减速度上升时，w_x 取为正值，反之为負值. 将 $w_x=\pm 0.2g$ 代入，卽得拉力 T 底最小值及最大值

$$T_{\min}=0.8W,\quad T_{\max}=1.2W.$$

【例題 20-3】 长 $l=30$ 厘米的綫底一端固定于 O 点，另一端系一重 $W=1$ 公斤的小球 P，图 20-3. 欲使小球在水平面內作匀速率圆周运动，悬挂小球的綫与鉛直綫成角 $\alpha=60°$，形成一个圓錐摆. 試求小球底速率 v 及摆綫底張力 T.

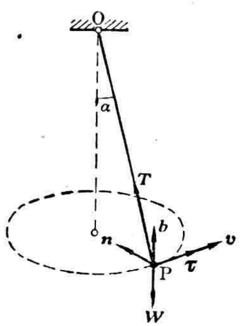

图 20-3

解: 小球 P 所受的力計有：已知的重力 $\boldsymbol{W}$，摆綫中的未知張力 $\boldsymbol{T}$. 已知小球的运动路徑为一圓周；取自然坐标軸 $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, 于是由公式 (20-9) 中的第三式有

$$T\cos\alpha-W=0,$$

由此得 $$T=\frac{W}{\cos\alpha}=2\text{ 公斤}.$$

又由公式 (20-9) 中的第二式有

$$T\sin\alpha=\frac{W}{g}\frac{v^2}{\rho},$$

但 $\rho=l\sin\alpha$，代入上式，解得

$$v=\sqrt{\frac{Tgl\sin^2\alpha}{W}}=\sqrt{\frac{2\times9.8\times0.3}{1}}\sin60^\circ=2.1\text{ 米/秒}.$$

习题 20-1 一质点底质量为 0.1 工程单位，依 $x=t^4-12t^3+60t^2$ 作直綫运动，x 以米計，t 以秒計．求作用于质点的力，并求該力为最大或最小值的瞬时及力底大小．

答：$F=1.2(t^2-6t+10)$ 公斤；$t=3$ 秒时，$F_{\min}=1.2$ 公斤．

习题 20-2 蒸汽机活塞按 $x=a\left(\cos\omega t+\frac{a}{4l}\cos2\omega t\right)$ 的规律作水平运动，其中 a 为曲柄底长度，l 为連杆底长度，ω 为曲柄底角速度，系一常数．設活塞重 W，求使活塞运动的力底最大値． 答：$\frac{W}{g}a\omega^2\left(1+\frac{a}{l}\right)$.

习题 20-3 一重 280 公斤的桶在矿井中以匀加速度下降，在最初 10 秒钟內下降的距离为 35 米．求悬挂桶的绳內的拉力． 答：260 公斤．

习题 20-4 将重 2 公斤的物体挂在 1 米长的綫底下端，物体因受冲击而获得 5 米/秒的速度，求此时綫內的拉力． 答：7.1 公斤．

§20-3 据已知力求运动

設已知作用于质点的力，而須求它的运动情况，即求它的运动方程．这时，問題就成为求解微分方程．

在最一般的情况下，力 $\boldsymbol{F}$ 可能是时間 t、动点底位置坐标 x y，z 及其速度投影 $\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$，$\frac{dz}{dt}$ 底函数，而方程 (20-4) 成为

$$\left.\begin{aligned}m\frac{d^2x}{dt^2}&=X\left(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right),\\m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y\left(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right),\\m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z\left(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(20\text{-}10)$$