普通高等院校
规划教材

WEIJIFEN XINBIAN JIAOCHENG

主　编　丁正中

微积分
新编教程

（第一册）

浙江科学技术出版社

普通高等院校
规划教材

浙江省高等教育重点教材

微积分新编教程

（第一册）

主　编　丁正中
编　著　丁正中　朱　灵
王海敏　华就昆
李剑秋

浙江科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分新编教程.第1册/丁正中主编;朱灵等编著.—杭州:浙江科学技术出版社,2011.8
普通高等院校规划教材
ISBN 978-7-5341-4223-9

Ⅰ.①微… Ⅱ.①丁… ②朱… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第173865号

丛书名	普通高等院校规划教材
书名	微积分新编教程(第一册)
主编	丁正中
编著	丁正中 朱灵 王海敏 华就昆 李剑秋

出版发行	浙江科学技术出版社 杭州市体育场路347号 邮政编码:310006 联系电话:0571-85170300-61712 E-mail:cl@zkpress.com
排版	杭州大漠照排印刷有限公司
印刷	杭州丰源印刷有限公司
经销	全国各地新华书店

开本	787×1092 1/16	印张	16
字数	358 000		
版次	2011年8月第1版		2011年8月第1次印刷
书号	ISBN 978-7-5341-4223-9	定价	35.00元

责任编辑 张祝娟 陈岚 封面设计 孙菁
责任校对 张宁 责任印务 崔文红

前　言

我国现代化建设的迅速发展,需要造就一大批掌握现代经济理论与现代管理知识的专门人才.在现代经济学与现代管理科学中,由于日益强调定量分析,因此大量引进了近代数学的概念、理论及其方法,几乎在每一本现代经济理论的书籍中,都可找出一大堆近代数学的符号与公式.可以说,不懂得近代数学,特别是经济应用数学,在现代经济领域里将寸步难行.

大学中的经济应用数学通常包括应用数理统计、运筹学和计量经济学等基本课程,而作为这些课程的共同基础是以微积分为主体的高等数学知识.由于高等数学具有高度的抽象性与严密的逻辑性等特点,故对于刚入学的文科本科学生来说,是一门较难学好的课程,这个问题还反映在至今还没有一本公认的比较有特色的适合于经济管理类本科学生使用的经济数学基础教科书.多年来的教学实践,使我们深切地体会到这方面的迫切要求,为此我们试编了这本教材,以期起到抛砖引玉的作用.

在编写这本教材时,我们在以下几个方面做了一些尝试:

(1) 注意对基本概念做深入浅出的描述.在基本概念的引入上,例如在介绍极限、导数、弹性、微分等概念时,我们对它们的经济背景问题以及这些概念的实质都做了详尽的阐述,希望学生不仅知道这些概念的抽象数学定义,并且还能透过这些字眼知道为什么要这样下定义,从而能够学到一点如何对实际问题进行数学定量化刻画的思想与方法.

(2) 增大理论与实际中应用部分的篇幅.考虑到文科本科学生的特点以及高等数学在经济管理类学科中的应用作用,我们对数学理论部分的内容做了较大限度的压缩,一些并非必要的理论证明和应用意义不大的内容,都被做了删略,以便有较多的篇幅来叙述理论应用方面的知识.例如,我们加强了对函数最大、最小值问题的讨论,增加了导数以及与之相关的"边际"、"弹性"等概念在经济学上应用的例子;在定积分经济应用方面,引入了资金流的现值和终值的概念与计算、消费者剩余和生产者剩余的概念与计算、洛伦兹曲线和基尼系数的概念与计算等问题;在微分方程经济应用方面,介绍了逻辑斯蒂克模型和市场经济下商品价格动态均衡模型等经济数学模型及其建模思想等.

(3) 在教材中融入了计算机和应用软件的使用.抽象的内容与计算机应用软件的结合,会使学生更为直观地学好大学本科教学中微积分这门重要的公共基础课.我们试图通过介绍一个简单易学的数学软件 Mathematica 来达此目的.该软件的操作介绍只涉及微积分课程

中所提出的高等数学运算，如极限、求导、不定积分、定积分、幂级数求和、微分方程求解等等，其具体内容将用标以星号的小节形式分布在各相应章节之末尾，以便于学用结合.

(4) 对于普通教科书上一些常见的概念性错误及易混淆之处，例如分段函数、复合函数、反函数、反正弦函数等，在本书中也做了必要的澄清与纠正.

(5) 重视练习题的配备.一套精心编写的练习题往往可以使一本教材增色不少.数学的特点决定了学生必须通过演算一定量难易适当的习题，才能真正领会概念，掌握定理及公式，所以我们在习题编写方面做了一些努力.同时，我们也适当配备了一些涉及前后知识点的综合题和近年来的考研试题，以期达到前后章节的知识能被贯串运用的目的和使越来越多希望考研的本科生在一年级就打好扎实的基础.除此之外，我们在每一章后面还编写了复习题，这些复习题分为：客观性习题、基本计算题、应用题及证明题四大部分，主要供学生学完该章后进行系统复习或准备阶段测验和期末考试之用.

(6) 注意与中学知识的衔接.例如，近年来中学数学教学中对于文科学生均删去了有关三角函数的知识，我们特地做了专节介绍，以使前后知识不脱节.

本教材是针对每周时数为 4 学时、共 34 教学周数的本科教学需要而编写的.为了便于教师的教学以及学生的自学，我们尽量按 2 个学时的讲授内容作为一节进行章节划分.全书共分十章(第一册、第二册)，其中第一章和第二章由丁正中教授编写，第三章和第四章由华就昆副教授编写，第五章和第六章由王海敏副教授编写，第七章和第八章由朱灵教授编写，第九章和第十章由李剑秋副教授编写，最后由丁正中教授统稿并担任主编.

本书在编写过程中，我们借鉴了一些图书文献，有的参考文献未在书后一一列出，在此向他们致以诚挚的谢意.

由于编写时间仓促，加之编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正.

编著者

2011 年 3 月

目　　录

第一章　函　　数

第一节　变　　量

一、变量概念

我们在观察各种经济现象或研究实际问题的时候，会遇到许多的量，这些量在我们考察过程中常常会不断变化，例如某种商品的市场需求量、某种股票的股市价格、上证指数等. 这种量，我们称之为变量.

在数学上，我们总是抽去变量的具体含义来研究它们在某一过程中的数值变化情况，并且常常用小写字母 x, y, z, …简练地称呼各种所要研究的变量. 需要注意的是，为了数学研究的方便，上述变量的概念应广义地理解. 这里提到变量的所谓变化，并不排斥变量在某一过程中始终保持一个数值的情况. 这就是说，可以有一种特殊的变量，它在某一阶段(甚至整个过程)中所取的数值并不起变化. 例如，市场经济下某种商品的价格是一个变量，但在某个时期内这个价格是恒定不变的.

确定一个变量的要点在于确定它的变化范围，也就是指出该变量的取值范围. 本书研究的变量的变化范围均为实数集合中的某一个子集. 变量的变化范围通常是用大写字母 X,Y,D,Z,…来表示的.

变量的取值可以是离散型的. 例如，某个给定变量 x 的所有取值为 $1,2,3,\cdots,6,7$. 又如，某个给定变量 y 的所有值为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$($n$ 为自然数). 根据前面的规定，这两个例子分别可以叙述为"给定(离散型)变量 $x\in X=\{1,2,3,\cdots,6,7\}$"和"给定(离散型)变量 $y\in Y=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$($n$ 为自然数)".

变量的取值也可以是连续型的. 例如，给定变量 x 的取值为满足不等式 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的一切实数，或者说给定(连续型)变量 $x\in X=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$.

二、区间与邻域

连续型变量是本教材的主要研究对象. 通常，它的变化范围可表示为一个或几个所谓的区间. 本教材中采用的各类区间的名称、意义及记号介绍如下.

设 a,b 为两个实常数，且 $a<b$.

1. 闭区间 $[a,b]$

我们把满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体，叫做闭区间，记为 $[a,b]$. 换言之，

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

2. 开区间(a,b)

我们把满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的全体,叫做开区间,记为 (a,b). 换言之,

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

3. 半开区间(也称"半闭区间")$[a,b)$或$(a,b]$

它们的意义是:

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

以上情况中,均称 a,b 为区间的端点,而 $b-a$ 叫做区间的长度. 在无需辨明端点是否在内时,以上各种情况可以统一简称为区间. 它们可表示成如图 1-1 所示.

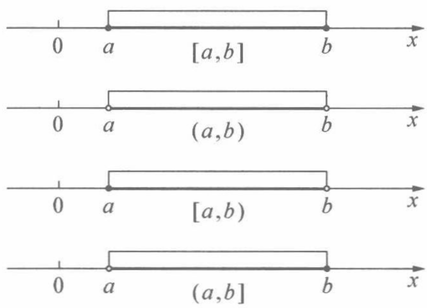

图 1-1

4. 无穷型区间

我们把满足不等式 $x\geqslant a$ 的一切实数 x 的全体,叫做(半)无穷区间,记为 $[a,+\infty)$. 也就是

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$$

类似地,还有(半)无穷区间 $(a,+\infty)$、$(-\infty,b]$ 和 $(-\infty,b)$,它们分别规定如下:

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\},$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}.$$

另外,还有无穷区间 $(-\infty,+\infty)$,它的意义是全体实数集合. 以上无穷型区间可表示成如图 1-2 所示.

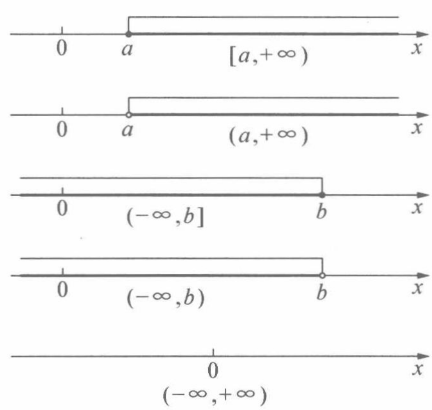

图 1-2

5. 邻域

设 a 为实常数,δ 为正常数,我们把满足不等式$|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 的全体,叫做以 a 为中心,以 δ 为半径的邻域,或简称为 a 的 δ 邻域,记为

$$(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

类似地，把满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 的全体，叫做以 a 为中心、以 δ 为半径的去心邻域，或简称为 a 的 δ 去心邻域，记为

$$(a-\delta,a)\cup(a,\ a+\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

把满足不等式 $-\delta<x-a<0$ 的一切实数 x 的全体，叫做以 a 为中心、以 δ 为半径的左邻域，或简称为 a 的 δ 左邻域，记为

$$(a-\delta,a)=\{x\,|\,-\delta<x-a<0\}.$$

同时，把满足不等式 $0<x-a<\delta$ 的一切实数 x 的全体，叫做以 a 为中心、以 δ 为半径的右邻域，或简称为 a 的 δ 右邻域，记为

$$(a,a+\delta)=\{x\,|\,0<x-a<\delta\}.$$

各种邻域可表示成如图 1－3 所示.

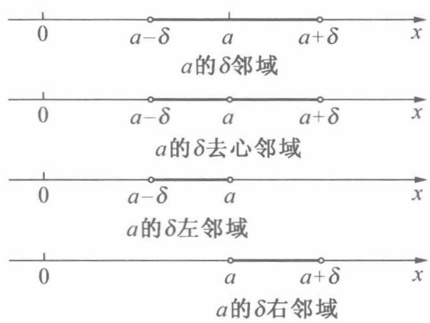

图 1－3

显然，"a 的 δ 邻域"是一个开区间，其长度为 2δ."a 的 δ 去心邻域"是两个开区间的并集，每个开区间的长度均为 δ. 这两个开区间分别是"a 的 δ 右邻域"和"a 的 δ 左邻域".

【例 1－1】 某地某天的最高气温为 30℃，最低气温为 20℃. 这样，这天的气温 t℃ 是一个变量，它的变化范围是 $20\leqslant t\leqslant 30$，也就是变量 $t\in[20,30]$.

【例 1－2】 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x|\leqslant 1$；

(2) $|x+1|\leqslant 1$；

(3) $|x-a|<\varepsilon$ (a,ε 为常数，$\varepsilon>0$)；

(4) $|x|>b$ ($b>0$，为常数)；

(5) $|x+2|>3$；

(6) $x^2<9$.

解 (1) 由 $|x|\leqslant 1$，利用绝对值知识，可得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，于是

$$\{x\,|\,|x|\leqslant 1\}=[-1,1].$$

(2) 由 $|x+1|\leqslant 1$，可得 $-1\leqslant x+1\leqslant 1$ 或 $-2\leqslant x\leqslant 0$，于是

$$\{x\,|\,|x+1|\leqslant 1\}=[-2,0].$$

(3) 由 $|x-a|<\varepsilon$,可得 $-\varepsilon<x-a<\varepsilon$ 或 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$,于是

$$\{x \mid |x-a|<\varepsilon\}=(a-\varepsilon,a+\varepsilon).$$

所求集合即为以 a 为中心、以 ε 为半径的邻域(a 的 ε 邻域).

(4) 由 $|x|>b$,可得 $x>b$ 或 $x<-b$,

因此 $$\{x \mid |x|>b\}=(-\infty,-b)\cup(b,+\infty).$$

(5) 由 $|x+2|>3$,可得 $x+2>3$ 或 $x+2<-3$,即 $x>1$ 或 $x<-5$,

因此 $$\{x \mid |x+2|>3\}=(-\infty,-5)\cup(1,+\infty).$$

(6) 由 $x^2<9$,可得 $|x|<3$,故有

$$\{x \mid x^2<9\}=(-3,3).$$

习题 1.1

1. 用区间表示满足下面不等式的变量的变化范围:

(1) $-2<x\leqslant 4$;　　(2) $y\leqslant 0$;

(3) $z^2\leqslant 16$;　　(4) $|x-2|<3$;

(5) $|3y-2|\geqslant 1$;　　(6) $|x-x_0|<\delta$ ($\delta>0$,δ 与 x_0 均为常数).

2. 用区间表示下面的邻域:

(1) 1 的 0.01 邻域;　　(2) -2 的 1 000 邻域;

(3) 0 的 0.1 去心邻域;　　(4) -1 的 2 左邻域;

(5) x_0的 ε 右邻域($\varepsilon>0$);　　(6) x_0的 δ 去心邻域($\delta>0$).

第二节　函数概念

一、函数的定义

中学教学中,我们已接触过函数这一概念.这里,我们作一简要的复习,并着重指出其中一些要点.

在同一个经济现象中,往往同时有几个变量在变化着,这几个变量并不是孤立地在变,而是相互联系并遵循一定的变化规律.现在我们先就两个变量的情况(多于两个变量的情况将在第七章作介绍)举出几个例子.

【例 1-3】 考虑工厂生产某种产品的总成本 c 与该产品生产数量 q 之间的相依关系.它们之间的关系往往可以由下面的公式给定:

$$c=c_0+aq.$$

这里,c_0是生产该产品的固定成本,它与生产出多少个产品无关,为一常数;a 是每生产一个产品的成本,也为一个固定的常数.当生产数量 q 在 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个整数值时,由上式就可以确定此时的总成本的相应数值.

【例 1-4】 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在百公里以内，每公里 5 元；超过百公里时，超过部分每公里为 4 元. 考虑运价 M 和里程 s 之间的相依关系.

它们的相依关系是：

当 s 不超过 100 时，$M=5s$；

当 s 超过 100 时，$M=500+4(s-100)=4s+100$.

显然，里程数 s 在 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上面的计算方法可以确定此时运价的相应数值.

【例 1-5】 用铁皮做一个容积固定为 V_0（立方厘米）的圆柱形带盖罐头筒. 考虑罐头筒的铁皮用料 S（平方厘米）与罐头筒底半径 r（厘米）之间的相依关系，显然罐头筒的表面积即铁皮用料

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

而其中，

$$h = \frac{V_0}{\pi r^2},$$

故铁皮用料 S 与筒底半径 r 之间的相依关系可由下面的公式给定：

$$S=2\pi r^2+\frac{2V_0}{r}.$$

当底半径 r 在 $(0,+\infty)$ 中任意取定一个数值时，罐头筒的铁皮用料可由以上公式确定出相应的数值.

抽出上面几个例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的明确的相依关系或明确的对应规律，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量根据这种对应规律就有一个确定的值与之对应. 两个变量的这种对应关系就是我们常说的函数概念的实质.

定义 1.1　若有两个变量 x 和 y，变量 x 的变化范围为实数集合 X. 如果对于 X 中的每一个 x 值，按照某一明确的对应规律 f，都可以唯一地确定变量 y 相应的实数取值，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x), x\in X.$$

其中变量 x 称为自变量，实数子集 X 称为该函数的定义域，变量 y 称为因变量.

二、函数的表示法

在说明两个变量中一个变量是另一个变量的函数时，关键的问题是应说明：

1. 定义域 X

由于定义域 X 是一个实数子集，所以它的常见表示法为集合表示形式，例如：

$$X = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\} \text{ 以及 } X = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 2 \text{ 或 } x \leqslant -1\} \text{等}.$$

另一种常用的表示定义域的形式为区间（开，闭或半开半闭）表示法，例如上面的集合表示形式可改写为：

$$X = (0,1) \text{ 或 } X = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \text{ 等}.$$

在实际问题中,函数的定义域可以根据问题的实际意义来确定. 例如前面的例 1 - 3 与例 1 - 4 中,函数的定义域均为 $X=(0,+\infty)$,而例 1 - 1 中函数的定义域应为 $X=\mathbf{Z}^{+}$($\mathbf{Z}^{+}$ 表示正整数集合).

2. 函数的对应规律 f

函数的对应规律 f 最重要的表示法是解析表示法. 它指示出,对 x 的给定数值必须进行哪些数学运算,才可以得出 y 的对应数值. 这里所说的"数学运算",只限于加、减、乘、除、乘方、开方、指数、对数、三角函数和以后将提到的反三角函数运算(以后,随着我们微积分知识的发展,还可以加入其他的运算,例如极限运算、定积分运算等).

如果不考虑实际问题的背景,只从数学意义上(即数学运算的合理性)来考虑问题,一个用解析表示法来表明对应规律的函数,它的定义域通常认为就是自变量所能取的、使对应规律表示法中所有数学运算均有意义的一切实数所组成的数集. 例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1,1]$,函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1,1)$. 这种函数定义域,通常称之为自然定义域,或者在不致引起混淆时,简称为定义域. 由于自然定义域在数学意义上是一个完全确定的数集,为了今后叙述方便,我们规定:自然定义域可以略写. 当然,如果必须考虑问题的实际意义,并且此时实际意义的定义域与自然定义域不一样时,则应明确表示清楚,不能略写,以免引起混淆.

【例 1 - 6】 求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}$ 的(自然)定义域.

解 求 $y=\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域,即求不等式 $x^2-x-6\geqslant 0$ 的解. 解之,得

$$(x-3)(x+2)\geqslant 0,$$
$$-\infty<x\leqslant -2 \text{ 或 } 3\leqslant x<+\infty,$$

故得定义域

$$X=(-\infty,-2]\cup[3,+\infty).$$

【例 1 - 7】 确定 $f(x)=\dfrac{x+1}{\lg(4-x^2)}$ 的(自然)定义域.

解 求 $f(x)$ 的定义域,即求满足

$$\begin{cases}4-x^2>0,\\ \lg(4-x^2)\neq 0\end{cases}$$

的所有 x 的数集. 解之,得

$$\begin{cases}-2<x<2,\\ x\neq\pm\sqrt{3},\end{cases}$$

由此,所求的定义域

$$X=\{x\mid -2<x<2, \text{且 } x\neq\pm\sqrt{3}\},$$

或者写为

$$X=(-2,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2).$$

【例 1-8】 下列各组函数是否是相同函数？

(1) $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$；

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$；

(3) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$；

(4) $f(x)=\sqrt[6]{x^2}$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

解 (1) 因 $f(x)=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，即它们的定义域不同，故不是相同函数.

(2) 因 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=|x|$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，且对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $\sqrt{x^2}=|x|$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应规律亦相同，故它们是相同函数.

(3) 因 $f(x)=\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)=2\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，即它们的定义域不同，故不是相同函数.

(4) 尽管 $f(x)=\sqrt[6]{x^2}$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，但当 $x<0$ 时，例如取 $x=-1$，$f(-1)=\sqrt[6]{(-1)^2}=1$，$g(-1)=\sqrt[3]{-1}=-1$，即 $f(-1)\neq g(-1)$，也就是说它们的对应规律不相同，故它们不是相同函数.

【例 1-9】 设函数 $y=f(x)=2x^2+x+1$，指出函数对应关系 f 的意义，并求 $f(-1)$，$f(x_0)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 和 $f(f(x))$ 的值.

解 所给函数的对应关系 f 是用解析表达式给出的. 自变量 x 通过一连串代数运算而得到函数值 y. 具体而言，f 作用于“$(\cdot)$”的意义是

$$f(\cdot)=2(\cdot)^2+(\cdot)+1.$$

现令 $(\cdot)$ 为 (-1)，则得

$$f(-1)=2(-1)^2+(-1)+1=2;$$

若令 $(\cdot)$ 为 (x_0)，则得

$$f(x_0)=2(x_0)^2+(x_0)+1=2x_0^2+x_0+1;$$

若令 $(\cdot)$ 为 $\left(\dfrac{1}{x}\right)$，则得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=2\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)+1=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+1;$$

若令 $(\cdot)$ 为 $f(x)$，则得

$$\begin{aligned}f(f(x))&=2(f(x))^2+(f(x))+1\\&=2(2x^2+x+1)^2+(2x^2+x+1)+1\\&=8x^4+8x^3+12x^2+5x+4.\end{aligned}$$

【例 1-10】 设 $f(x+1)=x^2+2x$,求:

(1) $f(x)$;

(2) $f(\sin x)$.

解 (1) 令 $x+1=t$,则 $x=t-1$. 故

$$f(t)=f(x+1)=x^2+2x=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1.$$

由于函数的对应规律与自变量所采用的字母无关,所以改写自变量 t 为 x,得

$$f(x)=x^2-1.$$

(2) 由(1)得 $f(t)=t^2-1$.

以 $\sin x$ 替代 t,得

$$f(\sin x)=(\sin x)^2-1=-\cos^2 x.$$

在用解析表示法表示一个函数时,还可以对它在定义域内自变量 x 不同的值,用两个或两个以上的数学运算表达式来表明它的对应规律.这样表示出的函数,形式上(但不是分类意义上)有一个方便的名称,称之为分段函数.例如:

$$g(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

和

$$h(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

都是定义在实数集 **R** 上的分段函数,它们的函数图像如图 1-4 和 1-5 所示.

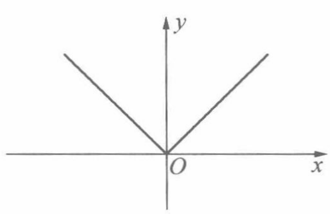

图 1-4

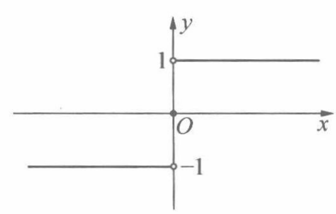

图 1-5

【例 1-11】 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0, \\ 0, & \text{当 } x=0, \end{cases}$$

求 $\dfrac{f(t)-f(0)}{t}\ (t\neq 0)$.

解 因为 $t\neq 0$，故 $f(t)=t^2\cdot\sin\frac{1}{t}$. 又因 $f(0)=0$，故

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{t^2\cdot\sin\frac{1}{t}-0}{t}=t\cdot\sin\frac{1}{t}.$$

【例 1-12】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin x, & x\leqslant 0,\\ 2x+3, & x>0,\end{cases}$ 试问：$f(x+2)=\begin{cases}(x+2)^2\sin(x+2), & x\leqslant 0,\\ 2(x+2)+3, & x>0\end{cases}$ 对吗？为什么？

解 题中的函数是用分段表达式给出的，所求的函数值应视自变量取值范围而定，不能像用一个解析式表示的函数那样简单地代入自变量求值. 正确的做法是：

当 $x+2\leqslant 0$ 即 $x\leqslant -2$ 时，有

$$f(x+2)=(x+2)^2\sin(x+2);$$

当 $x+2>0$ 即 $x>-2$ 时，有

$$f(x+2)=2(x+2)+3.$$

由此，

$$f(x+2)=\begin{cases}(x+2)^2\sin(x+2), & x\leqslant -2,\\ 2(x+2)+3, & x>-2.\end{cases}$$

【例 1-13】 设 $f(x+2)=\begin{cases}3x-2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2-1, & -1\leqslant x<0,\end{cases}$ 求 $f(x)$.

解 令 $t=x+2$，则 $x=t-2$.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，即 $0\leqslant t-2\leqslant 1$ 或 $2\leqslant t\leqslant 3$ 时，有

$$f(t)=f(x+2)=3x-2=3(t-2)-2=3t-8;$$

当 $-1\leqslant x<0$ 时，即 $-1\leqslant t-2<0$ 或 $1\leqslant t<2$ 时，有

$$f(t)=f(x+2)=x^2-1=(t-2)^2-1=t^2-4t+3,$$

故

$$f(t)=\begin{cases}3t-8, & \text{当 } 2\leqslant t\leqslant 3,\\ t^2-4t+3, & \text{当 } 1\leqslant t<2.\end{cases}$$

由于函数的对应规律与自变量所采用的字母无关，所以改写 t 为 x，得

$$f(x)=\begin{cases}3x-8, & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ x^2-4x+3, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$$

【例 1-14】 若 $f(x)=\begin{cases}-f(x-2), & x\geqslant 2\\ x+2, & x<2\end{cases}$，求 $f(19)$.

解 因为

$$\begin{aligned}f(19)&=-f(19-2)=-f(17)=-(-f(17-2))=f(15)=-f(15-2)\\&=-f(13)=-(-f(13-2))=f(11)=-f(11-2)=-f(9)\\&=-(-f(9-2))=f(7)=-f(7-2)=-f(5)=-(-f(5-2))\\&=f(3)=-f(3-2)=-f(1),\end{aligned}$$

而 $f(1)=1+2=3$，所以 $f(19)=-3$.

函数的对应规律常用表示法还有图像法和列表法.

图像法是指对于每一个 $x\in X$，相应地得到 y 后，将它们组成点的坐标，在直角坐标系平面上逐点描出这些点的集合. 通常，这些点组成一条曲线，称之为图像. 描出图像后，函数的定义域及函数的对应规律便能被直观、明了地表示出来了.

【例 1-15】 某工厂生产某产品最多每日生产 100 吨，生产该产品固定成本为 130 元，每生产 1 吨，需增加变动成本 6 元，则每日产品的总成本 y 是产量 x 的函数，图 1-6 作为该函数的图像表明了这个函数的定义域及其对应规律.

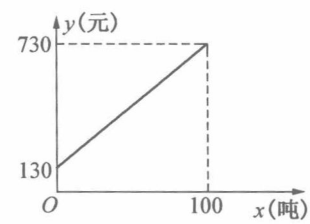

图 1-6

至于列表法，我们用下例来说明.

【例 1-16】 某城市一年里各月毛线的零售量如下表所示.

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 s（百公斤）	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

上表表示了某城市毛线零售量 s 随月份 t 而变化的函数关系，是列表表示函数的一个实例. 这里很明显地可以看出，它的定义域为

$$D(f)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\},$$

而函数对应规律规定为“从上格数找下格数”的方式.

函数对应规律的表示法除了以上 3 种之外，还有用语言直接叙述函数的定义域和对应规律的. 这种仅用文字表达函数的方法，我们也应该习惯它.

例如，“对于任何一个实数 x，舍去它的正小数部分，留下它的整数部分数值作为函数值.”这样的叙述已确定了一个函数：$y=f(x),x\in\mathbf{R}$. 这个函数由于经常被用到，被取名为实数 x 的取整函数，并在形式上记之为 $y=[x]$. 图 1-7 中画出了它的图像.

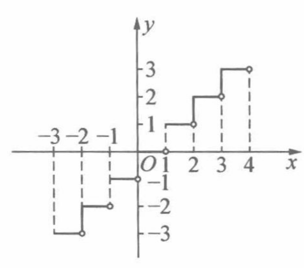

图 1-7

又如，“对于任何一个实数 x，如果它是有理数，则函数值 y 取为 1；如果它是无理数，则函数值 y 取为 0.” 这样的叙述也