教师专业发展学校探索书系

CHUZHONG JINGSAI SHUXUE ZHUANTI XUANJIANG

初中竞赛数学专题选讲

张磊 编著

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

初中竞赛数学专题选讲

CHUZHONG JINGSAI SHUXUE ZHUANTI XUANJIANG

教师专业发展学校探索书系

张　磊　编著

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

初中竞赛数学专题选讲/张磊编著．—广州：暨南大学出版社，2012.12
（教师专业发展学校探索书系）
ISBN 978－7－5668－0442－6

Ⅰ．①初…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①中学数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ．①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 297773 号

出版发行：暨南大学出版社

地　址：中国广州暨南大学
电　话：总编室（8620）85221601
　　　　营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
邮　编：510630
网　址：http://www.jnupress.com　http://press.jnu.edu.cn

排　版：广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　刷：湛江日报社印刷厂

开　本：787mm×960mm　1/16
印　张：21.125
字　数：395 千
版　次：2012 年 12 月第 1 版
印　次：2012 年 12 月第 1 次

定　价：39.80 元

前言

数学竞赛既是发现人才的有效手段，又是青少年锻炼思维、发展智力的有效途径．初中数学竞赛以其在学生发展过程中的黄金段位置而为我们所重视，几乎每一所中学、每一位中学生的家长都会把目光聚焦到数学竞赛这一智力角逐的奥林匹克运动中，并期望孩子取得理想的成绩．但在我们看来，初中数学竞赛绝非只是为那些摘得金牌的学生而设，它应是一种群众性的健身运动，即每一个锻炼者都能从中获得进益和发展，最终铸造良好的学习品质和思维结构．因此，本书旨在拓宽中学生的知识视野，激发其学习兴趣，培养其思维能力和动手能力，发展其个性特长；同时，也期望能对中学数学教师自身素质的提高、中学数学教学改革的深入开展和中学数学教学质量的提高，起到积极的促进作用．

基于上述思想，同时参照《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》和中国数学会普及工作委员会制定的《初中数学竞赛大纲》，本书的编写力求体现以下特色：

（1）导向性和新颖性．全书内容全面地反映了近几年初中数学竞赛所考查的知识点、解题策略和经典题型，从而可以为我们勾勒出未来初中数学竞赛命题的走向与原则．全书的例题和习题均是经过精心筛选的近年来国际国内竞赛试题，不仅具有代表性和全面性，而且具有时效性，内容新鲜，题目新颖，讲解精彩有趣．

（2）精练性和多解性．全书所选试题在排列上遵循循序渐进的总原则，由浅入深，从简单到复杂，具体来说力求做到：①精与全相结合．本书所选试题题型多样，且多是初中数学竞赛中有多解的题目．②常规解法与非常规解法相结合．在试题解法上，不仅尽量给出其同类型题目普遍使用的解法，而且尽可能依据该题特点给出处理该题的独特解法．③重视基础与提高能力相结合．从本书选题内容上看，不轻视涉及课本及初中数学竞赛的基本内容的题目，也不放弃初中数学竞赛试题中涉及知识面广、内容深的难题和“怪题”，但“难题”有规律，“怪题”不超纲．

（3）实用性与反馈性．本书每章每节后都有针对性和层次性的练习题，

并附有详细的解析过程，可供学生进行测试以及在对照答案后得到一定的提升，同时也便于家长和教师开展对学生掌握水平的评价.

本书的编写得到了韩山师范学院教务处、韩山师范学院数学与应用数学系及潮州市金山实验学校相关领导和教师的大力支持，在此，谨表示衷心的感谢！此外，在整个编写过程中，韩山师范学院数学与应用数学系 2009 级的廖彦淳、朱晓敏、林曼洁和黄晓燕也付出了很多的努力，在此，亦表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，编写时间紧迫，错误在所难免，欢迎广大读者批评指正.

韩山师范学院　张　磊

2012 年 10 月

目　录

第一章　方程与不等式专题

第一讲　函数与方程、不等式的结合

知识梳理

1. 任何一个一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，都可用配方法将其变形为 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. 因为 $a\neq0$，所以 $4a^2>0$.

   (1) 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

   (2) 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

   (3) 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

2. 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根为 x_1、x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$. 特别地，若 $x^2+px+q=0(a\neq0)$ 的两根为 x_1、x_2，则 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$. 这是一元二次方程的根与系数的关系，通常称为韦达定理.

3. 如果两个数的和为 m，两个数的积为 n，则以这两个数为根的一元二次方程为 $x^2-mx+n=0$. 换言之，这两个数是一元二次方程 $x^2-mx+n=0$ 的两个根，这就是构造一元二次方程解题的方法.

4. 不等式的性质：

   (1) 若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$；

   (2) 若 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$；

   (3) 若 $a>b>0$，$0<c<d$，则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$；

   (4) 若 $a>b$，$ab>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

5. 运用函数思想和方程（不等式）思想解题的基本思路：

   (1) 明确题中所给条件和所求的目标，分析已给出的条件和所求目标的特点与性质，理解条件或目标在图形中的重要几何意义或在代数中的重要意义；

   (2) 用已学过的知识正确地将题中用到的图形用代数式或几何图形（及其

图像特点）表达出来；

（3）根据条件和结论的联系，利用相应的公式或定理解题．

6. 解题中还应注意转化过程要等价，避免定义域扩大或缩小；注意图形的存在合理性，不可“无中生有”；注意仔细观察图像，避免漏掉一些可能的情形．

初中代数内容中“方程”、“函数”是核心，同时函数又是代数的“纽带”，代数式、方程、不等式等都与函数知识有直接的联系．函数思想和方程（不等式）思想有助于我们用联系与变化的观点更加全面、简洁地解答非函数问题；或由相关方程、不等式也可帮助我们构造函数模型解题．这也体现了数学中的数形结合与转化的思想．华罗庚先生曾说过：“数与形本是两依倚，焉能分作两边飞，数缺形时少直观，形少数时难入微．”通过“以形助数”或“以数解形”，从而利用数形的辩证统一，使复杂的问题简单化，抽象的问题具体化，起到优化解题途径的目的．

例题精讲

【例1】（2008年“五羊杯”数学竞赛初三试题第3题）若$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}=1$，则$x$、$y$、$z$中，正数的个数为（　　）．

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

【答案】B.

【分析】要对x、y、z中正数的个数进行讨论，可考虑构造一个含有x、y、z的函数关系式，并巧妙运用已知的关系式进行等价变形．

【解析】$\because \frac{1}{x+y+z}=1$，

对于关于m的函数

$y=(m-x)(m-y)(m-z)=m^3-(x+y+z)m^2+(xy+yz+zx)m-xyz$，

有$y=m^3-m^2+xyz(m-1)$.

故当$m=1$时，$y=0$，即$(1-x)(1-y)(1-z)=0$，因此x、y、z中必有一个数为1，又$x+y+z=1$，所以另外两个数之和为零，只能一正一负（显然x、y、$z\neq0$）．总之，x、y、z中必然有两个为正数，另一个为负数．

【点评】本题的考查重点是方程与函数相互转换的思想，即巧妙构造相应的函数，将方程问题转化为函数问题并运用已知关系式的等价变形进一步

解题.

【例 2】（2008 年全国初中数学联赛第二试第 1 题）已知 $a^2+b^2=1$，对于满足条件 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的一切实数，不等式 $a(1-x)(1-x-ax)-bx(b-x-bx)\geqslant 0$①恒成立，当乘积 ab 取最小值时，求 a、b 的值.

【分析】 本题可用已知等式代入不等式得到关于 x 的一元二次函数式，进而通过对其函数图像开口方向、顶点坐标、判别式的讨论得到 ab 的最小值.

【解析】 整理不等式①并将 $a^2+b^2=1$ 代入，得

$(1+a+b)x^2-(2a+1)x+a\geqslant 0$　②

在不等式②中，令 $x=0$，得 $a\geqslant 0$；令 $x=1$，得 $b\geqslant 0$.

易知 $1+a+b>0$，$0<\dfrac{2a+1}{2(1+a+b)}<1$，

故二次函数 $y=(1+a+b)x^2-(2a+1)x+a$ 的图像（抛物线）的开口向上，且顶点的横坐标在 0 和 1 之间. 由题设知，不等式②对于满足条件 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的一切实数 x 恒成立，所以它的判别式

$\Delta=(2a+1)^2-4(1+a+b)a\leqslant 0$，即 $ab\geqslant\dfrac{1}{4}$，

由方程组 $\begin{cases}a^2+b^2=1\\ ab=\dfrac{1}{4}\end{cases}$　③　消去 b，

得 $16a^4-16a^2+1=0$，所以 $a^2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$或 $a^2=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$，

又因为 $a\geqslant 0$，所以 $a=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$或 $a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

于是方程组③的解为

$$\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ b=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}\text{或}\quad\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ b=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}.$$

所以 ab 的最小值为$\dfrac{1}{4}$，此时 a、b 的值有两组，分别为

$a=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$b=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$和 $a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$b=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

【点评】 在求不等式最值问题时，有时可根据题目所给的条件，采用函数法解题，即将不等式转化为常见的一元二次函数，通过对其函数图像开口

方向、顶点坐标、对称轴及与坐标轴交点等的讨论间接解题.

【例3】（2004年数学竞赛试题）已知 $a<0$，$b\leqslant 0$，$c>0$，且 $\sqrt{b^2-4ac}=b-2ac$，求 b^2-4ac 的最小值.

【分析】观察已知等式 $\sqrt{b^2-4ac}=b-2ac$ 可联想到一元二次函数中的根的判别式，构造与 a、b、c 相关的一元二次函数，进而根据图像及对称轴的特点进行讨论解题.

【解析】令 $y=ax^2+bx+c$，由 $a<0$，$b\leqslant 0$，$c>0$，判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，所以这个二次函数的图像是一条开口向下的抛物线，且与 x 轴有两个不同的交点 A（x_1，0），B（x_2，0），因为 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$，不妨设 $x_1<x_2$，

则 $x_1<0<x_2$，对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}\leqslant 0$，

于是 $|x_2|=\left|\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=c$.

所以 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}\geqslant c=\dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\geqslant -\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，故 $b^2-4ac\geqslant 4$.

当 $a=-1$，$b=0$，$c=1$ 时，等号成立，所以 b^2-4ac 的最小值为4.

【点评】本题以一般的一元二次函数为解题模型，其中渗透着函数图像特点、根与系数关系等知识点，最后巧妙运用放缩法求解出 b^2-4ac 的最值.

【例4】已知关于 x 的方程 $x^2+2(m+3)x+m^2-4=0$ 至少有一个正数根，求 m 的取值范围.

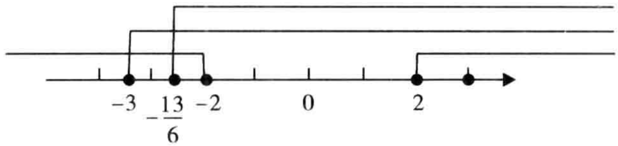
【分析1】本题从已知的正数根入手较难直接求解，可从反面假设方程的两根均是负数或0，再借助数轴求解符合条件的不等式，即可解答.

【解析1】设方程的两根均是负数或0，则有

$$\begin{cases}[2(m+3)]^2-4(m^2-4)\geqslant 0 & ①\\ -2(m+3)\leqslant 0 & ②\\ m^2-4\geqslant 0 & ③\end{cases}$$

不等式①的解集是 $m\geqslant -\dfrac{13}{6}$；不等式②的解集是 $m\geqslant -3$；不等式③化为 $m^2\geqslant 4$，即 $|m|\geqslant 2$，解集是 $m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$. 这个不等式组的解集是 $-\dfrac{13}{6}\leqslant m\leqslant -2$ 或 $m\geqslant 2$，在数轴上表示见图（a）.

本题所求 m 的取值范围应是方程有实数根（图中双线范围），但又是上述解集之外的部分，即 $-2<m<2$.



图（a）

【分析2】考虑到方程与函数之间的关系，本题还可以结合一元二次方程相对应的抛物线的判别式与图像性质，分情况讨论求解.

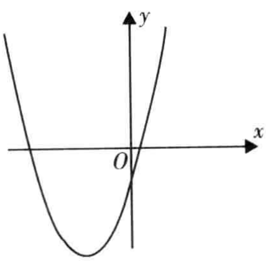
【解析2】本题相应的抛物线为 $y=x^2+2(m+3)x+m^2-4$，开口向上，满足条件的位置有两种情况：

（1）如图（b）所示，当 $x=0$ 时，函数值小于0，即 $m^2-4<0$　①

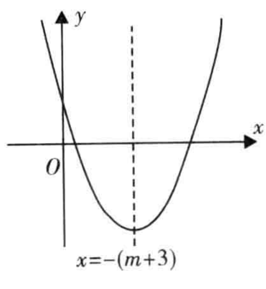
（2）如图（c）所示，当 $x=0$ 时，函数值不小于0，且对称轴在 y 轴的右侧，图像与 x 轴有交点，即

$$\begin{cases} m^2-4\geqslant 0 \\ -(m+3)\geqslant 0 \\ [2(m+3)]^2-4(m^2-4)\geqslant 0 \end{cases} \quad ②$$

不等式①的解集是 $-2<m<2$，不等式组②无解，所求 m 的取值范围应是 $-2<m<2$.



图（b）



图（c）

【解析3】根据题意，方程有实数根，即 $\Delta\geqslant 0$，分三种情况分别求解：

（1）方程一个根是正数，一个根是负数；

（2）方程一个根是正数，一个根是零；

（3）方程两个根都是正数，然后求出这些范围的总和，得到本题的答案.

【点评】解析 1 涉及"至少"的问题，可从问题的反面入手，即"两个根都是负数或 0"，继而在解不等式中得到本题的答案，这种解题方法可帮助学生从另一角度简便解题；解析 2 则体现了函数思想在方程解题中的简便运用，利用相对应的抛物线，通过讨论满足条件的函数图像解题；解析 3 则运用学生所熟悉的方程的根的情况进行解答，要求学生在分析讨论时做到不重不漏.

【例 5】（2008 年全国初中数学竞赛浙江赛区复赛试题）设二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0,\ c>1)$，当 $x=c$ 时，$y=0$；当 $0<x<c$ 时，$y>0$.

（1）试比较 ac 与 1 的大小，并说明理由；

（2）当 $x>0$ 时，求证：$\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x}>0$.

【分析】（1）小题要比较 ac 与 1 的大小，必须先建立两者间的联系，考虑到二次函数与一元二次方程是对应的这一特点，通过已知条件运用韦达定理即可解答；（2）小题要证明不等式成立，可通过分别讨论各个量的取值来判断不等式的符号.

【解析】（1）当 $x=c$ 时，$y=0$，即 $ac^2+bc+c=0$，所以 $c(ac+b+1)=0$.

又 $c>1$，所以 $ac+b+1=0$.

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根为 x_1、$x_2(x_1\leqslant x_2)$，

由 $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}>0$ 及 $x=c>1$，得 $x_1>0$，$x_2>0$.

又因为当 $0<x<c$ 时，$y>0$，所以 $x_1=c$，

于是二次函数 $ax^2+bx+c=0$ 的对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}\geqslant c$，即 $b\leqslant -2ac$，

所以 $b=-ac-1\leqslant -2ac$，即 $ac\leqslant 1$.

（2）因为 $0<x=1<c$ 时，$y>0$，所以 $a+b+c>0$.

由 $ac\leqslant 1$ 及 $a>0$，$c>1$，得 $0<a<1$. 因为

$$\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x}=\frac{(a+b+c)x^2+(a+2b+3c)x+2c}{x(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{(a+b+c)x^2+(a-2ac-2+3c)x+2c}{x(x+1)(x+2)}$$

而 $a+b+c>0$，$0<a<1$，$c>1$，$a-2ac-2+3c=(1-a)(2c-1)+(c-1)>0$，

所以当 $x>0$ 时，$\dfrac{(a+b+c)x^2+(a-2ac+3c-2)x+2c}{x(x+1)(x+2)}>0$，

即 $\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x}>0$.

【点评】这类问题通常综合性比较强，要求能综合地运用函数、方程、不等式等性质，解决这类问题通常可从函数的性质入手，利用二次函数、一元二次方程以及一元二次不等式之间的相互关系来找突破口.

全能练习

A 组

1. 若方程 $3x+by+c=0$ 与 $cx-2y+12=0$ 的图形重合，设 n 为满足上述条件（b，c）的组数，则 n 等于（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 有限多个，但多于 2

2. （2005 年全国初中数学联赛 E 卷试题）若 $\alpha=3+2\sqrt{2}$，$\beta=3-2\sqrt{2}$，已知 $\alpha^{10}+\beta^{10}$是一个正整数，则它的末尾数字是（　　）.

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

3. 已知 $a^2+b^2=1$，$a>0$，$b>0$，求代数式 $M=a^2b^2+(a+b)^2-3$ 的取值范围.

4. 化简：$m=\dfrac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$，其中 a、b、c 两两互不相等.

5. 已知 $a+b+c=a^2+b^2+c^2=2$，求证：$a(1-a)^2=b(1-b)^2=c(1-c)^2$.

6. 设 $u=ax+2a+1$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，则 u 的值有正有负，求 a 的范围.

7. （2006 年上海市初中数学竞赛试题）关于 x、y、z 的方程组 $\begin{cases}3x+2y+z=a\\ xy+2yz+3zx=6\end{cases}$，有实数解（$x$，$y$，$z$），求正实数 a 的最小值.

8. （2007 年全国初中数学竞赛 B 卷试题）实数 a、b、c 满足 $a\leqslant b\leqslant c$，且 $ab+bc+ca=0$，$abc=1$. 求最大的实数 k，使得不等式 $|a+b|\geqslant k|c|$恒成立.

9. 已知实系数一元二次方程 $ax^2+2bx+c=0$ 有两实根，x_1、x_2，设 $d=|x_1-x_2|$，求 $a>b>c$ 且 $a+b+c=0$ 时，d 的取值范围.

10. 实数 a、b、c 满足$(a+c)(a+b+c)<0$，证明$(b-c)^2>4a(a+b+c)$.

11. （2005 年全国初中数学联赛决赛试题）已知 a、b、c 为实数，$ac<0$，且$\sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c=0$. 证明：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有大于$\dfrac{3}{4}$而小于 1 的根.

12. 当 m 取何值时，关于 x 的方程 $(m-1)x^2+(3m+2)x+2m-1=0$ 有一个根大于1，另一个根小于1？

B组

1. 记 $f(x)=x^2+bx+c$，若方程 $f(x)=x$ 没有实数根，则方程 $f(f(x))=x$［注：$f(f(x))$ 的意义是用 $f(x)$ 代替 x^2+bx+c 中的 x 所得到的表达式］（　　）.

   A. 有4个实数根　　B. 有2个实数根

   C. 有1个实数根　　D. 没有实数根

2. （2005年四川省初中数学竞赛试题）已知关于 x 的二次方程 $m^2x^2+2(3-m)x+1=0$ 的两个实数根的倒数之和为 S，求 S 的取值范围.

3. （全国初中数学联赛试题）已知 b、c 为整数，方程 $5x^2+bx+c=0$ 的两根都大于 -1 且小于0，求 b 和 c 的值.

4. （2006年全国初中数学竞赛第12题）设 a、b、c 为互不相等的实数，且满足关系式 $b^2+c^2=2a^2+16a+14, bc=a^2-4a-5$，求 a 的取值范围.

5. 证明：m 取任何非零实数，函数 $y=mx(x-2)+1$ 的图像总经过两个定点，并求出这两个定点的坐标.

6. 已知直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 交于点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$. 求 $2x_1y_2-5x_2y_1$ 的值.

7. （第六届“希望杯”八年级第二试试题）已知 a、b、c 都是正数，且关于 x 的方程 $(c+a)x^2+2bx+(c-a)=0$ 有两个相等的实数根，问：a、b、c 可否作为一个三角形的三边的长？如果可以，它是什么形状的三角形？为什么？

8. （2007年全国初中数学联合竞赛试题）设 m、n 为正整数，且 $m\neq 2$，二次函数 $y=x^2+(3-mt)x-3mt$ 的图像与 x 轴的两个交点间的距离为 d_1，二次函数 $y=-x^2+(2t-n)x+2nt$ 的图像与 x 轴的两个交点间的距离为 d_2. 如果 $d_1\geqslant d_2$ 对一切实数 t 恒成立，求 m、n 的值.

9. 设 a、b 是整数，$f(x)=x^2+ax+b$. 证明：若对于所有整数 x，都有 $f(x)>0$，则对于所有实数 x，有 $f(x)\geqslant 0$.

10. 已知抛物线 $y=x^2$ 与动直线 $y=(2t-1)x-c$ 有公共点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，且 ${x_1}^2+{x_2}^2=t^2+2t-3$. 求实数 t 的取值范围.

11. 已知 a、b、c 为正实数，关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根的绝对值均小于 $\dfrac{1}{3}$，求 $a+b+c$ 的最小值.

12. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(3m+2)x+2m+2=0(m>0)$.

（1）求证：方程有两个不相等的实数根；

（2）设方程的两个实数根分别为 x_1、x_2（其中 $x_1<x_2$），若 y 是关于 m 的函数，且 $y=x_2-2x_1$,求这个函数的解析式；

（3）在（2）的条件下，当自变量 m 的取值范围满足什么条件时，$y\leqslant 2m$.

第二讲　分类讨论法

知识梳理

1. 在解题过程中，当所面临的问题包含多种可能情形，难以统一处理时，就需按所有可能出现的情况进行分类讨论，综合得出问题的正确答案，我们把这种解题方法称为分类讨论法. 它体现了数学中化整为零、积零为整的思想与归类整理的方法.
2. 分类讨论法的适用题型：

（1）概念型：一般情况下，问题所涉及的数学概念是分类进行定义的；

（2）性质型：问题中涉及数学定理、公式和运算性质、法则有范围或者条件限制，或者分类给出；

（3）含参型：解含有参数的题目时，必须根据参数的不同取值范围进行讨论；

（4）其他：包含某些不确定的数量、不确定的图形的形状或位置、不确定的结论等题型.

3. 分类讨论法的基本方法与步骤：

（1）确定讨论对象以及讨论对象的全体范围；

（2）确定分类标准，进行合理分类，做到不漏不重；

（3）对所分类逐步进行讨论，分级获取阶段结果；

（4）进行归纳小结，综合得出结论.

4. 采用分类讨论法解题，一方面可将复杂的问题分解成若干个简单的问题，另一方面恰当的分类可避免丢值漏解，从而提高学生全面考虑问题的能力，提高周密严谨的数学教养，训练人的思维条理性和概括性.

分类讨论的思想方法是中学数学的基本方法之一，在近几年的初中奥数竞赛中都有考查，题型以选择题和大题为主，体现了其重要的地位. 分类讨论的

思想方法不仅具有明显的逻辑性、题型覆盖知识点较多、综合性强等特点，而且还有利于对学生分析能力和分类技巧的考查．初中阶段分类讨论的思想实质就是根据数学问题中的各种条件的限制及变动而采取的化整为零、各个突破的解题手段．主要考查的知识点有方程（组）、不等式（组）和含绝对值的方程及不等式等的相关性质，对学生的综合分析能力要求较高，需要学生加以重视并熟悉掌握分类讨论法的解题基本方法和实际应用.

例题精讲

【例1】（2010年全国初中数学联赛第1题）若 a、b、c 均为整数且满足 $(a-b)^{10}+(a-c)^{10}=1$，则 $|a-b|+|b-c|+|c-a|=$ __________.

【分析】题目中由于限定了 a、b、c 是整数，所以必须讨论 $a-b$，$a-c$ 有可能的取值，这时我们应该采用分类讨论的思想，将 $a-b$，$a-c$ 所有可能的取值一一进行讨论，再化简题中所要求的含有绝对值的等式.

【解析】因为 a、b、c 均为整数，所以 $a-b$ 和 $a-c$ 均为整数，从而由 $(a-b)^{10}+(a-c)^{10}=1$ 可得 $\begin{cases}|a-b|=1\\|a-c|=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|a-b|=0\\|a-c|=1\end{cases}$.

若 $\begin{cases}|a-b|=1\\|a-c|=0\end{cases}$，则 $a=c$，

从而 $|a-b|+|b-c|+|c-a|=|a-b|+|b-a|+|a-a|=2|a-b|=2$.

若 $\begin{cases}|a-b|=0\\|a-c|=1\end{cases}$，则 $a=b$，

从而 $|a-b|+|b-c|+|c-a|=|a-a|+|a-c|+|c-a|=2|a-c|=2$.

因此，$|a-b|+|b-c|+|c-a|=2$.

【点评】本题考查了含绝对值等式的相关知识，根据学生已有的知识水平，找到本题的突破口并不难，但易在进行分类讨论的时候出现遗漏情况或在等式化简时出错，这需要学生耐心细致地解答.

【例2】（2009年"希望杯"数学邀请赛初二第二试第8题）若不等式组 $\begin{cases}-x+4m<x+10\\x+1>m\end{cases}$ 的解集是 $x>4$，则（　　）.

A. $m<\dfrac{9}{2}$　　B. $m<5$　　C. $m=\dfrac{9}{2}$　　D. $m=5$