主　编　林　锰
副主编　杨丽宏

矩阵论教程

JUZHENLUN JIAOCHENG

国防工业出版社
National Defense Industry Press

矩阵论教程

主　编　林　锰
副主编　杨丽宏
参　编　王　锋　李　斌　吴红梅

国防工業出版社
·北京·

内容简介

本书共分七章，主要包括线性空间与线性映射、内积空间与赋范线性空间、特殊矩阵与方阵的标准型、矩阵分解、矩阵的广义逆矩阵、矩阵分析及矩阵多项式与矩阵函数等内容，便于根据不同对象、学时和要求进行取材和教学。此外，各章均配有一定数量的习题，以方便读者学习本课程。

本书既可作为工科及理科高年级本科生、研究生的教材，也可作为教师和科技工作者从事科学研究的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论教程/林锰主编. —北京：国防工业出版社，2012.8

ISBN 978-7-118-08236-4

Ⅰ.①矩... Ⅱ.①林... Ⅲ.①矩阵论—教材 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 160941 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 12¾ 字数 239 千字

2012 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 **定价** 24.00 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)88540777 投稿电话：(010)88540632

发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前　言

伴随着自然科学、工程技术、经济和管理科学的迅速发展,矩阵理论在数学学科与其他科学技术领域中都有着广泛的应用,甚至在经济管理、社会科学等方面,矩阵的理论和方法也起着十分重要的作用,所以,学习和掌握矩阵的基本理论和方法,对于将来从事工程技术工作的工科研究生来说也是必不可少的。

本书共分七章,较全面、系统地介绍了与工程技术联系密切、应用广泛的矩阵理论与方法,对线性空间与线性变换、内积空间与赋范线性空间、特殊矩阵与方阵的标准型、矩阵分解、矩阵的广义逆矩阵、矩阵分析、矩阵多项式与矩阵函数等作了较为详细的讨论。同时编写过程中力求具有一定的理论深度并做到深入浅出、简明易懂、深度与广度适中。

本书可作为工科院校研究生和高年级本科生的教材,编写时参照工科研究生课程的基本要求,可以满足讲授48学时和32学时的矩阵论分层教学的需要,任课教师可以灵活掌握。本书也可作为有关专业的教师及工程技术人员的参考书,学习本书的读者,只需掌握线性代数、高等数学和少量的复变函数知识即可。

本书由林锰主编,第一、三、七章由林锰编写,第二章由李斌、杨丽宏编写,第四章由吴红梅编写,第五章由王锋编写,第六章由杨丽宏编写。

哈尔滨工程大学的卜长江教授对本书原稿提出了很多宝贵的意见和建议,同时,哈尔滨工程大学理学院的领导和相关专业教师十分关心本书的出版并给予大力支持,在此表示感谢。

限于编者水平,书中难免有很多不足之处,祈望国内同行与读者批评指正。

编　者

符 号 说 明

$\bar{\boldsymbol{A}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$\boldsymbol{A}^{+}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 M－P 逆
$\boldsymbol{A}^{-}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{1\}$逆
$\boldsymbol{A}^{(i,j,k)}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i,j,k\}$逆
$\boldsymbol{A}\{i,j,k\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i,j,k\}$逆的集合
$\boldsymbol{A}^{\#}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的群逆
$\boldsymbol{E}$	单位矩阵
$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Kronecker 积
$\det\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$\rho(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\\|\boldsymbol{A}\\|$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数
$R(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域(列空间)
$N(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核空间
V_{λ}	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的关于特征值 λ 的特征子空间
$\mathbf{R}$	实数域
R^{n}	实 n 维列向量空间
$R^{n\times m}$	实 $n\times m$ 矩阵集合
$R_{r}^{n\times m}$	秩为 r 的实 $n\times m$ 矩阵集合
$\mathbf{C}$	复数域
C^{n}	复 n 维列向量空间
$C^{n\times m}$	复 $n\times m$ 矩阵集合
$C_{r}^{n\times m}$	秩为 r 的复 $n\times m$ 矩阵集合
$U^{n\times n}$	n 阶酉矩阵的集合
$E^{n\times n}$	n 阶正交矩阵的集合
$\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$	以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为对角线元　素的 n 阶对角矩阵
$\mathrm{span}[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n]$	由向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 生成的子　空间
$\mathrm{Re}z$	复数 z 的实部
$\mathrm{Im}z$	复数 z 的虚部

目　录

第一章　线性空间与线性映射

矩阵理论是研究空间形式和数量关系的重要工具,线性空间与线性映射是其中的基本研究对象。本章主要介绍线性空间、线性子空间、线性映射及其矩阵表示等基本概念和性质等。

1.1　线 性 空 间

我们从线性代数中了解到向量空间 R^n,从数学的角度看,它所涉及的是一个集合和一个数域,定义中有集合中元素的加法运算和数域中的数与集合中元素的数乘运算,由此推广和建立线性空间的概念。

1.1.1　线性空间的概念与性质

定义1　设 F 是至少包含两个数的数集,如果对 $\forall a,b\in F$,均有 $a\pm b,ab,\frac{a}{b}(b\neq 0)\in F$,则称 F 为数域。

常用的数域:有理数域 $\mathbf{Q}$;实数域 $\mathbf{R}$;复数域 $\mathbf{C}$。

定义2　设 V 是一个非空集合,F 是一个数域,

(1) 在 V 中定义一个"+"运算,使得对 $\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,有唯一的 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$,则称集合 V 对"+"运算是唯一和封闭的;

(2) 在集合 V 和数域 F 中定义一个"$*$"运算,使得对 $\forall \boldsymbol{\alpha}\in V,\lambda\in F$,有唯一的 $\boldsymbol{\sigma}=\lambda*\boldsymbol{\alpha}\in V$,则称集合 V 对"$*$"运算是唯一和封闭的。

定义3　设 V 是一个非空集合,F 是一个数域,若集合 V 对"+"和"$*$"运算是唯一封闭的,且 $\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$;$\forall k,l\in V$,满足如下八条法则:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) 在 V 中有一个元素 $\boldsymbol{\theta}$,s.t $\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$,都有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\alpha}$($\boldsymbol{\theta}$ 称为 V 的零元素);

(4) $\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$, $\exists \boldsymbol{\beta}\in V$,s.t $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}$($\boldsymbol{\beta}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素,记为 $-\boldsymbol{\alpha}$);

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

则称 V 为数域 F 上的线性空间,记为 $V(F)$,集合 V 中的元素,称为线性空间 $V(F)$ 中的元素或向量。

例 1 设 $C^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\mathbf{C}\}$是由全体 n 维复向量所构成的集合,对通常向量的加法和数乘运算构成复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间,称为复向量空间。

例 2 设 $C^{m\times n}=\{A_{m\times n}\mid A_{m\times n}=(a_{ij}),a_{ij}\in\mathbf{C},i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$,即 $C^{m\times n}$为所有的复 $m\times n$ 矩阵构成的集合,对通常矩阵的加法和数乘运算构成复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间,称为矩阵空间。

例 3 设 $F[x]_n=\{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\mid a_i\in F;i=0,1,2,\cdots,n\}$是由所有数域 F 上次数小于等于 n 的多项式全体构成的集合,对通常多项式的加法和数乘运算构成数域 F 上的线性空间,称为多项式空间。由 n 次多项式的全体构成的集合:$Q[x]=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\mid a_n\neq0,a_i\in F;i=0,1,2,\cdots,n\}$不构成线性空间。

例 4 设 $C[a,b]$为所有$[a,b]$区间的连续函数全体所构成的集合,对通常连续函数的加法和数乘运算构成相应数域 F 上的线性空间,称为函数空间。

对于数域 F 上的线性空间 $V(F)$,当数域 F 为实数域时,$V(F)$称为实线性空间;数域 F 为复数域时,$V(F)$称为复线性空间。经常省略 F,将数域 F 上的线性空间 $V(F)$简记为 V。

从上述的几个例子中可以看到,我们所常见的一些研究对象,如矩阵、函数等都可以在线性空间中作为一个向量来研究。另外,线性空间中的“加法”和“数乘”运算,已不再局限在数的加法、数乘的概念中。

例 5 设 $R^+=\{$全体正实数$\}$,其“加法”及“数乘”运算定义为:

$x\oplus y=xy$, $k\otimes x=x^k$,试证明:R^+是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间。

证明 首先需要证明两种运算的唯一性和封闭性。

唯一性显然;若 $x>0,y>0$, $k\in\mathbf{R}$,则有 $x\oplus y=xy\in R^+$,$k\otimes x=x^k\in R^+$,封闭性得证。

下面证明满足八条性质:

(1) $x\oplus(y\oplus z)=x(yz)=(xy)z=(x\oplus y)\oplus z$;

(2) $x\oplus y=xy=yx=y\oplus x$;

(3) $x\oplus 1=x\cdot 1=x$,所以,1 是零元素;

(4) $x\oplus\dfrac{1}{x}=x\cdot\dfrac{1}{x}=1$,所以,$\dfrac{1}{x}$是 x 的负元素;

(5) $k\otimes(x\oplus y)=(xy)^k=x^ky^k=(k\otimes x)\oplus(k\otimes y)$;

(6) $(k+l)\otimes x=x^{k+l}=x^kx^l=(k\otimes x)\oplus(l\otimes x)$;

(7) $k\otimes(l\otimes x)=(x^l)^k=x^{kl}=(kl)\otimes x$;

(8) $1 \otimes x = x^1 = x$;

由此可知,R^+是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间。

下面给出线性空间的简单性质。

定理 1 设 $V(F)$ 为线性空间,$\boldsymbol{x} \in V, k \in F$,则有如下性质:

(1) 零元素是唯一的,任一元素的负元素也是唯一的。

(2) $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}, k\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$。

(3) $(-1)\boldsymbol{x} = (-\boldsymbol{x})$。

(4) 若 $k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$,则一定有 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$。

证明略。

1.1.2 向量组的线性相关性

在给出线性空间的定义时我们曾经指出:线性空间中的元素也称为向量,这里所指的向量比线性代数中向量空间中的由 n 元数组所构成的向量的含义更为广泛。但线性相关的概念和结论却与其类似,下面只作简单的叙述。

定义 4 设 V 是数域 F 上的线性空间,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r \geqslant 1)$ 是 V 中的一组向量,$k_1, k_2, \cdots, k_r$ 是数域 F 上的一组数,若 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,也称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的线性组合。

例 6 在 $R^{2\times2}$ 中,向量 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$可由向量组$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$线性表示,即$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

定义 5 设 $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$;$\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$为线性空间 $V(F)$ 中的两个向量组,如果 $\boldsymbol{A}$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 向量组线性表示,则称向量组 $\boldsymbol{A}$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示,如果向量组 $\boldsymbol{A}$ 和向量组 $\boldsymbol{B}$ 可以互相线性表示,则称向量组 $\boldsymbol{A}$ 和向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价。

定义 6 设 V 是数域 F 上的线性空间,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r \geqslant 1)$ 是 V 中的一组向量,若存在数域 F 上的一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{\theta} \tag{1-1}$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,否则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关。

换言之,若由等式:$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{\theta}$ 可得到 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$,称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关。

给定 $V(F)$ 中的一组向量,都可以满足关系式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{\theta}$,因此考察一组向量的线性相关与否,关键并不在于向量组是否满足式(1-1),而在于

等式(1-1)中的 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 是否全为零。

例7 在多项式空间 $F[x]_4=\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\mid a_i\in F;i=0,1,2,3\}$中,$1,x,x^2,x^3$ 线性无关;$1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3$ 也线性无关。

例8 试证明 $R^{2\times2}$ 中,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$线性相关。

证明 容易验证等式 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}$,所以,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关。

定义7 设 $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 为线性空间 $V(F)$ 中的一个向量组,如果 $\boldsymbol{A}$ 中有 $r(r\leqslant s)$个向量线性无关。而任意 $r+1$ 个向量(如果有的话)都线性相关,则称此 r 个向量为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组。

$V(F)$中的一个向量组的极大无关组未必唯一,但极大无关组所含向量个数相等。

定理2 线性空间 $V(F)$ 中的向量组有如下性质:

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充要条件是其中有某个向量可由其他向量线性表示;

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的某一个子向量组线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关;

(3) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则其任意非空子向量组也线性无关;

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}\in V(F)$,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta}$;

(5) 设线性空间 $V(F)$ 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 唯一地线性表示。

1.1.3 线性空间的基、维数与坐标

线性空间中的基底与维数都是依赖于空间中向量的线性相关和线性无关的概念给出的定义,所以,我们首先给出线性空间中一些与以前学过的向量空间 R^n 中相类似的概念。

定义8 设 V 是数域 F 上的线性空间,若 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 满足:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关;

(2) V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$,都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示。

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $V(F)$一个基底(简称基),并称基底所含向量的个数 n 为线性空间 $V(F)$的维数,记作:$\dim V=n$。此时 $V(F)$称作 n 有限维线性空间,简记为 $V_n(F)$或 V_n。

显然,有限维线性空间 $V(F)$的基底不唯一,但维数唯一。

如果对于任意的 n,均可在线性空间 $V(F)$ 中找到 n 个线性无关的向量,则称 $V(F)$是无限维的线性空间。

规定,只含有零向量的线性空间 $V(F)$ 的维数为0。

例9 在向量空间 $C^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}|x_i\in\mathbf{C}\}$ 中,$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,$

$\boldsymbol{\varepsilon}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}'_2=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ 都是 C^n 的基。

$\dim C^n=n$。一般称 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 C^n 的自然基底。

例10 在矩阵空间 $C^{m\times n}=\{\boldsymbol{A}_{m\times n}|\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij}),a_{ij}\in\mathbf{C},i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,$

$$n\}\text{中,令 }\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{bmatrix}\begin{array}{c}\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \text{第 } j \text{ 列}\end{array}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

则 $C^{m\times n}$ 中的这 mn 个向量 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为 $C^{m\times n}$ 的一组基(自然基底),$\dim C^{m\times n}=mn$。

例11 在多项式空间 $F[x]_n=\{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}|a_i\in F;i=0,1,2,\cdots,n\}$ 中,$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 为 $F[x]_n$ 的一个基,$\dim F[x]_n=n$。

定义9 设 V 是数域 F 上的线性空间,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $V(F)$ 的基,则 $\forall\alpha\in V(F)$,可由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一表示,表达式为

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\qquad(x_i\in F,i=1,2,\cdots,n)$$

称 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标。

定理3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 $V(F)$ 的基底,则任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V(F)$,$\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一地线性表示。

对于线性空间 $V(F)$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$，在不同基底下的坐标是不相同的，并且 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为数域 F 上的 n 维向量，即 $[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\in F^n$。

1.1.4 基变换与坐标变换

定义 10 n 维线性空间 $V(F)$ 的两组基为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$，用 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 来表示每一个 $\boldsymbol{\varepsilon}'_i(i=1,2,\cdots,n)$，如下：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}'_1 = p_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + p_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \boldsymbol{\varepsilon}'_2 = p_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + p_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}'_n = p_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + p_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{cases}$$

或
$$[\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix} \tag{1-2}$$

则称 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}$ 为由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 的过渡矩阵。

其中 $\boldsymbol{P}$ 的第 j 列，是 $\boldsymbol{\varepsilon}'_j$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标，称式(1-2)为基变换公式。

定理 4 过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的。

证明 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 是线性无关的，所以 $[\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n]\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\theta}$ 只有零解，而由 $[\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]\boldsymbol{P}$ 得到：$[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\theta}$，由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关可得 $\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\theta}$，即 $\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\theta}$ 只有零解，所以，$\boldsymbol{P}$ 可逆。

例 12 设 R^3 的两个基是

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}_1'=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2'=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3'=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\boldsymbol{\varepsilon}'_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$。

解答 由 $[\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]\boldsymbol{P}$ 可得

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}$$

所以

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-1&0\\2&1&2\end{bmatrix}$$

即由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\boldsymbol{\varepsilon}'_3$ 的过渡矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-1&0\\2&1&2\end{bmatrix}$$

定理 5 设 $V(F)$ 是 n 维线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 是 $V(F)$ 的两组基，V 中向量 $\boldsymbol{x}$ 在两组基下的坐标分别为 $[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 与 $[x'_1,x'_2,\cdots,x'_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}$ 为由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 的过渡矩阵，则

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{bmatrix}\tag{1-3}$$

证明 因为 $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n]\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{bmatrix}$

所以有

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n]\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{bmatrix}\tag{1-4}$$

而$[\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]\boldsymbol{P}$,将其代入式(1-4)得到

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]P\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{bmatrix} \tag{1-5}$$

对比式(1-5)的两端,又由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$线性无关,从而得到$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{bmatrix}$。

式(1-3)给出了$V(F)$中向量$\boldsymbol{x}$在不同基下坐标之间的关系,称为坐标变换公式。

例13 设R^3的两个基是

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}'_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}'_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}'_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},$$

(1) 求由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$到基$\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\boldsymbol{\varepsilon}'_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$;

(2) 求向量$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-3\boldsymbol{\varepsilon}_3$在基$\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\boldsymbol{\varepsilon}'_3$下的坐标。

解答 (1)由$[\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]\boldsymbol{P}$可得

$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}$$

所以$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{bmatrix}$

(2) 由$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-3\boldsymbol{\varepsilon}_3$得到$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的坐标为$[1,2,-3]^{\mathrm{T}}$,所以,由坐标变换公式(1-3)得

$$\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-7\\-1\\3\end{bmatrix}$$

例14 在多项式空间$F[\boldsymbol{x}]_4=\{a_0+a_1\boldsymbol{x}+a_2\boldsymbol{x}^2+a_3\boldsymbol{x}^3\mid a_i\in F;i=0,1,2,3\}$中,

(1) 求由基$1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{x}^3$到基$1,\boldsymbol{x}-1,(\boldsymbol{x}-1)^2,(\boldsymbol{x}-1)^3$的过渡矩阵;

(2) 求$f(\boldsymbol{x})=1+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}^3$在基$1,\boldsymbol{x}-1,(\boldsymbol{x}-1)^2,(\boldsymbol{x}-1)^3$下的坐标。

解答 (1)由于