精品最新版

世纪金榜

专项提高方案

Tigao Fang'an

丛书主编：张 泉

数学之一

函数·导数 数列·极限

延边大学出版社

精品最新版

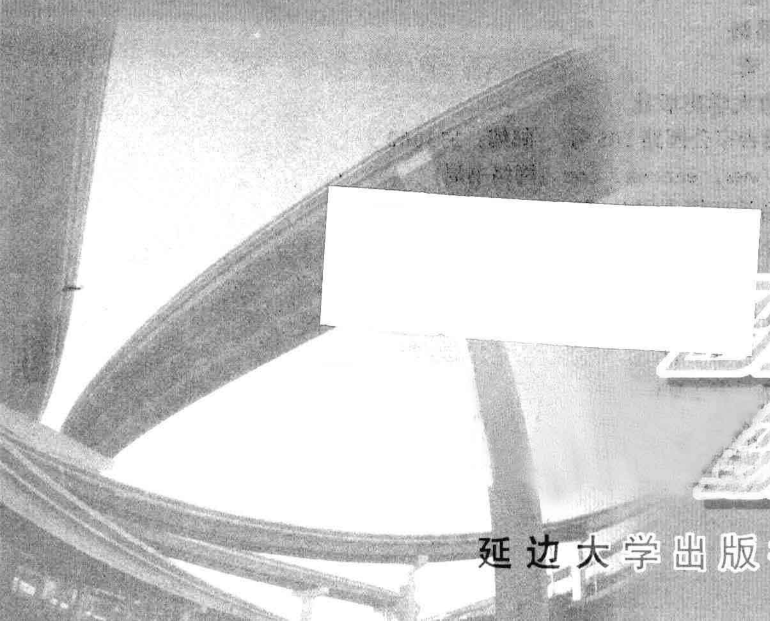
世纪金榜

专项提高方案

Tigao Fang'an

丛书主编：张泉

数学之一



函数·导数

数列·极限

延边大学出版社

丛书主编 / 张　泉
本册主编 / 贾俊森
编　　委 / 邢建国　刘　峰　许海伟
　　　　　吕　丽　齐丽香　吴卫卫

图书内容咨询：☏ 0531-7187013　李老师　朱老师

图书使用及反馈：☏ 0531-7965612　杨老师　曹老师

<书名>世纪金榜专项提高方案(一)

作　　者：张　泉
责任编辑：金昌海
装帧设计：侯　青
出版发行：延边大学出版社
社址：吉林省延吉市公园路 105 号　邮编：133002
网址：http://www.eabook.com（网络书局）
印刷：滨州市裕滨印刷有限公司
开本：880 × 1230 毫米　1/16
印张：133 印张　　字数：2100 千字
印数：1-10000 册
版次：2004 年 7 月第 1 版
印次：2004 年 7 月第 1 次
ISBN 7-5634-1933-0/G·470

总定价：135.00 元

前言

ZHUANXIANG FANG'AN

为帮助广大学生牢固地掌握专题知识，突破知识运用中的薄弱环节，提高学科综合能力，世纪金榜力邀多名从事高三教学的专家，精心编写了《数学专项提高方案》系列丛书。本系列共分为四个专项《函数·数列·极限·导数》、《三角函数·不等式》、《平面向量·平面解析几何》、《立体几何·概率统计》。本丛书在编写上严格遵循新考试大纲、教学大纲、新教材，突出新理念，展示新教材，训练定位在“低起点、高目标、小坡度、密台阶”循序渐进、重点突出、讲练到位，一定会使读者的专题知识与能力在有限的时间内获得最大限度的提高。

《函数·数列·极限·导数》的突出特点：

1.实：即实用，无论是基础知识、基本法的复习还是例题的选配，练习的设计都力求做到实用高效，能给考生以实实在在的帮助。

2.新：适应新的高考形式，坚持以新的思想为指导，以新的变化为立足点，充分揭示数学思想和数学方法的本质，归纳、探索解题规律，使知识系统化、网络化；

3.全：注重学科间的渗透和理论联系实际，培养学生的整体水平及综合素质。

★具体栏目构成及特色如下：

【考纲展示】展示新高考对本节知识的考试要求，使学生复习时有的放矢。

【要点归纳】对本节知识进行提炼、归纳，列明重点，破解难点，突出要点。

【典例剖析】精选高考试题或高质量的经典试题作为例题。进行全方位阐释、思路点拨及归纳警示，不仅启迪学生的思维，而且总结了解题的规律和方法。

【能力训练】每一节都精心设计了一套练习题，使考生在学完题例后有针对性的进行强化训练，提高解题能力。

【热点规律方法】 在分析总结近几年新高考的命题趋势后，每一章节后面都给出了专题讲解，主要精选本章的重要知识点及高考的热点，着重突出重要数学思想方法的归纳与应用，注重一题多解，变式训练、创新点拨。

【高考金题回放】 较全面地列出每部分近几年的新课程高考试题，并附以详尽解析，使学生在触摸高考中有所感悟提升。

【综合过关检测】 紧扣全章知识点设计试题，题目覆盖面广，选题新颖、务实、典型。

本书立足教材，侧重能力培养与考查，注重理论与社会生活的密切联系，关注社会热点，注重创新，定会成为广大师生的备考"智囊"和应试"锦囊"。

编　者

2004 年夏

目录

mu lu

函数·数列·极限·导数

mu lu

一

集合与简易逻辑

(一) 集 合

考纲展示

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念.

2. 了解空集和全集的意义.

3. 了解属于、包含、相等关系的意义.

4. 掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

要点归纳

一、集合的基本概念

1. 集合:是"某些指定对象的全体".

2. 集合里元素的特性:确定性;互异性;无序性.

3. 集合的表示方法:列举法;描述法;图示法.

常见数集的符号:**N**(自然数集);$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$(正整数集);**Z**(整数集);**Q**(有理数集);**R**(实数集).

4. 集合的分类:可分有限集与无限集.

二、元素与集合、集合与集合间的关系

1. 元素与集合

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$;如果 b 不是集合 B 的元素,就说 b 不属于集合 B,记作 $b\notin B$.

不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\varnothing$.

2. 集合与集合的关系

(1)包含关系

①子集:若 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

②真子集:若 $A\subseteq B$,且 $A\neq B$,则集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

规定:空集是任何集合的子集,对于任何一个集合 A,有 $\varnothing\subseteq A$.

(2)相等关系

若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,就说集合 A 等于集合 B,记作 $A=B$.

(3)运算关系

①交集:$A\cap B=\{x|x\in A$,且 $x\in B\}$.

②并集:$A\cup B=\{x|x\in A$,或 $x\in B\}$.

③补集:若 $A\subseteq S$,则 A 在 S 中的补集 $\complement_S A=\{x|x\in S$,且 $x\notin A\}$.

(4)运算性质

①交集的运算性质

$A\cap B=B\cap A$,$A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$,$A\cap U=A$,$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$.

②并集的运算性质

$A\cup B=B\cup A$,$A\cup B\supseteq A$,$A\cup B\supseteq B$,$A\cup U=U$,$A\cup A=A$,$A\cup\varnothing=A$.

③补集的运算性质

$\complement_U(\complement_U A)=A$,$\complement_U\varnothing=U$,$\complement_U U=\varnothing$,$A\cap\complement_U A=\varnothing$,$A\cup\complement_U A=U$.

以上符号 U 为全集.

三、重点与难点

1. 集合中元素的特性与集合的表示方法.

2. 集合的化简与运算.

3. 集合语言与集合思想的应用.

典例剖析

【例1】已知集合 $A=\{a,a+d,a+2d\}$,$B=\{a,ar,ar^2\}$,$d\neq 0$,若 $A=B$,求 r 的值.

【点拨】因$A=B$,两集合中元素完全相同,所以,比较对应元素,列出等式关系,即可求r的值.

【解析】由$A=B$,下面分两种情况进行讨论:

(1)$\begin{cases}a+d=ar & ①\\ a+2d=ar^2 & ②\end{cases}$

②-①,得$d=ar^2-ar$,代入①可得$a-2ar+ar^2=0$,即$a(1-r)^2=0$,若$a=0$,则B中出现相同元素,

$\therefore r=1$.当$r=1$时,根据元素的互异性,所以这种情况也不可能出现.

(2)$\begin{cases}a+d=ar^2 & ③\\ a+2d=ar & ④\end{cases}$

④-③,得$d=ar-ar^2$,

代入③可得$2ar^2-ar-a=0$,

即$a(r-1)(2r+1)=0$,可排除$a=0,r=1$,

$\therefore r=-\frac{1}{2}$.

当$r=-\frac{1}{2}$时,可得$d=-\frac{3}{4}a$,

此时$A=\{a,\frac{a}{4},-\frac{a}{2}\}=B$.$\therefore r=-\frac{1}{2}$.

【归纳】1.本题是对集合自身的考查,应特别注意集合里元素的互异性,对求出的值应代入检验,同时解析过程中体现了重要的数学思想——分类讨论的思想.

2.高考考查的数学思想主要有:函数与方程的思想;变换与转化的思想;分类与归纳的思想;数形结合与分离的思想.

【例2】(2002·全国)设集合$M=\{x\mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,则

(A)$M=N$　　(B)$M\subset N$

(C)$M\supset N$　　(D)$M\cap N=\varnothing$

【点拨】给出的集合用表达式描述表示,可简化表达式,进行比较和分析以确定它们的关系,也可选用特殊值,进行排除.

【解析】方法一:$\because M=\{x\mid x=\frac{1}{4}(2k+1),k\in\mathbf{Z}\}$,

$N=\{x\mid x=\frac{1}{4}(k+2),k\in\mathbf{Z}\}$,

而当$k\in\mathbf{Z}$时,$2k+1$的值域是{奇数},$k+2$的值域是$\mathbf{Z}$,$\therefore M\subset N$,故选B.

方法二:$\because \frac{3}{4}\in(M\cap N)$,排除D;

又$\because 1\in N$,且$1\notin M$,可排除A、C,故选B.

【归纳】方法一属于基本方法,用到函数的观点和思想方法;方法二属于排除法.

【例3】(2001·上海春招)已知$\mathbf{R}$为全集,

$A=\{x\mid\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2\}$,$B=\{x\mid\frac{5}{x+2}\geqslant1\}$,

求$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$.

【点拨】由对数函数的单调性解不等式

$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2$,

将$\frac{5}{x+2}\geqslant1$整理为$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant0$的形式,由符号性质来转化,可确定集合$A$、$B$,进一步结合数轴使问题得到解决.

【解析】由$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2$,

依据对数函数的单调性,得

$\begin{cases}3-x>0\\ 3-x\leqslant(\frac{1}{2})^{-2}\end{cases}$ 即$\begin{cases}x<3\\ x\geqslant-1\end{cases}$

解得$-1\leqslant x<3$,

于是$A=\{x\mid-1\leqslant x<3\}$,

$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x<-1$或$x\geqslant3\}$,

由$\frac{5}{x+2}\geqslant1$,有$\frac{x-3}{x+2}\leqslant0$,解得$-2<x\leqslant3$,

于是$B=\{x\mid-2<x\leqslant3\}$.

$\therefore(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x\mid x<-1$或$x\geqslant3\}\cap\{x\mid-2<x\leqslant3\}$
$=\{x\mid-2<x<-1$或$x=3\}$.

【归纳】1.此题是以集合语言为载体,主要考查解不等式,解题的关键是以数轴为手段进行集合的运算.

2.近几年的高考题偏重于集合的交、并、补运算.

【例4】设集合$A=\{x\mid x^2+6x=0\}$,$B=\{x\mid x^2+3(a+1)x+a^2-1=0\}$,且$A\cup B=A$,求实数$a$的取值.

【点拨】由$A\cup B=A$转化为$B\subseteq A$,确定集合B中的元素,进一步列出a满足的关系式再求a.

【解析】$A=\{x\mid x^2+6x=0\}=\{0,-6\}$,

由$A\cup B=A$,得$B\subseteq A$.

(1)当$B=A$时,$B=\{0,-6\}$,

需$\begin{cases}-3(a+1)=-6\\ a^2-1=0\end{cases}$,

解得 $a=1$,此时 $B=A$.

(2)当 $B\subsetneqq A$ 时,

①若 $B=\varnothing$,即方程 $x^2+3(a+1)x+a^2-1=0$ 根的判别式小于0.

由 $\Delta=5a^2+18a+13<0$,

解得 $-\frac{13}{5}<a<-1$,此时 $B\subsetneqq A$.

②若 $B\neq\varnothing$,则 $B=\{0\}$ 或 $B=\{-6\}$,

这时方程 $x^2+3(a+1)x+a^2-1=0$ 根的判别式应为0,且有相等实根0或-6.

由 $\Delta=0$,得 $5a^2+18a+13=0$,

解得 $a=-1$ 或 $a=-\frac{13}{5}$.

当 $a=-1$ 时,方程为 $x^2=0$,故 $B=\{0\}$,有 $B\subsetneqq A$.

当 $a=-\frac{13}{5}$ 时,方程为 $x^2-\frac{24}{5}x+\frac{144}{25}=0$,

解得 $x_1=x_2=\frac{12}{5}$,有 $B=\{\frac{12}{5}\}$,

从而 $a=-\frac{13}{5}$ 应舍去.

综上所述,实数 a 的取值是 $-\frac{13}{5}<a\leqslant-1$ 或 $a=1$.

【归纳】1.本题运用了分类讨论的数学思想,应特别注意空集是任何集合的子集,不可忽视了空集的特殊情况.

2.含参数的集合问题,常根据集合元素的性质来解,注意把集合的运算关系转译为包含关系,例如 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$,$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

3.涉及二次方程根的分布问题,运用数形结合的思想常能简化运算.

【例5】设集合 $A=\{(x,y)\mid y=2x-1,x\in\mathbf{N}^*\}$,$B=\{(x,y)\mid y=ax^2-ax+a,x\in\mathbf{N}^*\}$,问是否存在非零整数 a,使 $A\cap B\neq\varnothing$?若存在,请求出 a 的值及 $A\cap B$,若不存在,说明理由.

【点拨】$A\cap B$ 是否是空集取决于方程组

$\begin{cases}y=2x-1\\y=ax^2-ax+a\end{cases}$有无正整数解.

【解析】假设 $A\cap B\neq\varnothing$,则方程组

$\begin{cases}y=2x-1\\y=ax^2-ax+a\end{cases}$有正整数解,消去 y,

得 $ax^2-(a+2)x+a+1=0$ $\qquad(*)$

由 $\Delta\geqslant0$,有 $(a+2)^2-4a(a+1)\geqslant0$,

解得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

因 a 为非零整数,$\therefore a=\pm1$,

当 $a=-1$ 时,代入$(*)$,

解得 $x=0$ 或 $x=-1$,

而 $x\in\mathbf{N}^*$,故 $a\neq-1$.

当 $a=1$ 时,代入$(*)$,

解得 $x=1$ 或 $x=2$,符合题意.

故存在 $a=1$,使得 $A\cap B\neq\varnothing$,

此时 $A\cap B=\{(1,1),(2,3)\}$.

【归纳】1.由于两集合中的条件具有鲜明的几何意义,故将曲线的公共点问题转化为方程组解的问题.

2.本题属由已知条件判断结论是否存在的探索性问题,这类题型的解答,一般是先对结论作出肯定的假设,结合已知条件进行推理论证,若导出合理的结论,则存在性得以解决;若导出了错误结论,则否定了存在性.

【例6】对任意一个非零复数 z,定义集合 $M_z=\{w\mid w=z^{2n-1},n\in\mathbf{N}^*\}$.

(1)设 $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$ 或 $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$,试用列举法表示集合 M_α.

(2)设复数 $w\in M_z$,求证:$M_w\subseteq M_z$.

【点拨】题(1)将 α 值代入 $w=z^{2n-1}$,依据 i 的乘方规律化简运算;题(2)中理解定义 M_z 是关键,即对任意的 $x\in M_w$,只需证 $x\in M_z$.

【解析】(1)当 $\alpha_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$ 时,

$\because\alpha_1^2=\mathrm{i}$,$\alpha_1^{2n-1}=\frac{(\alpha_1^2)^n}{\alpha_1}=\frac{\mathrm{i}^n}{\alpha_1}$,

$\therefore M_{\alpha_1}=\{\frac{\mathrm{i}}{\alpha_1},\frac{-1}{\alpha_1},\frac{-\mathrm{i}}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_1}\}$

$=\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}),-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}),-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}),\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\}$.

当 $\alpha_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$ 时,

$\because\alpha_2^2=-\mathrm{i}$,$\therefore M_{\alpha_2}=\{\frac{-\mathrm{i}}{\alpha_2},\frac{-1}{\alpha_2},\frac{\mathrm{i}}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_2}\}=M_{\alpha_1}$,

因此,不论 α 取哪一个值,集合 M_α 不变,即

$M_a=\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\}$.

(2)证明：$\because w\in M_z$，$\therefore$存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使 $w=z^{2m-1}$，
于是对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$w^{2n-1}=z^{(2m-1)(2n-1)}$，
由于$(2m-1)(2n-1)$是正奇数，
故 $w^{2n-1}\in M_z$，所以 $M_w\subseteq M_z$.

【归纳】1. 本题是2001年上海高考题，不但考查集合的表示法，而且考查如何证明一个集合是另一个集合的子集.

2. 高考对集合的考查主要从两个方面：一是对集合自身的考查，如集合的表示法，元素与集合、集合与集合之间的关系，集合的运算；二是考查对集合知识的应用，如求函数的定义域、值域以及不等式的解集，解析几何中的曲线交点的表示等.

能力训练

一、选择题

1. 已知 $A=\{1,2\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，则集合 A 与 B 的关系为 ( )
(A)$A\in B$ (B)$A\notin B$ (C)$A\subseteq B$ (D)$B\subseteq A$

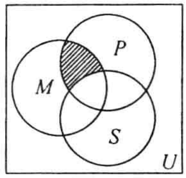
2. 设集合 $A=\{x|x\in\mathbf{Z},-10\leqslant x\leqslant -1,\}$，$B=\{x|x\in\mathbf{Z},|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素的个数是 ( )
(A)11个 (B)10个 (C)16个 (D)15个

3. 已知 $U=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$C=\{x|-1\leqslant x<3\}$，则有 ( )
(A)$\complement_U A=B$ (B)$\complement_U B=C$
(C)$\complement_U A\supseteq C$ (D)$A\supseteq C$

4. 若 $P=\{y|y=3x+1,x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{y|y=x^2+2x-1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $P\cap Q$ 等于 ( )
(A)$\{(-1,-2),(2,7)\}$ (B)$\{-2,7\}$
(C)$(-2,+\infty)$ (D)$[-2,+\infty)$

5. 已知 $A=\{x|f(x)=0\}$，$B=\{x|g(x)=0\}$，$C=\{x|f(x)g(x)=0\}$，则必有 ( )
(A)$C=(A\cup B)$ (B)$C=(A\cap B)$
(C)$C\subseteq(A\cup B)$ (D)$C\subseteq(A\cap B)$

6. 如图 U 是全集，M、P、S 是 U 的3个子集，则阴影部分所表示的集合是 ( )



(A)$(M\cap P)\cap S$
(B)$(M\cap P)\cup S$
(C)$(M\cap P)\cap\complement_U S$
(D)$(M\cap P)\cup\complement_U S$

7. 已知非空集合 M 和 N，规定 $M-N=\{x|x\in M$，但 $x\notin N\}$，那么 $M-(M-N)$ 等于 ( )
(A)$M\cup N$ (B)$M\cap N$ (C)M (D)N

8. 若 $X=\{x|x=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$Y=\{y|y=4n-3,n\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{Z|Z=8n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 X,Y,Q 的关系是 ( )
(A)$X\supset Y\supset Q$ (B)$X\subset Y\subset Q$
(C)$X=Y\supset Q$ (D)$X=Y=Q$

9. 满足 $\{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5,6\}$ 的集合 A 的个数为 ( )
(A)4个 (B)15个
(C)16个 (D)以上都不对

10. 已知 $M=\{(x,y)|\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}(0<\theta<\pi)\}$，$N=\{(x,y)|y=2x+k\}$，若 $M\cap N\neq\varnothing$，则有 ( )
(A)$-2\sqrt{5}\leqslant k\leqslant 2\sqrt{5}$ (B)$-4\leqslant k\leqslant 4$
(C)$0\leqslant k<2\sqrt{5}$ (D)$-4<k\leqslant 2\sqrt{5}$

二、填空题

11. 若使集合 $M=\{x|ax^2+2x+a=0,a\in\mathbf{R}\}$ 中有且只有一个元素的所有 a 值组成的集合 $N=$ ________.

12. 设有三个元素的两个集合 $M=\{a^2,a+1,-3\}$ 和 $P=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $M\cap P=\{-3\}$，则 a 的值为________.

13. 已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\{x|m+1<x<2m-1\}$ 且 $B\neq\varnothing$，若 $A\cup B=A$，则 m 的取值范围为________.

14. 50名学生参加跳远和铅球2项测试，跳远和铅球测验成绩分别是及格40人和31人，2项测验成绩都不及格的有4人，2项测验成绩都及格的有________人.

三、解答题

15. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x+a\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$，且 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围.

16. 设 M 是满足下列两个条件的函数 $f(x)$ 的集合：①$f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，②若 $x_1,x_2\in[-1,1]$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$，试问，定义域在 $[-1,1]$ 上的函数 $g(x)=x^2+2x-1$ 是否属于集合 M？并说明理由.

17. 设 $A=\{x|(x+2)(x+1)(x-1)>0\}$，$B=\{x|x^2+px+q\leqslant 0\}$，若 $A\cup B=\{x|x>-2\}$，$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，求 p,q 的值.

18. 集合 $M=\{(x,y)|x^2+2x+y^2\leqslant 0\}$，$N=\{(x,y)|y\geqslant x+a\}$，且 $M\cap N=M$，求 a 的取值范围.

（二） 含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

考纲展示

1. 掌握简单的含绝对值不等式的解法.

2. 掌握一元二次不等式的解法.

3. 掌握一元二次方程、一元二次不等式、一元二次函数之间的相互关系.

要点归纳

一、不等式的基本性质

1. $a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

2. $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$.

3. $a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.

二、含绝对值不等式的解法

1. $|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$.

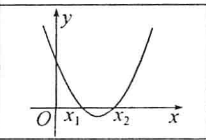
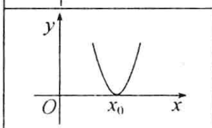
2. $|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$.

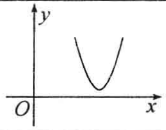
3. $|ax+b|>c(c>0)\Leftrightarrow ax+b<-c$ 或 $ax+b>c$.

4. $|ax+b|<c(c>0)\Leftrightarrow -c<ax+b<c$.

三、一元二次不等式的解法

当 $a>0$ 时，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ 的解集：

	二次函数	Δ的情况	一元二次方程	一元二次不等式	
标准式	$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$	$\Delta=b^2-4ac$	$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$	$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$
图像与解		$\Delta>0$	$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	不等式解集为 $\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	不等式解集为 $\{x|x_1<x<x_2\}$
		$\Delta=0$	$x_1=x_2=x_0=-\dfrac{b}{2a}$	不等式解集 $\{x|x\neq x_0,x\in\mathbf{R}\}$	解集为 $\varnothing$

	二次函数	Δ的情况	一元二次方程	一元二次不等式	
图像与解		$\Delta<0$	方程无解	不等式解集为$\mathbf{R}$	解集为$\varnothing$

四、重点与难点

1.解含绝对值的不等式时,如何去掉绝对值符号.

2.一元二次不等式、一元二次方程、一元二次函数间的转化关系的运用.

3.主要思想方法(如:换元的思想、等价转化的思想、分类讨论的思想、数形结合的思想等)的准确运用.

典例剖析

【例1】解不等式 $1<|x-3|<4$.

【点拨】首先转化成不等式组,进而去掉绝对值符号解之;也可运用数形结合的思想求解,即设 $y=|x-3|$,求满足 $y\in(1,4)$ 对应 x 的范围.

【解析】方法一:原不等式等价于 $\begin{cases}|x-3|>1\\|x-3|<4\end{cases}$

即 $\begin{cases}x<2\text{ 或 }x>4\\-1<x<7\end{cases}$ $\quad\therefore -1<x<2$ 或 $4<x<7$.

所以,原不等式的解集为

$\{x|-1<x<2$ 或 $4<x<7\}$.

方法二:原不等式等价于

$\begin{cases}x-3\geqslant0\\1<x-3<4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-3<0\\1<3-x<4\end{cases}$,

即 $\begin{cases}x\geqslant3\\4<x<7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<3\\-1<x<2\end{cases}$

$\therefore 4<x<7$ 或 $-1<x<2$.

所以,原不等式的解集为

$\{x|-1<x<2$ 或 $4<x<7\}$.

方法三:原不等式等价于 $1<(x-3)^2<16$.

$\therefore \begin{cases}(x-3)^2>1\\(x-3)^2<16\end{cases}$,即 $\begin{cases}x<2\text{ 或 }x>4\\-1<x<7\end{cases}$

$\therefore -1<x<2$ 或 $4<x<7$.

所以,原不等式的解集为

$\{x|-1<x<2$ 或 $4<x<7\}$.

【归纳】方法一是利用换元的思想,依据绝对值的几何意义转化的;方法二是由绝对值的意义,去掉绝对值的符号求解的;方法三是依据等价关系:$|x|>a$ $(a>0)\Leftrightarrow x^2>a^2$,$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow x^2<a^2$.

解含有绝对值不等式的关键,就是依据绝对值的意义和等价不等式,将其转化为不含绝对值的不等式(或不等式组)解之.

【例2】解不等式 $|x+2|+|x-1|<4$.

【点拨】依据 x 的不同取值情况,分别去掉绝对值符号进行求解;也可由数形结合的思想进行转化.

【解析】方法一:由 $x+2=0$,得 $x=-2$,由 $x-1=0$,得 $x=1$,则 $-2,1$ 将数轴分成 3 个部分:

①$x\leqslant-2$,②$-2<x\leqslant1$,③$x>1$.

则原不等式等价于(Ⅰ)$\begin{cases}x\leqslant-2\\-x-2-x+1<4\end{cases}$ 或

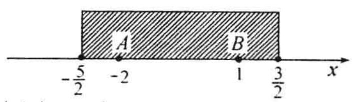
(Ⅱ)$\begin{cases}-2<x\leqslant1\\x+2-x+1<4\end{cases}$ 或(Ⅲ)$\begin{cases}x>1\\x+2+x-1<4\end{cases}$

解(Ⅰ)得 $-\dfrac{5}{2}<x\leqslant-2$;

解(Ⅱ)得 $-2<x\leqslant1$;解(Ⅲ)得 $1<x<\dfrac{3}{2}$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{3}{2}\}$.

方法二:由绝对值的几何意义,不等式左边 $|x+2|+|x-1|$ 表示:数轴上坐标为 x 的动点到坐标分别为 $-2,1$ 的对应点 A、B 的距离之和.



当 $|x+2|+|x-1|=4$ 时,

易求得 $x=-\dfrac{5}{2}$ 或 $x=\dfrac{3}{2}$,

所以,原不等式的解集为 $\{x|-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{3}{2}\}$.

【归纳】方法一也叫零点分段讨论法，首先找到使每个绝对值等于0的点，然后分段讨论，再求各段对应解集的并集．这种解法的基本思想是把含绝对值的不等式转化为不含绝对值的不等式；方法二利用数形结合，较形象、直观．

【例3】解不等式$|x^2-3|>2x$．

【点拨】思路一：去掉绝对值符号，转化为等价的不等式．思路二：设$y_1=|x^2-3|$，$y_2=2x$，画出图像，求使$y_1>y_2$对应x的范围．

【解析】方法一：对不等式$|x^2-3|\leqslant 2x$，当$2x<0$时，很明显为空集．

故$|x^2-3|\leqslant 2x$等价于$-2x\leqslant x^2-3\leqslant 2x$，

即$\begin{cases}x^2-3\geqslant -2x\\x^2-3\leqslant 2x\end{cases}$，解得$1\leqslant x\leqslant 3$，

故原不等式的解集为$|x^2-3|\leqslant 2x$解集的补集．

即$\{x|x<1$或$x>3\}$．

方法二：原不等式等价于

$\begin{cases}x^2-3\geqslant 0\\x^2-3>2x\end{cases}$（Ⅰ） 或$\begin{cases}x^2-3<0\\3-x^2>2x\end{cases}$（Ⅱ），

解（Ⅰ）得$x>3$或$x\leqslant -\sqrt{3}$．

解（Ⅱ）得$-\sqrt{3}<x<1$，

∴原不等式的解集为$\{x|x<1$或$x>3\}$．

【归纳】比较以上各种解法，方法一较为简捷．

解含绝对值的不等式常用到以下两个重要结论：

结论1：不等式$|f(x)|<g(x)$等价于$-g(x)<f(x)<g(x)$．（说明：当$g(x)\leqslant 0$时，显然原不等式解集为$\varnothing$；当$g(x)>0$时由绝对值几何意义，得原不等式等价于$-g(x)<f(x)<g(x)$）．

结论2：不等式$|f(x)|>g(x)$等价于$f(x)<-g(x)$或$f(x)>g(x)$．（说明：由结论1可知$|f(x)|\leqslant g(x)$等价于$-g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，而$|f(x)|>g(x)$的解集与$|f(x)|\leqslant g(x)$的解集互为补集，故易得结论2）．

【例4】解关于x的不等式：

(1)$a^2x+b^2(1-x)\geqslant[ax+b(1-x)]^2(a\neq b)$；

(2)$x^2-2x+2a-a^2\leqslant 0$．

【点拨】题(1)较复杂，应先通过运算化简转化为简单的问题；题(2)属一元二次不等式，应利用一元二次不等式、一元二次方程与一元二次函数之间的相互关系，进而确定不等式的解集．

【解析】(1)将原不等式化为

$(a^2-b^2)x+b^2\geqslant(a-b)^2x^2+2(a-b)bx+b^2$，

即$(a-b)^2(x^2-x)\leqslant 0$，

∵$a\neq b$，即$(a-b)^2>0$，

∴$x^2-x\leqslant 0$，即$0\leqslant x\leqslant 1$，

∴原不等式的解集为$\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$．

(2)∵方程$x^2-2x+2a-a^2=0$的两个根是

$x_1=1+|a-1|$，$x_2=1-|a-1|$．

∴$x_1-x_2=2|a-1|$，故

①当$a>1$时，$x_1=a$，$x_2=2-a$，$x_1>x_2$，

∴$2-a\leqslant x\leqslant a$．

②当$a=1$时，$x_1=x_2=1$，∴$x=1$．

③当$a<1$时，$x_1=2-a$，$x_2=a$，$x_1>x_2$，

∴$a\leqslant x\leqslant 2-a$．

综上情况，当$a>1$时，原不等式的解集为$\{x|2-a\leqslant x\leqslant a\}$；

当$a=1$时，原不等式的解集为$\{x|x=1\}$；

当$a<1$时，原不等式的解集为$\{x|a\leqslant x\leqslant 2-a\}$．

【归纳】1．本题为含参数的一元二次不等式，解的过程应注意字母的取值范围．题(1)中由于有$a\neq b$的条件，所以不必对字母的取值进行讨论，而题(2)则不同，因方程两根的大小关系不定，故转化为对a与1的三种关系分类讨论（注意：同一标准，不重不漏）．

2．解一元二次不等式的一般步骤：①整理为$ax^2+bx+c>0$（或<0）的形式；②确定对应方程的根（有根时，求出根并比较大小）；③画出草图写解集．

3．可转化为一元二次不等式（或其他整式不等式）的分式不等式，应注意以下等价关系：

①$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$；

②$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)g(x)<0$．

【例5】(1)若不等式$(1-a)x^2-4x+6>0$的解集是$\{x|-3<x<1\}$，求a的值．

(2)若$-3<x<1$时，不等式$(1-a)x^2-4x+6>0$恒成立，求a的取值范围．

【点拨】(1)中依据对方程$(1-a)x^2-4x+6=0$的根的限制，建立a的关系式来求a；(2)中依据函数$f(x)=(1-a)x^2-4x+6$在定义域$(-3,1)$内值为

正,由函数的图像寻找 a 的关系.

【解析】(1)$\because(1-a)x^2-4x+6>0$ 的解集是 $\{x|-3<x<1\}$,$\therefore 1-a<0$,即 $a>1$.

于是原不等式可化为 $(a-1)x^2+4x-6<0$,$a-1>0$,

其解集为 $\{x|-3<x<1\}$,

需方程 $(a-1)x^2+4x-6=0$ 的两根为 -3 和 1,

由 $\begin{cases}a>1\\ -3+1=-\dfrac{4}{a-1}\\ (-3)\times1=-\dfrac{6}{a-1}\end{cases}$,解得 $a=3$.

所以,满足条件的 $a=3$.

(2)设 $f(x)=(1-a)x^2-4x+6$.

①当 $a=1$ 时,不等式为 $-4x+6>0$,

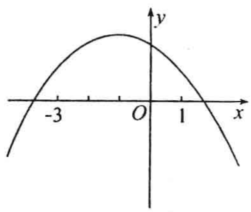
$f(x)=-4x+6$ 在 $(-3,1)$ 上递减而 $f(1)=2$,

$\therefore$ 满足 $x\in(-3,1)$ 时,恒有 $-4x+6>0$.

②当 $a>1$ 时,$1-a<0$,

$\Delta=16-24(1-a)$

$\quad=24a-8>0$,



由图像知,必须

$\begin{cases}a>1\\ f(-3)\geqslant0\\ f(1)\geqslant0\end{cases}$

即 $\begin{cases}a>1\\ 9(1-a)+18\geqslant0\\ 1-a+2\geqslant0\end{cases}$,解得 $1<a\leqslant3$.

③当 $a<1$ 时,$1-a>0$,$\Delta=24a-8$,

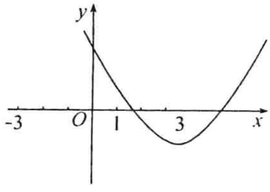
若 $a<\dfrac{1}{3}$ 时,$\Delta<0$,

故 $-3<x<1$,满足 $f(x)=(1-a)x^2-4x+6>0$,恒成立.

若 $a=\dfrac{1}{3}$ 时,$\Delta=0$,

这时对 $x\neq3$ 的一切实数均有 $f(x)>0$,

故 $a=\dfrac{1}{3}$ 满足题设.



若 $\dfrac{1}{3}<a<1$ 时,$\Delta>0$,

这时抛物线 $f(x)=(1-a)x^2-4x+6$ 的对称轴

$x=\dfrac{4}{2(1-a)}=\dfrac{2}{1-a}>3$,又 $f(1)=3-a>0$,

故 $x\in(-3,1)$ 时,总有 $f(x)>0$.

综上情况,所求 a 的取值范围是 $a\leqslant3$.

【归纳】1.这两小题有明显的区别,(1)中的 a 应满足:不等式 $(1-a)x^2-4x+6>0$,当且仅当有 $\{x|-3<x<1\}$.解决的策略是依据对应方程根的限制,建立有关 a 的关系式解之;(2)中的 a 应满足:$-3<x<1$ 是 $(1-a)x^2-4x+6>0$ 成立的充分条件(不必是充要条件),解决的策略通常是运用数形结合的思想或分离变量的方法求解.

2.已知不等式恒成立,求参数范围的问题,涉及函数、方程、不等式,综合性强.常利用以下结论解决.

结论 1:$f(x)=ax+b>0(a\neq0)$ 在区间 $[m,n]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}f(m)>0\\ f(n)>0\end{cases}$.

结论 2:$f(x)=ax+b<0(a\neq0)$ 在区间 $[m,n]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}f(m)<0\\ f(n)<0\end{cases}$

结论 3:$f(x)=ax+b>0(a\neq0)$ 在区间 $[m,+\infty)$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ f(m)>0\end{cases}$

结论 4:$f(x)=ax^2+bx+c>0(a>0)$ 在区间 $[m,n]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}m\leqslant-\dfrac{b}{2a}\leqslant n\\ b^2-4ac<0\end{cases}$ 或

$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}<m \text{ 或 } -\dfrac{b}{2a}>n\\ f(m)>0\\ f(n)>0\end{cases}$

[说明:若 $(-\infty,n]$ 或 $[m,+\infty)$ 代换 $[m,n]$,其充要条件为去掉 $f(m)>0$,或 $f(n)>0$ 即可;若 $(-\infty,+\infty)$ 代换 $[m,n]$,其充要条件要去掉第二组,即应为 $\begin{cases}a>0\\ b^2-4ac<0\end{cases}$.]

结论 5:$f(x)=ax^2+bx+c<0(a>0)$ 在区间 $[m,n]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}f(m)<0\\ f(n)<0\end{cases}$

结论 6:若 $f(x,a)>m$ 时,$x\in D$ 恒成立,

则 $f(x,a)_{\min}>m$;

若 $f(x,a)<m$ 对 $x\in D$ 恒成立，
则 $f(x,a)_{\max}<m$.

【例6】关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0$（其中 $a\in\mathbf{R}$）的解集依次记为 A 与 B，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

【点拨】首先解绝对值不等式，确定集合 A，再依据 $A\subseteq B$ 限定集合 B 的元素，以建立 a 的关系式解之. 在限定集合 B 的元素时，思路一：借助求根公式（此法往往运算量较大）；思路二：通过因式分解确定方程的根，借助数轴；思路三：借助二次函数，确定对应二次方程根的分布.

【解析】方法一：由 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$，

解得 $2a\leqslant x\leqslant a^2+1$，$\therefore A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

$\because 2a\leqslant a^2+1$ 恒成立，$\therefore A\neq\varnothing$.

又 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0$ 可化为 $(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant0$，比较 2 与 $3a+1$ 的大小，

若 $3a+1\geqslant2$，则 $B=\{x|2\leqslant x\leqslant3a+1\}$.

若 $3a+1<2$，则 $B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant2\}$.

$\because A\subseteq B$，$\therefore\begin{cases}3a+1\geqslant a^2+1\\2a\geqslant2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3a+1\leqslant2a\\a^2+1\leqslant2\end{cases}$

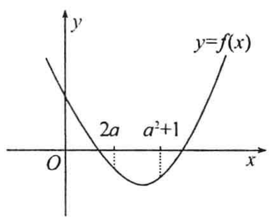
解得 $1\leqslant a\leqslant3$ 或 $a=-1$.

$\therefore a$ 的取值为 $\{a|1\leqslant a\leqslant3$ 或 $a=-1\}$.

方法二：解绝对值不等式，得

$A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

设 $f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)$，



$\because A\subseteq B$，

$\therefore$ 方程 $f(x)=0$ 的两根应分别在 $(-\infty,2a]$ 与 $[a^2+1,+\infty)$ 内，

则必须 $\begin{cases}f(2a)\leqslant0\\f(a^2+1)\leqslant0\end{cases}$

即 $\begin{cases}-2a^2+2\leqslant0\\(a+1)(a-1)(a-3)a\leqslant0\end{cases}$

解得 $1\leqslant a\leqslant3$ 或 $a=-1$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $\{a|1\leqslant a\leqslant3$ 或 $a=-1\}$.

【归纳】1. 本题解法体现了数形结合的思想方法. 方法二利用二次函数的图像限定二次方程根的分布较简捷明快.

2. 涉及一元二次方程根的分布问题历来是高考的热点，学生经常感到困难，这里就此类问题的转化方法归纳如下：

(1)确定图像位置的几个要素：

设方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$，

令 $f(x)=ax^2+bx+c$，

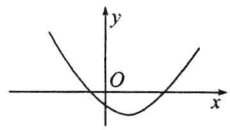
①判别式 $\Delta=b^2-4ac$[或 $f(-\frac{b}{2a})$]值的符号；

②区间 $[m,n]$ 端点值 $f(m)$、$f(n)$ 的符号；

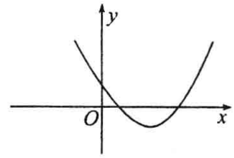
③对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 的位置.

(2)确定一元二次方程根的分布的几个充要条件，以下结论中，设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$\Delta=b^2-4ac$.

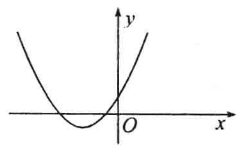
定理 1：实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 存在两实根，且一正一负 $\Leftrightarrow f(0)<0$.



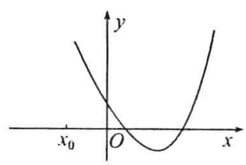
定理 2：实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 存在两正实根 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\f(0)>0\\-\frac{b}{2a}>0\end{cases}$



定理 3：实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 存在两实根，且两根均负 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\f(0)>0\\-\frac{b}{2a}<0\end{cases}$

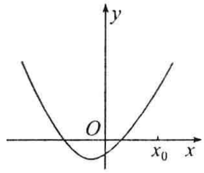


定理 4：实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 存在两实根，且两根均大于 x_0 $\Leftrightarrow$



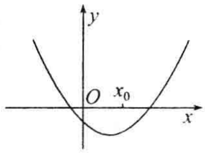
$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ f(x_0)>0\\ x_0<-\dfrac{b}{2a}\end{cases}$$

定理 5：实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$ 存在两实根，且两根均小于 $x_0\Leftrightarrow$



$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ f(x_0)>0\\ x_0>-\dfrac{b}{2a}\end{cases}$$

定理 6：实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$ 存在两实根，且一根小于 x_0，另一根大于 $x_0\Leftrightarrow f(x_0)<0$.



以上几个定理不必死记硬背，关键是真正理解数形结合的转化方法.

能力训练

一、选择题

1. 设不等式 $|x-3|<2$ 的解集为 A，不等式 $|2x-1|>1$ 的解集为 B，则 $A\cup B$ 等于 ( )

(A)$\varnothing$　(B)$\{x|1<x<5\}$

(C)$\{x|x<0$ 或 $x>1\}$　(D)$\{x|x<0$ 或 $1<x<5\}$

2. 已知 $A=\{x|x^2-5x+4\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6\geqslant 0\}$，则 $A\cap B$ 为 ( )

(A)$\{x|1\leqslant x\leqslant 2$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$

(B)$\{x|1\leqslant x\leqslant 2$ 且 $3\leqslant x\leqslant 4\}$

(C)$\{1,2,3,4\}$

(D)$\{x|3\leqslant x\leqslant 4\}$

3. 不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是 ( )

(A)$\{x|0\leqslant x<1\}$　(B)$\{x|x<0$ 且 $x\neq -1\}$

(C)$\{x|-1<x<1\}$　(D)$\{x|x<1$ 且 $x\neq -1\}$

4. 若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，则 $a+b$ 的值是 ( )

(A)10　(B)-10　(C)14　(D)-14

5. 若关于 x 的不等式 $|x+1|+|x-2|<a$ 的解集为 $\varnothing$，则 a 的取值范围为 ( )

(A)$(3,+\infty)$　(B)$[3,+\infty)$

(C)$(-\infty,3]$　(D)$(-\infty,3)$

6. 若不等式 $x^2-ax+1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，不等式 $ax^2+x-1>0$ 的解集为 $\varnothing$，则 a 的取值为 ( )

(A)$a<-\frac{1}{4}$ 或 $a\geqslant 2$　(B)$-\frac{1}{4}\leqslant a<2$

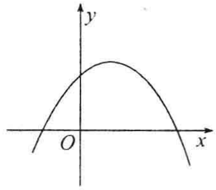
(C)$-2\leqslant a<-\frac{1}{4}$　(D)$-2<a\leqslant -\frac{1}{4}$

7. 不等式 $\frac{x-1}{3-x}\geqslant 0$ 的解集是 ( )

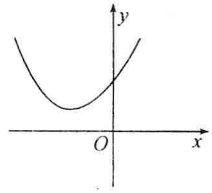
(A)$\{x|x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant 1\}$　(B)$\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$

(C)$\{x|x>3$ 或 $x\leqslant 1\}$　(D)$\{x|1\leqslant x<3\}$

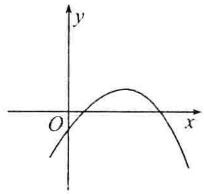
8. 已知函数 $y=ax^2+bx+c$，如果 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，则它的图像可能是 ( )



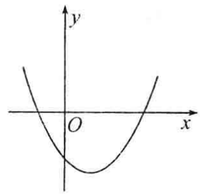
(A)



(B)



(C)



(D)

9. 若方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$ 有两个不等实根 x_1,x_2. 且 $0<x_1<1<x_2<2$，则实数 k 的取值范围是 ( )

(A)$-2<k<-1$　(B)$3<k<4$

(C)$-2<k<4$　(D)$-2<k<-1$ 或 $3<k<4$

10. 已知二次函数 $f(x)=2x^2-(a-2)x-2a^2-a$，若在区间 $[0,1]$ 内至少存在一个实数 b，使 $f(b)>0$. 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A)$(-2,1)$　(B)$(-\frac{1}{2},2)$

(C)$(-2,-\frac{1}{2})$　(D)$(-\frac{1}{2},1)$