



苏步青

# 谈谈怎样学好数学

上海教育出版社

# 谈谈怎样学好数学

苏 步 青

上海教育出版社

谈谈怎样学好数学

苏步青

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

本书由上海发行所发行 上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 1 字数 20,000

1964 年 2 月第 1 版 1979 年 2 月第 2 版 1979 年 2 月第 4 次印刷

印数 199,001—299,000 本

统一书号: 7150·1499 定价: 0.10 元

## 目 录

谈谈怎样学好数学·····	1
一 数学是怎样发展起来的·····	1
二 数学在社会主义建设中的作用·····	4
三 什么是正确的学习态度·····	7
四 学好数学的方法·····	13
希望寄托在你们身上·····	18
—— 1977年11月7日在上海市青少年科技活动周开幕式 大会上的讲话	
谈谈数学打基础问题·····	27

# 谈谈怎样学好数学

## 一 数学是怎样发展起来的

我们平常一谈起数学，谁都会联想到小学里学习的算术，特别感到算术的四则运算，就是加法、减法、乘法、除法用处很大。到了中学以后，开始学习初中代数、平面几何，进一步学习三角学、高中代数、立体几何、解析几何。有些中学生毕业后进入高等学校，一部分学理、工等科的还要学微积分、微分方程，一部分学数学专业的还要学数学分析、高等代数、高等几何、微分方程、函数论、概率统计等等。一个学生从小学到大学所学的数学科目确实不少，内容大多是数学的基础知识，由浅到深，由少到多，由简单到繁杂，由具体到抽象，真是五花八门，琳琅满目。但是，如果把它们的内容分析一下，就可以看出大致分为两类：一类是现实世界中量的关系，一类是空间形式。例如，算术、代数属于前一类，几何属于后一类。人们不禁要问：为什么要学这些内容？这些内容有什么用处？数学的特点是什么？怎样学好数学？

在对这些问题作出初步回答之前，让我们先回顾一下数学是怎样发展起来的。

在很早的时候，人类在生产实践中，由于比较大小的需要，获得了数的概念。最初是自然数，就是 $1, 2, 3, 4, \dots$ 。后来逐渐发展成为分数，从正数发展到负数，从有理数发展为无理

数,它们全体构成一个所谓实数域。在获得数的概念的同时,也发现具有特定形状的物体具有特定的性能,获得一些简单几何形体的概念,例如,三角形、四边形、圆、棱柱、圆柱、球等等。据说,古代埃及人曾经用绳子撑成边长分别是3个单位、4个单位、5个单位的直角三角形,借以作出直角,而把它应用到建筑基础上。有了简单几何形体的概念之后,再用数量来表示一些简单几何形体的面积、体积等等,例如圆的面积、球的体积等,并且把这些数量关系归纳为公式来表示出一种规律。人们几千年来就是这样应用这些公式计算耕地的面积和建筑物的体积的。这应该说是形与数结合了。所以,早在人类文化的初期,就已经积累了一些数学知识。到了十六世纪,包括算术、初等代数、初等几何和三角学的初等数学已大体上完备了。

十七世纪,生产力的发展推动了自然科学和技术的发展,不但已有的数学成果得到进一步巩固、充实和扩大,而且由于实践的需要,开始研究运动着的物体和变化着的现象,从而获得了变量的概念。这是数学发展史上的一个转折点。于是数学不仅研究不变的数量和个别的图形,而且开始研究变化中的量与量之间的相互制约关系和图形间的相互变换。这样,运动和辩证法就进入了数学。随着生产力的发展,科学技术对深入探讨各种量的关系的要求越来越高。这对准确掌握各种自然现象的变化过程,包括各种质变现象发生的规律起了推动的作用,而数学的研究范围也就不断地扩大,内容日益丰富。

在这里,我们要提出经常听到的一个疑问:为什么数学家在研究室里思考出来的高等数学法则,在土木、建筑的现场

里,在机械、电机的技术设计中都会发生作用呢?要解答这个问题,并不困难,我们只要观察周围的日常用品,象茶杯、桌子、皮鞋等,就可以发现没有一样物品是不同数学打过交道的。在双手制造物品的过程中,那里花费劳动力越多,那里数学的思维加工也越多。数学是研究现实世界中量的关系和空间形式的。但是无论量的关系也好,空间形式也好,它们都是从现实世界中的具体现象里抽象出来的,经过反复实践才得出的一些规律。只有那些在实践中经得起考验的,就是正确地反映了客观外界的规律的才留传下来,而其余不符合客观规律的部分被淘汰无遗了。所以把这些公式应用到土木、建筑的现场里和机械、电机的技术设计中去,是不会出差错的。

二十世纪的数学比过去任何时期都发展得更快,内容分得更细了。这就不但在研究的对象和方法上,而且也在使用的语言上,产生了各分支之间“隔行如隔山”的感觉。固然,现代数学涉及的问题范围非常广泛,要理解数学全盘的结构似乎尤为困难,但是事实并不这样,因为数学各分支并不是孤立的、毫无联系的,而恰恰相反,代数、几何、数学分析等一类基础知识相互关联着,并且通过它们使数学的所有分支形成一个有机体结构。不但如此,由于现代物理学的辉煌成就,又不断地揭露出隐藏在数学与物理学之间的密切关系。正如十七世纪发现的微积分原先起源于力学一样,现代数学里的广义函数的产生是和量子力学分不开的。一句话,现代数学的发展有赖于物理学,特别是现实世界中力学方面的结构深刻地反映到数学的内部结构里来。这样,数学各分支间的有机联系根深蒂固地存在于现实世界的这种结构里,并且从中吸取感性的养料而成长壮大起来。但是,必须指出,数学决不溶

化在其他自然科学里，数学与其他自然科学之间存在着本质上的区别。换言之，在现实世界的各种各样范畴里，数学是通过量的关系和空间形式的研究发展起来的；其他自然科学则是适应所探讨的自然界的深度而进展的。只是在数学里，为了把这些关系和形式变成纯粹的方式来研究，总是把它们从内容分离出来、抽象化之后进行考察的。所以，数学的最大特点就是，它的理论往往具有非常抽象的形式，但它同时也是现实世界中量的关系和空间形式的深刻反映，因而可以广泛地应用到自然科学和技术的各个部门里，对人类认识自然和改造自然，起着重要的作用。因此，研究数学决不能完全离开实际单独来思考问题、解决问题，否则，就有走上形而上学唯心论道路的危险。从古以来，似乎一直存在于数学与其他自然科学之间的一条鸿沟，由于现代科学的发展正逐渐地趋于消失了。

## 二 数学在社会主义建设中的作用

为了明确数学在社会主义建设中所占的重要地位，我们将分别举出一些例子来说明在科学技术方面和国民经济方面如何迫切需要解决大量的、繁复的计算问题。

在解决科学技术方面的计算问题中，首先要充分发挥电子计算机的作用，以便更有效地解决问题，为祖国社会主义建设服务。试以水利枢纽为例吧！比方说，要在我国某大江上兴修一条大水坝，把江水拦成一个又阔又深的水库，再利用高度水位落差发电，给全国供应电力。不难想象，这条水坝不是普通常见的规模，它必然具有几百米的高度和极为宽阔的幅度，不然怎么能够拦住滚滚的洪流，怎么能够充分利用水位落差



呢？新安江水电站的水坝，就比上海国际饭店高得多。另一方面，即使筑好了这样的水坝，在坝的下面怎样安装涡轮机，由于这时一定会遇到以往在小型水坝时所没有的一系列力学问题而变成一个需要解决的新问题。要修筑大型水坝也好，要安装大型涡轮机也好，因为没有现成的方案和可靠的数据可以利用，必须先做各色各样的模型试验，这就要进行大量的计算，然后从中找出实际可行的最优解，再制订方案，才能着手筑坝或安装涡轮机。过去在建设佛子岭水库的时候，一位工程师告诉我：在设计、施工过程中，遇到需要解 180 个元的一次方程组。这一类数学问题从理论上看来，当然是早已解决了，没有什么困难。但是在实际工程中需要解决的不是这个方程组的解存在不存在的问题，而是 180 个未知数的数值等于多少的问题。要解答这个问题，就要算出 181 个行列式的值，而且每一个行列式又都是 180 阶。这时，如果单靠纸上演算求解的话，不但要花费很长很长的时间，使工程不能按照预定计划完成，而且在演算过程中还不可避免地会发生错误，这一来问题就更大了。何况，象这样的多元一次方程组不只一个，计算工作量之大可想而知了。所以我们必须使用电子计算机，应用数值计算的方法，通过程序设计把问题搬上机器算出解答，这既节省时间，又可避免差错。在解决其他大型机械、大地测量等方面的重大计算问题中，都有同样的情况。另外，原子能、高速飞行、天气预报等方面的尖端重大问题的解决，也需要电子计算机。在国民经济方面，推广电子计算机的应用，将带来巨大的、直接的经济效益。因此，数学工作者必须解决适合于电子计算机的数值计算方法、计算机的数学理论等重要课题，使数学在建设事业中起更大的作用。

数学问题还产生在其他工程技术设计与认识自然、改造自然等工作中,也大量出现于国民经济计划中,这些都是要求数学工作者去解决的。例如,航空机械、电机等工程设计中的弹性力学问题、不稳定流计算、振动理论、天气长期预报中的数学问题、地球物理中的非古典定解问题和海浪问题等都属于前一方面。国民经济计划中的数学问题也有不少。如所周知,社会主义经济是有计划、按比例发展的。作为制订计划的参考,就需要研究部门间联系的问题。我国幅员广大,各地区资源分布都不尽相同,这就需要研究地区间联系的问题。此外,为了确定产品的价格、分配投资总额、扩大再生产等,就需要研究价格形成问题、投资效果问题和扩大再生产问题。在经济计划中还需要考虑到物资的运输,这就涉及全国范围内的合理运输问题。在研究这些问题时,运筹学是一个得力的工具。在制订和执行计划时,迅速及时地预估出当年农业产量的数值是具有重大意义的,这又促使我们研究大面积估产的问题。在这里,数理统计是不可或缺的方法。

除此以外,在一般的工农业生产中,我们也会遇到大量的数学问题。以基本建设为例,数学的应用也非常广泛。例如《中学生》1960年第3期里刊登的一篇“人民大会堂和数学”,它就告诉我们建造人民大会堂这样一座宏伟的建筑物,除了工程技术人员要作复杂细致的计算以外,广大工人同志在实际施工过程中,也需要用到一些基本的数学知识。其他要运用到数学之处很多。例如,各个生产部门为了努力增产、厉行节约,各行各业都要考虑节省原材料、降低成本、提高设备利用率、合理安排劳动力等等,这些问题没有不涉及数学的。又如,农业生产中作物的布局问题、估产问题、蓄水问题、梯级水库

的合理调度问题、农药的配制和使用问题等等，也都要用到数学。

总之，解决以上所提出的一些课题以及在社会主义建设中还会遇到的其他大大小小的数学课题，是我国数学工作者的光荣任务，也是广大有文化的劳动者的神圣职责。而且以上很多问题的解决，单纯依靠已有的数学方法和工具显然是不够的，还必须在各个数学领域里进行大量的、创造性的理论工作；在许多方面，还要求理论工作走在实践工作的前面，如前面所提到的，电子计算机的数学理论就是其中的一个例子。因此，这些课题将成为我国数学发展的一个动力，而这些课题的解决，无疑地将成为我国数学接近世界先进水平的一个标志。

### 三 什么是正确的学习态度

今天我们中学的同学是在十分优越的条件下学习的。有很好的教师，有完备的校舍，有足够的教学设备，比我的中学时代不知好多少倍。别的学科姑且不谈，单就数学这门学科的教学回顾一下当年的中学情况吧。我过去学习的中学是四年制，担任数学课的教师大多是旧制中学毕业生，或学法律、教育的高等院校毕业生，很少有大学或师范院校数学系科毕业的。例如，有一年教我们平面几何的老师是高等师范学校数学系毕业的，但是，不久他就被调到北京去了。看来，我所以把几何定做自己的专门组课，同这位老师的教导是很有关系的。那时候，算术、几何（包括平面几何与立体几何）各学一年，三角、初等代数各学半年，高等代数学一年；用的教本是温德华士编的几何（英文本）的中译本，另外也用过秦汾编的几

何和其他一些教本；课外读物连一册也看不到。老师教我们，也不象现在的老师这样认真负责。我还记得，我所在的一班有四十五人，那年考代数的试题里有一题是  $x^{12} - y^{12}$  的因式分解，全班只有我一个人做出来。可见当时教学质量是不高的。其他物质条件更不能同今天相比了。

今天同学们生长在毛泽东时代，在十分良好的环境里学习，真是莫大的幸福，应该记住，这是中国共产党和毛主席领导全国人民革命斗争得来的，是无数先烈抛头颅、流鲜血换来的。但是，我们也不能不看到，我国在经济上、文化上还是很落后的。正是因为这样，我国人民在中国共产党的领导下，有信心，有志气，主要依靠自己的努力，经过长期的斗争，来改变贫穷落后的面貌，逐步把我国建设成为农业现代化、工业现代化、国防现代化和科学技术现代化的强大社会主义国家。这个重大责任落在我们大家的身上，特别是你们年青一代的身上。如前所述，建设社会主义是离不开数学的，所以应该充分利用当前的大好形势，努力学好数学，也要学好其他学科，扎实地打好中学阶段的基础，准备将来同全国人民一起劳动，一起斗争，创造更加美好的未来——共产主义社会。要学好数学，应该采取什么样的学习态度呢？我想提出如下的三点意见。

第一，要为社会主义发挥学习的积极性。在中学里努力学习，将来争取升学，这样做是不是为个人打算呢？升学是为取得更进一步学习的机会，学到更好的本领，为劳动人民服务。但是，高等学校入学人数根据国家建设需要来规定，不可能而且也不应该招收全部中学毕业生。如果招收全部毕业生，工厂和农村的劳动力又从何而来呢？所以中学毕业生中能够升入高等学校学习的只能是少数，而大部分都要直接参加生

产劳动,特别是到农村参加劳动。那么,是不是由于自己不一定能升学就认为不能实现自己的“理想”,从而就学得马马虎虎呢?这当然就不对了。任何人总有一个理想,只不过理想有伟大和渺小之差罢了。如果学习的动机只是为了个人将来成名成家,那么这种理想未免太渺小了。要为共产主义奋斗,这才是伟大的理想。要使这个理想能够实现,不致成为空想,我们就要关心政治、关心集体、遵守纪律、参加劳动、为社会主义奋发学习,要警惕并抵制资产阶级思想的影响,要做到又红又专。“红”是政治,政治要挂帅;“专”是业务,要把业务学好,使它为劳动人民服务,而不是为个人成名成家服务,就必须依靠政治领导,把业务引导到正确的方向。我们的“专”应该表现在为社会主义建设上,“红”不是抽象的,也不能只停留在口头上或文字上,而应该用“专”把它具体表现出来。我们说,要有全面发展的观点,重要意义就在这里。我们在中学里把数学学得更好些,对毕业后直接参加生产劳动或升入高等学校进一步学习当然都有很大帮助;只要注意我们学好数学的目的不仅仅是为了升学,也是为了能够把数学更好地应用到社会主义建设中去。能升学的同学,将来高等学校毕业后还是同样为社会主义、劳动人民服务,同不升学的同学稍有不同之处是在时间上相差几年,在业务分工上有所不同,如此而已。有的同学认为,如果将来不能升学,就低人一等,因而“发奋”学习,目的只是为了升学;有的同学认为,反正将来没有希望升学,不升学,数学好象没有多大用处,就马马虎虎学习数学;有的同学虽然在道理上也懂得在我国社会主义建设中,需要大量的知识青年,中学里学到的数学知识在工农业生产中也大有用处,但是学习中怕艰苦,不肯钻研;等等。这些看法和态

度都是不正确的。正确的看法和态度应该是，大家更好地发挥学习数学的积极性，毕业后不论升学或者到农村劳动，都要使数学这门学科的知识在祖国社会主义建设事业中发挥最大的作用。

第二，既要争取指导，又要进行独立思考。对中学同学说来，最能了解你们学习数学的情况的，了解你们现阶段数学程度的，再也没有人能比得过你们的数学老师了。因此，同学们要多向老师请教，争取老师的教导，要按照老师的要求进行学习。如果有人问我过去怎样学习数学的话，我回答三句话：一、听从老师的教导，学好数学，也学好其他学科；二、刻苦钻研，迅速养成独立思考能力；三、坚持下来，风雨无阻。要听从老师的教导，这并不排斥同学在学习中发挥主观能动性，只是说，不要不恰当地发挥“主观能动性”，甚至把自己抬高到比老师还要“内行”的程度，错误地解释“一代好一代”，“青出于蓝而胜于蓝”。只有今天接受老师的教导，将来才可以而且也必须超过老师。即使能够做到这一点，那也是将来的事，并且也不可能一下子在所有方面都胜过老师。我经常同大学里数学系的同学和青年教师谈起：“你们既要解放思想，破除‘老师万能’的想法，又要认真的向老师学习尚未学到家的某些知识和经验，来提高自己的业务水平，譬如我读外文书的能力，你们就不是一年、两年可以学到的。千万不要一脚把我踢开。”这段话，我自认为是很诚恳的。所以同学们必须尊敬老师，对老师要有礼貌，不要评头品足。我们要把自己的学校看成是最好的学校，自己的老师看成是最好的老师。只有这样，才能虚心学习，才能虚心向老师请教，也才能真正学得到东西，才能一代胜一代。个别新老老师的教学方法不能完全令人满意，总

是难免的。这也是教育事业迅速发展中的暂时现象。只要同学们养成善于思考、善于抓中心的习惯，做好预习和复习，把时间更好地、更合理地分配起来，把上课和做作业很好地配合起来，这样也就可以把知识、技能学好。古语说：“名师出高徒。”名师当然要出高徒，天下没有不出高徒的名师，否则就不成为名师。可是反过来也应该看到，高徒并不是个个都从名师那里出来的。重要的在于自己的主观努力。毛主席教导我们：虚心使人进步，骄傲使人落后。我们必须牢牢记住这句话。

独立思考能力的培养，中学阶段起着重要的作用。同学们在学习中小孩走路，开始总要大人扶着走。但随着孩子的成长，大人要放放手，让他试着走，这时孩子也有这样的要求，因此他即使摔了跤，也还是要继续试。“吃一堑，长一智”，通过多次尝试，孩子终于可以独立行走了。学习开始，老师对同学总是多扶一把，教的知识具体细致，但随着同学学习能力的提高，老师就要逐步少扶一点，而要求同学们自己多动一些脑筋、多考虑些问题。只有通过自己思考，才能使获得的知识更加巩固。所以同学们在学过的知识范围内，遇到不懂或难懂的地方，首先自己想想看，做做看，想不出、做不出的时候，再请教老师。这样就可以逐步养成独立思考问题、独立工作的习惯。这种习惯对今后工作、学习将带来无限的好处。譬如我在当研究生的时候，有一次，在研究几何问题上遇到一些从前没有学过的解析几何知识，我去请教老师，老师要我去查沙尔门、菲德拉的解析几何。这书一共有三厚本，又是德文本，那时候我读起来也很吃力，但只好去啃它。当时也埋怨过老师不来教我。但是当我读完那三大本以后，不但解决了我

的研究问题，同时还得到一生用不完的基础知识，对以后的研究工作起了很大的作用。我用这个例子，不是要中学同学都去钻自己没有学过的知识，而是希望同学们养成独立思考问题的习惯，要善于用脑子。象你们做的作业，一般通过自己思考都是能够解决的。但有的同学就怕动脑筋，稍有疑难就问别人，结果自己真正得到的极少，更大的损失是自己没有学会一套学习和工作的方法。

总之，我们既要尊敬老师，听老师指导，从老师那里学到自己不懂的知识，又要善于培养自己思考问题、学习抓中心的习惯和能力。两者必须结合起来，不可偏废，只有这样，我们才能够学习得更好，进步得更快。

第三，要正视困难，刻苦钻研。学习数学和学习其他学科一样，只要注意打好基础、争取指导，同时发挥独立思考作用，总是能够比较顺利地前进的。但是，这不等于说没有困难。学习前人传下来的知识，要掌握和运用这些知识，并且使之发展扩大，进一步广泛地应用于实际，来为社会主义服务，这个过程肯定地是错综复杂、万分艰巨、不可能没有困难的。同学们必须用奋发图强的精神对待困难。一方面，我们要在战略上藐视困难，要立壮志，攀高峰；另一方面要在战术上重视困难，要充分估计可能遇到的各种各样的困难。事前作好准备，以免在遇到困难时惊慌失措。

我们学习知识有两种情况，一是学习前人传下来的书本上的知识，对于这类知识只要多看、多想、多实践，一定能够掌握它。由于各人的理解能力有差别，遇到的困难也会有所不同，但是，归根到底，这类知识是完全能够为我们所掌握和运用的。在中学里学习的数学，可以说全部属于这一类。总的



说来,今天同学们在中学里毕竟处于“打基础”的时期,在学习过程中碰到的困难,当然不会太大,可是困难也是存在的。有了困难,就应该去克服它。另一种情况是学习正在发展中的、尚未达到十全十美的知识。对于这类知识的学习,情况就不完全相同了。除了要通过刻苦钻研才能理解以外,不同于前一种情况的在于:坚持钻研的结果,不仅能够把已经明确的那一部分搞清楚,而且还可以把问题向前推进一步,这就是科学研究——创造性的工作。同学们将来会遇到这些问题的,这里就不多谈了。

总之,在学习数学的过程中,我们既不要害怕困难,也不要把学习看做平坦的、一帆风顺的过程。正确的态度是:既要有正视困难的勇气,又要有克服困难的毅力。只有这样,我们才能把功课学好。

#### 四 学好数学的方法

数学具有高度抽象性,而应用却十分广泛。怎样学好数学,并且使它能够为我们所掌握运用,自然不是那么轻而易举的事情。如大家所知,在小学里学习算术,主要是结合具体事例,从实际课题出发,达到能够正确而迅速地运算和能够直观地认识一些简单的平面图形、立体图形的要求。进入中学以后,要在小学算术的基础上对数量关系的知识作进一步的学习,要对空间形式的知识作系统的学习,并且要对形与数相结合的知识进行学习。所以在中学阶段里,特别是高中阶段里学习数学的任务是比较繁重的,也是非常重要的。数学学得好坏,不仅关系着今天能不能学好其他学科如物理、化学等,而且,更重要的是关系着毕业后能不能解决生产劳动中将遇