微积分专题论丛

周民强　编著

科学出版社

微积分专题论丛

周民强　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书在微积分课程范围内，对其中重要课题的各个层次和类型解法作了较系统的归纳和介绍，内容包括：函数的周期性、函数的凸性、函数方程、数列极限、函数极限、函数的连续性、函数的可导性、函数的 Riemann 可积性、函数的原函数、数值级数求和、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性类比、辅助函数. 学习本书，可帮助读者加深对微积分理论的理解，并提高在后继课程学习中的悟性.

本书可供普通高等院校理工类各专业本科生、研究生及教师参考使用.

图书在版编目（CIP）数据

微积分专题论丛/周民强编著. —北京：科学出版社，2013

ISBN 978-7-03-036186-8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①微积分–专题研究 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 297226 号

责任编辑：姚莉丽／责任校对：刘小梅

责任印制：阎 磊／封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京九天志诚印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2013 年 1 月第一次印刷 印张：19

字数：371 000

定价：39.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

微积分学是各高等院校理工科专业 (尤其是有关数学类专业) 的必修课程, 是学习近现代科学的基础. 其内容包括微分、积分与级数, 其基本手段是极限理论, 且分一元和多元函数顺序渐进. 从而一个课题的提出和解答, 顺着知识面的扩大和层次的深入, 呈现出多种思路和技巧性. 由于这一过程是贯穿在整个体系之中的, 故对它的理解和掌握就要逐步推进.

撰写本书的目的, 就是要将在前后不同条件和层次中研讨的同一课题串在一起, 对其作一个较系统的归纳和介绍. 可以肯定, 了解这些论述必将使读者巩固所学知识, 加深对微积分理论的理解, 也会提高在后继课程学习中的悟性.

书后附录 1 介绍了解微积分命题的两种主要思维策略, 这是作者在学习中的经验之谈; 附录 2 写的是作者在课堂教学中使用的辅助材料, 仅供参考. 专题中某些微积分的常见部分以及进一步提高的内容均用小字标出.

作　者

2012 年 3 月

目　　录

专题1　函数的周期性

研究实值函数的性态是微积分课程的中心内容. 从大范围的对称性分析实值函数, 其中重要的类型是周期函数与凸函数. 本专题将对前者的特征作一简介, 并认定函数均在 $\mathbf{R}^1$ (实轴, 一维欧氏空间, 也记为 $\mathbf{R}$) 上定义. ($\mathbf{Z}$ 表示全体整数, $\mathbf{N}$ 表示全体正整数, $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数.)

设 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}^1$ 上. 若存在 $T>0$, 使得 $f(x+T)=f(x)(x\in\mathbf{R}^1)$, 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数. 通常, $f(x)$ 的 (基本) 周期 T 是指最小的正周期 (如果存在). 常见的周期函数是三角函数.

1.1　函数周期的特征

命题 1　设 $f(x)$ 是连续的周期函数, 且记其一切正周期全体形成的数集的下确界为 T_0. 若 $T_0=0$, 则 $f(x)\equiv C$ (常数).

证明　由题设知, 对任给 $\delta>0$, 均存在 $f(x)$ 的周期 $\tau:0<\tau<\delta$. 由此易知, 对长为 δ 的任意的区间 I, 均存在 $n\tau\in I(n\in\mathbf{Z})$, 而且 $f(n\tau)=f(\tau)=f(0)$. 因此, 对 $x\in I$, 必有 $n\tau\in I$, 使得 $|n\tau-x|<\delta$. 根据连续性, 导出 $f(x)=f(0)(x\in\mathbf{R}^1)$.

注 1　Dirichlet 函数是非常数的周期函数, 且不存在最小正周期.

注 2　设 $f(x)$ 是非常数函数的周期函数. 若 $f(x)$ 有一个连续点, 则 $f(x)$ 存在最小正周期.

证明　假定 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的连续点, 则存在 $x_1\neq x_0$, 使得 $f(x_1)\neq f(x_0)$. 如果 $f(x)$ 没有最小正周期, 那么存在正周期列 $\{T_n\}:\lim\limits_{n\to\infty}T_n=0$. 现在给 $\varepsilon:0<\varepsilon<|f(x_1)-f(x_0)|$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\quad(|x-x_0|<\delta).\tag{$*$}$$

也存在 n_0, 使得 $0<T_{n_0}<\delta/2$. 易知至少有一个 $k_0T_{n_0}(k_0\in\mathbf{Z})$, 它属于 $(x_0-x_1-\delta,x_0-x_1+\delta)$. 故得 $x_1+k_0T_{n_0}\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 然而根据式 $(*)$ 可知

$$|f(x_1)-f(x_0)|=|f(x_1+k_0T_{n_0})-f(x_0)|<\varepsilon.$$

这导致矛盾, 证毕.

注 3　若 $f(x)$ 是无基本周期的周期函数, 则 $f(x)$ 的周期全体在 $\mathbf{R}^1$ 中稠密.

证明　应用反证法立即推出矛盾.

命题 2　不存在函数 $f(x)$, 它以每个无理数为周期, 而任一有理数均不是其周期.

证明　反证法. 假定存在此函数 $f(x)$, 则对有理数 r, 必存在实数 x_r, 使得 $f(x_r+r)\neq f(x_r)$. 分别讨论如下:

(i) 若 x_r 是有理数, 则取无理数 y_r, 可知

$$f(x_r+r)=f(x_r+r+y_r)=f(x_r).$$

这与题设矛盾.

(ii) 若 x_r 是无理数, 则 $f(x_r+r)=f(r)$, 但此时有 $f(r)=f(r-x_r+x_r)=f(x_r)$, 这也导致矛盾.

命题 3　设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数, 若数集 $\{f(n):n=1,2,\cdots\}$ 是无穷集, 则 T 是无理数.

证明　反证法. 若 T 是有理数 p/q (p,q 是互素正整数), 则令 $n=kp+r$ (k,r 是正整数且 $0<r<p-1$), 可知 $f(n)=f(kp+r)=f(r)$. 从而得

$$f(n)\in\{f(1),f(2),\cdots,f(p-1)\}\quad(n\in\mathbf{N}).$$

这与 $\{f(n)\}$ 是无穷集矛盾.

命题 4　设 $f(x),g(x)$ 都是周期函数. 如果

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0,$$

那么 $f(x)=g(x)(x\in(-\infty,\infty))$.

证明　设 T 是 $f(x)$ 的周期. 由题设知 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+T)-g(x+T)]=0$, 而由不等式

$$|g(x+T)-g(x)|\leqslant|g(x+T)-f(x+T)|+|f(x+T)-f(x)|+|f(x)-g(x)|$$

可知, $g(x+T)-g(x)\to 0(x\to+\infty)$. 因为 $g(x+T)-g(x)$ 是周期函数, 所以 $g(x+T)-g(x)\equiv 0$. 即 $g(x)$ 也以 T 为周期. 而由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ 立即可知 $f(x)-g(x)\equiv 0$.

命题 5　对于周期函数 $f(x)$, 若有 $(M>0)$

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|x-y|,\quad x\in\mathbf{R}^1,\quad y\in\mathbf{R}^1\quad(\text{即 } f\in\mathrm{Lip}^1\mathbf{R}^1),$$

则其周期 $T\geqslant 2|f(y)-f(x)|/M$ $(x,y\in\mathbf{R}^1)$.

证明　只需讨论满足 $0\leqslant x<y\leqslant T$ 的 x,y. 此时有

$$T=(y-x)+[T-(y-x)]=|y-x|+|(x+T)-y|$$

$$\geqslant |f(y) - f(x)|/M + |f(x+T) - f(y)|/M$$
$$= 2|f(x) - f(y)|/M.$$

命题 6 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上以 1 为周期的连续函数, 试证明存在 ξ, 使得 $f(\xi+\pi) = f(\xi)$.

证明 取 $[0,1]$ 中两点 x_1, x_2, 使 $f(x_1)$ 为最小值, $f(x_2)$ 为最大值, 再令 $F(x) = f(\pi+x) - f(x)(0 \leqslant x \leqslant 1)$, 易知 $F(x_1) \geqslant 0, F(x_2) \leqslant 0$. 从而存在 $\xi \in [0,1]$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即得所证.

命题 7 (i) 对定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的 $f(x)$, 若存在 $T \neq 0$, 使得 $f(x+T) = f(x) + C$ (C 是常数), 则存在以 T 为周期的函数 $g(x)$, 使得 $f(x) = g(x) + Cx/T$.

(ii) 若存在 $T \neq 0, \lambda > 0$, 使得 $f(x+T) = \lambda f(x)$, 则存在周期函数 $g(x)$ 以及 $C > 0$, 使得 $f(x) = C^x g(x)$.

证明 (i) 取 $g(x) = f(x) - Cx/T$, 即可得证.

(ii) 取 $C = \lambda^{1/T}$, 作 $g(x) = C^{-x} f(x)$, 则

$$g(x+T) = \lambda^{-(x+T)/T} f(x+T) = \lambda^{-x/T} \cdot \lambda^{-1} \cdot \lambda f(x)$$
$$= \lambda^{-x/T} f(x) = C^{-x} f(x) = g(x).$$

由此即可得证.

命题 8 设 $f(x)$ 以 T 为周期. 若 $f \in R([0,1])$ (即 Riemann 可积), 则

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

证明 不妨设 $f(x) \geqslant 0$ (否则以 $M - f(x)$ 代 $f(x)$ 即可, 其中 M 是 $f(x)$ 的上确界). 易知对任意的 $A > 0$, 存在 n, 使得 $nT \leqslant A < (n+1)T$. 因为

$$\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n \int_0^T f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_0^{(n+1)T} f(x)\mathrm{d}x = (n+1) \int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

所以导出

$$\frac{n}{(n+1)T} \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)T} \int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{A} \int_0^A f(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{1}{nT} \int_0^{(n+1)T} f(x)\mathrm{d}x = \frac{n+1}{nT} \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $n \to +\infty$, 即可得证.

命题 9 设 $f \in C([0,1]), g \in C(\mathbf{R}^1)$, 且均为 $T = 1$ 的周期函数, 则

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

证明　不妨假定 $g(x)>0$ (否则考虑 $g(x)+M, M>0$), 且可知

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f\left(\frac{k+x}{n}\right)g(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\xi_k}{n}\right)\cdot\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \to \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

其中应用积分中值公式, ξ_k 位于 $(0,1)$ 内.

命题 10　设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$. 若 T_1, T_2 均为 $f(x)$ 的周期, 且 $T_1/T_2 \bar{\in} \mathbf{Q}$ (即 T_1/T_2 是不可通约的). 试证明 $f(x)\equiv C$ (常数).

证明　(i) 易知数集 $E=\{m+nT_1/T_2: m,n\in\mathbf{Z}\}$ 在 $\mathbf{R}^1$ 中稠密, 故对 $x\in\mathbf{R}^1$, 存在子列 $\{m_k\},\{n_k\}$, 使得 $(m_k+n_kT_1/T_2)\to x/T_2 (k\to\infty)$. 而由 $f(x)$ 的连续性和周期性可知, 对 $x\in\mathbf{R}^1$, 有

$$f(0)=\lim_{k\to\infty} f(m_kT_2+n_kT_1)=f(x).$$

注　一个不是常数的周期函数可以有两个不可通约的周期 T_1 和 T_2. 例如: 作

$$E=\{x\in\mathbf{R}^1: x=tT_1+sT_2; s,t\in\mathbf{Q}\},\quad f(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in\mathbf{R}^1\backslash E.\end{cases}$$

1.2　从对称性看函数的周期性

命题 1　若 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $x=a, x=b(a\neq b)$ 对称, 即满足

$$f(a+x)=f(a-x),\quad f(b+x)=f(b-x)\quad (x\in\mathbf{R}),$$

则 $f(x)$ 是周期函数.

证明　由题设知 $f(x)=f(2a-x)=f(2b-x)$, 令 $t=2b-x$, 可得 $f[t+2(a-b)]=f(t)$. 这就说明 $f(x)$ 是周期为 $2(a-b)$ 的函数.

命题 2　若 $y=f(x)$ 的图形关于点 $P_0=(x_0,y_0)$ 对称, 即 $f(x_0+x)-y_0=y_0-f(x_0-x)$, 以及关于直线 $y=b(b\neq x_0)$ 对称, 则 $f(x)$ 是周期函数.

证明　因为依题设可得 $(x\in\mathbf{R})$

$$\begin{cases}f(b+x)=2y_0-f(2x_0-b-x), & f(b-x)=2y_0-f(2x_0-b-x),\\ f(x)=2y_0-f(2x_0-2b+x), & f(2b-2x_0+x)=2y_0-f(x),\end{cases}$$

所以 $f(2x_0-2b+x)=f(2b-2x_0+x)$. 从而可知

$$f(x) = f[4(b-x_0)+x] \quad (x \in \mathbf{R}),$$

即 $f(x)$ 的周期为 $4(b-x_0)$.

1.3 运算中函数的周期性

函数的周期是指函数值重复段落的长度, 由于长度可以不同, 故函数具有什么样的性态会出现周期现象? 在运算中对周期有什么影响? 下述结论是关于这方面的认识.

首先, 若 $f(x), g(x)$ 均为周期是 T 的函数, 则 $f(x)+g(x), f(x)-g(x)$ 以及 $f(x)/g(x)$ (分母不为 0) 等四则运算中仍保持周期为 T. 复合函数 $f[g(x)]$ 也一样.

其次, 若 $\{f_n(x)\}$ 是周期均为 T 的函数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)(x \in \mathbf{R})$, 则 $f(x)$ 也是周期为 T 的函数; 若 $f(x)$ 可导, 则导函数 $f'(x)$ 也是周期为 T 的函数.

命题 1 (i) 若存在 $T \neq 0$, 使得 $f(x+T) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 是周期函数.

(ii) 若 $f(x)$ 有界, 且 $f(x+1/6)+f(x+1/7) = f(x)+f\left(\dfrac{13}{42}\right)$, 则 $f(x)$ 是周期函数.

证明 (i) 由 $f(x+2T) = f[(x+T)+T] = -f(x+T) = -[-f(x)] = f(x)$. 可知 $f(x)$ 的周期为 $2T$.

(ii) 作 $F(x) = f(x+1/6) - f(x)$, 则 $F(x+1/7) = F(x), F(x+1) = F(x)$. 再作 $H(x) = f(x+1) - f(x) = F(x) + F(x+1/6) + \cdots + F(x+5/6)$, 则又有 $H(x+1) = H(x)$. 由此可知 $H(x+k) = H(x)$ $(k \in \mathbf{N})$. 因为又有

$$f(x+k) - f(x) = H(x) + H(x+1) + \cdots + H(x+k-1),$$

所以 $f(x+k) - f(x) = kH(x)$ $(k \in \mathbf{N})$. 由 $f(x)$ 的有界性可知, $kH(x)$ 对 $k \in \mathbf{N}$ 也有界. 然而, 这只有在 $H(x)$ 恒为 0 才有可能. 因此有 $f(x+1) = f(x)$ $(x \in \mathbf{R})$.

命题 2 (i) 若存在 $T_0 > 0$, 使得

$$f(x+T_0) = [1+f(x)]/[1-f(x)] \quad (x \in \mathbf{R}^1),$$

则 $f(x)$ 是周期函数.

(ii) 若有 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 且存在 $T_0 : f(T_0) = 0$, 则 $f(x)$ 有周期 $4T_0$.

证明 (i) 因为有

$$\begin{aligned} f(x+2T_0) &= f[(x+T_0)+T_0] = [1+f(x+T_0)]/[1-f(x+T_0)] \\ &= \frac{1+[1+f(x)]/[1-f(x)]}{1-[1+f(x)]/[1-f(x)]} = \frac{2}{-2f(x)} = -\frac{1}{f(x)}. \end{aligned}$$

由此可导出

$$f(x+4T_0)=f[(x+2T_0)+2T_0]=-\frac{1}{f(x+2T_0)}=-\frac{1}{-1/f(x)}=f(x).$$

(ii) 在题式中以 $x+T_0$ 代替 x, T_0 代替 y, 可得

$$f(x+2T_0)+f(x)=2f(x+T_0)f(T_0)=0.$$

由此知 $f(x+2T_0)=-f(x)$. 再应用命题 1(i), 即得证.

命题 3　设 $f(x)\neq 3(x\in\mathbf{R}^1)$. 若存在 $T>0$, 使得 $f(x+T)=[f(x)-5]/[f(x)-3](x\in\mathbf{R}^1)$, 则 $f(x)$ 是周期函数.

证明　(i) 首先, 易知 $f(x)\neq 2$. 否则可推出 $f(x+T)=3$, 与题设矛盾. 类似地, 也有 $f(x)\neq 1(x\in\mathbf{R}^1)$.

(ii) 由题设可得到 $(x\in\mathbf{R}^1)$

$$\begin{aligned}
f(x+2T)&=\frac{f(x+T)-5}{f(x+T)-3}=\frac{2f(x)-5}{f(x)-2},\\
f(x+3T)&=\frac{2f(x+T)-5}{f(x+T)-2}=\frac{3f(x)-5}{f(x)-1},\\
f(x+4T)&=\frac{3f(x+T)-5}{f(x+T)-1}=f(x).
\end{aligned}$$

这说明 $f(x)$ 有周期 $4T$.

命题 4　若 $f(x)$ 不是单射, 且存在 $g(x,y)$, 使得 $f(x+y)=g(f(x),y)((x,y)\in\mathbf{R}^2)$, 则 $f(x)$ 是周期函数.

证明　由题设知, 存在 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)$, 且知 $(y\in\mathbf{R}^1)$

$$f(x_1+y)=g(f(x_1),y)=(g(x_2),y)=f(x_2+y).$$

从而对任意的 $z\in\mathbf{R}^1$, 令 $y=z-x_1$, 有

$$f(z)=f(z+(x_2-x_1))\quad(z\in\mathbf{R}^1).$$

这说明 x_2-x_1 是 $f(x)$ 的周期.

命题 5　若存在 x_0, 使得

$$f(x_0+x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

则 $f(x)$ 是周期函数.

证明　由题设知

$$f(x+2x_0)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+x_0)-f^2(x+x_0)}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - f^2(x)} - [f(x) - f^2(x)]}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - f(x)\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2} + \left| f(x) - \frac{1}{2} \right|$$

因为 $f(x) \geqslant 1/2(-\infty < x < +\infty)$, 所以 $f(x)$ 以 $2x_0$ 为周期:

$$f(x + 2x_0) = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

特例 $f(x) = \begin{cases} 1/2, & 2n \leqslant x < 2n+1 \\ 1, & 2n+1 \leqslant x < 2n+2 \end{cases} \quad (n \in \mathbf{Z}), x_0 = 1.$

命题 6 记 $f(x)$ 的 n 次复合为 $f\overbrace{[f[\cdots[f(x)]\cdots]]}^{n} = f^{\langle n \rangle}(x)$. 若有 $f(x+1) = f(x) + 1$, 则 $F_n(x) = f^{\langle n \rangle}(x) - x$ 是周期为 1 的函数.

证明 应用归纳法证明如下: 对 $n = 1$, 有 $F_1(x) = f(x) - x, F_1(x+1) = f(x+1) - (x+1) = f(x) - x = F_1(x)$. 即 $F_1(x)$ 的周期为 1.

现在假定 $n = k$ 时, $F_k(x)$ 的周期为 1, 则对 $k+1$, 由等式

$$\begin{aligned} F_{k+1}(x) &= f\overbrace{[f[f\cdots[f(x)]\cdots]]}^{k} - x = f[F_k(x) + x] - x, \\ &= f[F_k(x+1) + x] - x = f[f^{\langle k \rangle}(x+1) - (x+1) + x] - x \\ &= f[f^{\langle k \rangle}(x+1) - 1] - x = f[f^{\langle k \rangle}(x+1) - 1 + 1] - 1 - x \\ &= f[f^{\langle k \rangle}(x+1)] - (x+1) = f^{\langle k+1 \rangle}(x+1) - (x+1) = F_{k+1}(x+1) \end{aligned}$$

可知 (归纳法), $F_n(x)$ 是周期为 1 的函数.

命题 7 设 $f \in C(\mathbf{R}^1)$. 若 $|f(x)| \leqslant M/(1+x^2)(M > 0, x \in \mathbf{R}^1)$, 则 $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ 是周期为 1 的连续函数.

证明 对任意的 $A > 0$, 对 $|n| > 4A$, 有

$$|f(x+n)| \leqslant \frac{M}{l + n^2/2} \triangleq M_n.$$

注意到级数 $\sum_{n=-\infty} M_n$ 收敛, 可知级数 $\sum_{|n|>4A} f(x+n)$ 一致收敛. 从而 $F(x)$ 在 $[-A, A]$ 一致收敛. 这说明 $F(x)$ 在 $[-A, A]$ 上连续. 由 A 的任意性即可得证.

关于非周期函数, 有下列结论.

命题 8　设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续可微. 若有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty,$$

则 $F(x) = \sin[f(x)]$ 不是周期函数.

证明　反证法. 假定 $F(x)$ 是周期的, 那么 $F'(x) = f'(x)\cos[f(x)]$ 也是周期的. 从而知 $F'(x)$ 是有界函数. 考查数列 $a_n = 2n\pi(n \in \mathbf{N})$, 由于 $f(x)$ 连续且有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, 故存在 n_0, 当 $n \geqslant n_0$ 时存在 $x_n(n \in \mathbf{N})$, 使得 $f(x_n) = a_n$ $(n \in \mathbf{N})$. 注意到 $x_n \to +\infty(n \to \infty)$, 故知

$$\lim_{n\to\infty} F'(x_n) = \lim_{n\to\infty} f'(x_n)\cos f(x_n) = +\infty.$$

这与 $F'(x)$ 有界性质矛盾, 证毕.

特例　$f(x) = \sin x^2$ 不是周期函数.

注　设 $f(x)$ 是周期函数. 若 $F'(x) = f(x)$, 则 $F(x)$ 不一定是周期函数.

命题 9　$f(x) = \sin x + \sin\sqrt{2}x$ 不是周期函数.

证明　反证法. 假定 $f(x)$ 以 T 为周期, 即 $f(x+T) - f(x) = 0$ $(x \in \mathbf{R}^1)$. 由此可知

$$0 = 2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right) + 2\sin\frac{T}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{2}x+\frac{T}{\sqrt{2}}\right) \quad (x \in \mathbf{R}^1).$$

由此可推 $\sin(T/2) = 0 = \sin(T/\sqrt{2})$. 因此得出 $2n\pi = \sqrt{2}m\pi$, $m/n = \sqrt{2}$ $(m, n \in \mathbf{N})$. 显然, 这是不可能的. 证毕.

命题 10　设 $f \in C(\mathbf{R}^1)$. 若 $T = 1$ 和 $\sqrt{2}$ 都是 $f(x)$ 的周期, 则 $f(x) \equiv C$ (常数).

证明　由题设知, $f(x)$ 的 Fourier 系数满足

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-2n\pi\mathrm{i}x}\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x+\sqrt{2})\mathrm{e}^{-2n\pi\mathrm{i}x}\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{t=x+\sqrt{2}} \mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(t)\mathrm{e}^{-2n\pi\mathrm{i}t}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-2n\pi\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\hat{f}(n).\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}} \neq 1(n \neq 0)$, 所以 $\hat{f}(n) = 0(n \neq 0)$. 这说明 $f(x)$ 是一个常数.

命题 11　设 $f(x), g(x)$ 是各以周期为 T_1, T_2 的连续函数. 若 $T_1/T_2 \bar{\in} \mathbf{Q}$, 试证明 $h(x) = f(x) + g(x)$ 不是周期函数.

证明　反证法. 假定 $h(x)$ 以 T 为周期, 则由 $T_1/T_2 \bar{\in} \mathbf{Q}$ 可知, $T/T_1 \bar{\in} \mathbf{Q}$ 或 $T/T_2 \bar{\in} \mathbf{Q}$.

现在不妨设定 $T/T_1 \bar{\in} \mathbf{Q}$, 由于

$$f(x+T)+g(x+T)=h(x+T)=h(x)=f(x)+g(x),$$

故知 $H(x) \triangleq f(x+T)-f(x)=g(x)-g(x+T)$ 是连续的周期函数. 但 T_1 与 T_2 不可通约, 从而 $H(x)$ 恒等于一个常数. 这说明 $f(x+T)=f(x)+C$. 若 $C \neq 0$, 则以 $x=0, T$ 代入上式, 得 $f(2T)=f(T)+C=f(0)+2C$. 依据归纳法易推 $f(nT)=f(0)+nC$, 这与 $f(x)$ 的有界性矛盾. 因此 $C=0$, 而这又可推出 T 是 $f(x)$ 的周期, 即 $T=n_0T_1(n_0 \in \mathbf{Z})$, 还是导致矛盾. 证毕.

注 存在不可通约周期的周期函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, $f(x)+g(x)=h(x)$ 是周期函数.

例 设 a,b,c 是有理数, α,β,γ 是实数, 且满足 $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ 等价于 $a=b=c=0$ (例如 $\alpha=1,\beta=\sqrt{2},\gamma=\sqrt{3}$). 作

$$E=\{a\alpha+b\beta+c\gamma : a,b,c \in \mathbf{Q}\},$$

$$f(x)=\begin{cases} -b-c-b^2+c^2, & x=a\alpha+b\beta+c\gamma \in E, \\ 0, & x \bar{\in} E, \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} a+c+a^2-c^2, & x=a\alpha+b\beta+c\gamma \in E, \\ 0, & x \bar{\in} E, \end{cases}$$

注意, 每个数 $r\alpha(r \in \mathbf{Q}\backslash\{0\})$ 是 $f(x)$ 的周期, 每个数 $s\beta(s \in \mathbf{Q}\backslash\{0\})$ 是 $g(x)$ 的周期, 且均无其他周期. 此时 $h(x)=f(x)+g(x)$ 为

$$h(x)=\begin{cases} a-b+a^2-b^2, & x=a\alpha+b\beta+c\gamma \in E, \\ 0, & x \bar{\in} E, \end{cases}$$

且周期为 $t\gamma(t \in \mathbf{Q}, t \neq 0)$.

专题 2　函数的凸性

经常看到, 许多函数 $y=f(x)$ 的图形是向 y 轴正向朝上凸起, 或朝下凸即是凹的. 这是曲线形状常有的重要特征, 也是从几何角度探求函数性质的重要方面.

定义　设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上, 若对 I 中任意两点 $x_1,x_2: x_1<x_2$, 满足

$$f(x)\leqslant f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),\quad x\in[x_1,x_2]$$

(即曲线位于两点 $(x_1,f(x_1))$ 与 $(x_2,f(x_2))$ 间的连线 —— 割线之下方), 则称 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数. 若上式中 "$\leqslant$" 改为 "$<$", 则称其为严格下凸函数.

为简便起见, 下凸函数一律称为凸函数, 下面将对该函数类作概要介绍.

2.1　凸函数的等价描述

命题 1　$f(x)$ 是区间 I 上的凸函数当且仅当对 $x_1,x_2\in I$ 以及 $0\leqslant t\leqslant 1$ 必有

$$f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2).\qquad (*)$$

证明　充分性. 假定式 $(*)$ 成立. 易知存在唯一的 $t: 0\leqslant t\leqslant 1$, 使得 $x: x_1\leqslant x\leqslant x_2$, 有 $x=(1-t)x_1+tx_2$ 或写为 $t=(x-x_1)/(x_2-x_1)$. 从而由式 $(*)$ 可知

$$\begin{aligned}f(x)&=f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\\&=f(x_1)+t[f(x_2)-f(x_1)]=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 在 I 上是凸函数.

必要性. 对于 $x_1,x_2\in I$ 以及 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, 可记 $x=(1-t)x_1+tx_2$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, 则由凸性条件知

$$\begin{aligned}f[(1-t)x_1+tx_2]&=f(x)\leqslant f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)\\&=f(x_1)+t[f(x_2)-f(x_1)]=(1-t)f(x_1)+tf(x_2).\end{aligned}$$

即得所证.

注　运用归纳法还可证明, $f(x)$ 在区间 I 上是凸函数的充分必要条件是: 对 $x_i\in I(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$ 以及 $p_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n): p_1+\cdots+p_n=1$, 且满足

$$f(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)\leqslant p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)\quad(n\in\mathbf{N}).$$