管理工程系列教材

运筹学

YUNCHOUXUE

[第五版]

郭月心 主编

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

管理工程系列教材

运筹学

YUNCHOUXUE

（第五版）

郭月心 主编

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS
·广州·

内 容 简 介

运筹学方法是寻求最佳管理决策的重要方法之一．本书包括了线性规划、对偶规划、整数规划、动态规划、非线性规划、库存论、排队论等内容．书中每一部分内容都附有习题和答案．为了配合教学、科研的需要，还介绍了部分章节内容的计算机方法及程序，这些程序均已在IBM PC/XT型计算机上通过，同时，也方便在其他机型上使用．

本书可作大专院校经济管理工程专业及其他有关科系的教材或教学参考书，也可供厂矿企业、管理部门的工程技术人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

运筹学／郭月心主编．—5版．—广州：华南理工大学出版社，2012.9
ISBN 978－7－5623－3752－2

Ⅰ．①运…　Ⅱ．①郭…　Ⅲ．①运筹学－高等学校－教材　Ⅳ．①O22

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第208646号

运筹学
郭月心　主编

出版发行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学17号楼，邮编510640）
http://www.scutpress.com.cn　E－mail：scutc13@scut.edu.cn
营销部电话：020－87113487　87111048（传真）
责任编辑：谢茉莉
印 刷 者：湛江日报社印刷厂
开　　本：787mm×960mm　1/16　印张：13.75　字数：318千
版　　次：2012年9月第5版　2012年9月第20次印刷
印　　数：85001～88000册
定　　价：25.00元

目　录

第 1 章　绪　论 …… (1)
第 2 章　线性规划 …… (3)
　2.1　数学模型 …… (3)
　2.2　图解法 …… (9)
　2.3　标准格式的转换 …… (13)
　2.4　单纯形法 …… (17)
第 3 章　修正单纯形法 …… (40)
　3.1　修正单纯形法 …… (40)
　3.2　修正单纯形算法 …… (41)
第 4 章　对偶规划 …… (56)
　4.1　对偶规划的经济意义 …… (56)
　4.2　对偶规划理论 …… (59)
　4.3　对偶单纯形法 …… (67)
　4.4　灵敏度分析 …… (73)
第 5 章　线性规划的特殊类型及目标规划 …… (86)
　5.1　表上作业法 …… (88)
　5.2　分派问题 …… (94)
　5.3　目标规划 …… (102)
第 6 章　整数规划 …… (109)
　6.1　图解法 …… (109)
　6.2　分枝定界法 …… (110)
　6.3　割平面法 …… (114)
第 7 章　动态规划 …… (117)
　7.1　基本概念 …… (117)
　7.2　例子 …… (118)
第 8 章　非线性规划初步 …… (124)
　8.1　非线性规划问题及数学模型 …… (124)
　8.2　非线性规划的图示 …… (127)
　8.3　一维搜索 …… (128)

第 9 章　库存论 …………………………………………………………………（136）
9. 1　库存问题的提出 ……………………………………………………………（136）
9. 2　库存模型的有关概念 ………………………………………………………（137）
9. 3　不允许缺货的库存模型 ……………………………………………………（138）
第 10 章　排队论 ……………………………………………………………………（144）
10. 1　排队论基本概念及其共性………………………………………………（145）
10. 2　排队过程的数量指标及其通用的记号…………………………………（149）
10. 3　几个简单的排队系统模型………………………………………………（150）
10. 4　排队系统的费用优化……………………………………………………（154）
第 11 章　计算机分析程序 …………………………………………………………（156）
11. 1　带优化后分析的单纯形法计算…………………………………………（156）
11. 2　整数规划——分枝定界法的计算 INTPR ……………………………（163）
11. 3　单目标规划的计算 SG …………………………………………………（170）
11. 4　多目标规划的计算 MG …………………………………………………（175）
案例 …………………………………………………………………………………（181）
练习题答案 …………………………………………………………………………（185）

第1章 绪 论

运筹学是管理决策中定量分析的科学方法. 对于一个特定的管理问题，通过运筹学方法进行定量分析，求出特定问题的解，这对于解决复杂的管理问题起着积极的作用.

运筹学的一些朴素思想，在历史上可以追溯到公元前400年前，中国著名军事学家孙武著的《孙子兵法》一书中已有关于运筹学思想的描述，而正式形成是在1939年始于英国，当时在英国已有《运筹学小组》的核心存在，而以布莱克特（P. M. S. Blacket）领导的布莱克特小组最为著名. 该小组由3名哲学家、1名测量学家、1名天文学家、1名军官、1名普通物理学家、2名数学家和2名数理学家组成. 这些运筹学小组为政府解决许多复杂的军事问题：诸如如何组织城市防卫和有效进攻敌人问题；如何布置雷达站问题；如何选定轰炸潜水艇的飞机有效高度问题；为完成某项任务，轰炸机和战斗机如何组合问题；等等，都取得了显著的成效. 第二次世界大战结束后，运筹学方法广泛地应用于民用企业，大学亦开设了这门课程，1948年美国麻省理工学院首先开设了运筹学的非军事应用学科，随后，美国开设这方面的学科的高等院校共有30多所. 从20世纪50年代开始，出现了一批运筹学用于管理方面的书籍，如韦斯特·丘奇曼（C. West Churchuam）等3人合著的《运筹学入门》，爱德华·鲍曼（Edwad H. Bowman）等2人合著的《生产管理分析》，塞缪尔·里奇蒙（Samnel B. Richmond）著的《用于管理决策的运筹学》，等等. 这些都是从战争经验中获得一定数据来建立模型，描述一个特定的行动，把特定问题的解求出，从而告诉决策者应该怎样去做. 1948年英国成立了运筹学俱乐部（现在称为联合王国运筹学会），每3年召开一次国际性会议，首次是在1953年于英国伦敦举行，有21个国家派出代表参加.

中国大规模开展运筹学活动是在1958年. 在1956年中国科学院成立了运筹学研究小组，向全国推广运筹学，他们配合产业部门的生产需要，从经营、组织、管理方面来挖掘生产潜力，开始了广泛宣传和推广，在这个时期，我国运筹学应用取得了一些成果. 如在邮电方面，用来调整和组织城乡邮路网；划分投递道段；确定投递路线，合理组织邮政营业，安排包裹分拣生产过程；布置生产场地以及调运邮政空袋等. 在市内电话方面，运筹学用来科学地组织装拆工作，组织话机查修机线和网路设计. 在长途电话方面，用来搭配长途接续台的电路，安排班次，组织分发台的话单分发，传递以及记录台和查询台的工作. 在电报通讯方面，用以组织来报投递、搭配电路、电报底存放以及报房生产场地设计等. 在农村电话方面用来组织电话网的调整规划. 通用运筹学方法在争取以较少的资源消耗提高通信质量等方面取得了有效的经济效果.

此外，纺织工业中的配棉、纱机的看台、经轴储备量、拆布长度和棉纱支数的控制等也应用了运筹学方法而取得可喜成效. 运筹学应用面很广，几乎遍及所有门类. 生

物、水文、医药、冶炼、建筑、交通运输、商业等部门在不同程度上推行了运筹学，取得一定的经济效益. 不少人员从事这方面的工作，其中以华罗庚教授为代表，在大庆油田、黑龙江省林业战线、山西省大同市口泉车站、太原铁路局、太钢等地推行了统筹法，取得成功. 实践说明，运用运筹学的理论、方法去组织生产，管理企业，是能够发展生产力，提高经济效益的. 此外，也可在制订发展规划上应用. 例如，1988 年广东省县级社会、经济和科技发展总体规划制订，也大量地采用了运筹学的相关理论及模型. 随着企业现代化的发展，运筹学必将相应地得到更广泛的应用和发展，将会为社会主义企业发挥其积极的作用.

运筹学是分析和解决管理问题的一种有效方法，它以不同的数学模型，解决不同的管理问题，它的主要分支有：①线性规划；②整数规划；③非线性规划；④动态规划；⑤库存论；⑥排队论；⑦博弈论，等等.

综上所述，运筹学的产生是由于科学地研究管理问题的需要，是为了解决军事问题的需要而产生的. 从它的诞生和发展过程，可以知道运筹学是：利用计划方法和多学科专家组成的综合的队伍，把复杂的生产活动问题表示成数学模型，以期通过定量的分析为决策者提供数量方面的依据，从而提高决策者作出正确决策的能力.

练习题

1. 运筹学在企业管理中有什么作用?

第2章　线性规划

许多现行的决策是充分利用企业的一切资源，最大限度地完成各项生产计划，以获得最好的经济效果，线性规划就是达到这一目标的一种有效工具. 它所研究的问题主要有两类：一类是在给定数量的人力、物力等资源下，如何运用这些资源去完成最大的任务；另一类是在给定任务的情况下，如何统筹安排，使用最少量的资源去完成这项任务. 这两类问题，在不同部门可能有不同的特点，但是，它们也存在许多共性的东西. 一般地说，线性规划在管理方面的应用有：

（1）生产计划的安排. 为生产管理者确定最有利的生产方案，以适应企业所具有的生产能力，并使设备利用效率最高.

（2）原材料的分配. 以最优方式提供一个使原材料或产品运输费用最小的运输方案.

（3）各种原料的配合. 帮助生产管理者找出各种原料配合的比例，以满足特定混合物的质量要求.

（4）开料规划. 以最佳方法开料，使边角料最少，以达到提高原料使用率的目的.

（5）人力管理计划. 使人事管理部门能根据人员的特长来使用人员.

（6）位置设置. 工厂、仓库、设备放置的位置选择.

什么是线性规划呢？“线性”就是说用来描述两个或多个变量之间的关系是成正比例的. 例如，我们说 $x=f(y)$，这里 f 是一个线性函数，y 的任何变化都会引起 x 按一定的比例变化，如果用图表示这个关系，那是一条直线，因而称为线性. “规划”的意思是使用一定的数学方法，利用企业的有限资源得出一个最好的解. 也就是说，它表示从数学形式表达的一定条件下的一组方程式（或一组不等式）中求某些未知量. 综合上述两个概念，可以给线性规划作如下的定义：作出企业有限资源的最优分配的数学方法. 诚然，这个定义并不是唯一的，对于一个企业家来说，线性规划是实现企业目标的管理工具之一；而对于一个经济学家来说，线性规划是满足企业产品的供求规律而进行分配有限资源的方法；数学家则认为，线性规划是解决在一定约束条件下，求目标函数的最大值（或最小值）的方法. 可见不同阶层的人士对线性规划是作不同的定义的，但其实质是属于优化方法问题.

2.1　数 学 模 型

模型是描述现实世界的一个抽象，从而有助于解决这个被抽象的实际问题，而且能起着指导解决其他具有这些共性的实际问题的作用.

当我们用线性规划来求解一个实际问题的时候，需要把这个实际问题用适当的数学形式表达出来，这个表达的过程，就是建立数学模型的过程.

在建立数学模型过程中，首先要明确哪些是变量，哪些是已给出的常数，并用字母来表示变量，数字及其他符号表示已给常数，然后将实际问题中的一些规律或关系用数学表达式来加以描述.

在能用线性规划求解的实际问题中，这些数学表达式就是线性等式和线性不等式，而目标函数也是一个线性函数.

下面将结合一些实际问题来描述和讨论数学模型的建立.

2.1.1 产品品种问题

例：某车间生产甲、乙两种产品，每件甲产品的利润是 2 元，乙产品是 3 元. 制造每件甲种产品需要劳动力 3 个，每件乙种产品需要劳动力 6 个. 车间现有的劳动力总数是 24 个. 制造每件甲产品需要原材料 2 斤，而乙产品需要 1 斤，车间总共只有 10 斤原材料可供使用. 问应该安排生产甲产品多少件，乙产品多少件才能获得最大的利润（假设甲、乙产品均为畅销商品）.

解：假设以 x_1，x_2 分别表示甲、乙两种产品的计划产量，Z 为计划总利润值. 如果安排生产的甲、乙产品全部都能销售掉，要求达到的目标是使

$$Z=2x_1+3x_2 \qquad \text{达到最大.} \qquad (2-1-1)$$

式（2－1－1）表示本例要达到的目标是最大的利润，它是 x_1，x_2 的函数，故叫做目标函数.

生产甲、乙产品所用的材料和劳动力都不能超出现在可供使用的资源量，故有：

$$3x_1+6x_2\leqslant 24 \qquad \text{劳动力，} \qquad (2-1-2)$$

$$2x_1+x_2\leqslant 10 \qquad \text{原材料.} \qquad (2-1-3)$$

生产的安排，必须满足式（2－1－2）、式（2－1－3）的条件，这是带有约束性的，因此叫做约束条件.

为了便于建立数学模型，把实际问题简化列出，如表 2－1－1 所示.

表 2－1－1

单位产品的资源消耗		产品 甲	产品 乙	现有资源量
资源	劳动力（个）	3	6	24（个）
资源	原材料（斤）	2	1	10（斤）
单位产品利润（元）		2	3	

数学模型：

$$Z=2x_1+3x_2 \qquad \text{达到最大，}$$

满足约束
$$3x_1+6x_2\leqslant 24,$$
$$2x_1+x_2\leqslant 10,$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0\quad（安排产品数不可能是负数）.$$

这类型问题也称为资源最优利用问题，资源最优利用的一般数学模型如下：

①假设某企业有 m 种资源，已知每种资源的数量为 b_i（$i=1, 2, \cdots, m$）.

②该企业可以生产 n 种产品，已知生产每一种产品所消耗的各种资源的数量，以 a_{ij} 表示第 j 种产品对第 i 种资源的单耗量.

③各种产品的单位利润已知，用 C_j 表示第 j 种产品的单位利润值.

问题是如何在企业现有的资源条件下（劳动力、原材料、设备等），创造出最大的利润. 这一类问题的数学模型为：
$$Z=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n\quad 达到最大,$$
满足约束
$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i,\quad (i=1, 2, \cdots, m),$$
$$x_j\geqslant 0,\quad (j=1, 2, \cdots, n),$$
也可以表示为：
$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i,\ (i=1, 2, \cdots, m),$$
$$x_j\geqslant 0,\ (j=1, 2, \cdots, n).$$

2.1.2　合理配料问题的数学模型

例：某人因健康的需要，每日需要服食 A、B 两种维生素，其中维生素 A 最少服 9 个单位，维生素 B 最少服 19 个单位，现有六种营养物每克含 A、B 两种维生素量如表 2－1－2 所示，求花费最小的食物选择方案.

表 2－1－2

单位食物含量		食物种类						最少需要量
		一	二	三	四	五	六	
维生素	A	1	0	2	2	1	2	9
	B	0	1	3	1	3	3	19
单位价格（角）		3.5	3.0	6.0	5.0	2.7	2.2	

解：设六种食物分别各服用 x_1 克、x_2 克、x_3 克、x_4 克、x_5 克、x_6 克，总费用为 Z，则可得数学模型：
$$Z=3.5x_1+3.0x_2+6.0x_3+5.0x_4+2.7x_5+2.2x_6\quad 达到最小,$$

满足约束

$$x_1+0x_2+2x_3+2x_4+x_5+2x_6\geqslant 9,\qquad（维生素 A）,$$
$$0x_1+x_2+3x_3+x_4+3x_5+2x_6\geqslant 19,\qquad（维生素 B）,$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0,\ x_5\geqslant 0,\ x_6\geqslant 0.$$

配料问题的一般数学模型：

假设已知各种单位营养物（食物）所含有的各种营养成分诸如蛋白质、淀粉、纤维素、维生素、钙质等的数量（或化工厂某混合物产品的原料成分）.

根据营养学的要求，为保证人的健康成长，在每日的服用方案中所包含的各种营养物成分的数量不能少于规定的数量（或化工厂生产混合物产品所规定的含量要求）.

各种营养物（食物）的单位价（或化工厂原料单价）.

问题是如何制订一个满足最低营养要求，而总费用最少的配料方案.

以 m 表示营养成分的种类；

以 n 表示现有可选的食物种类；

以 b_i 表示第 i 种营养成分的最低需要量；

以 C_j 表示第 j 种食物的单价；

以 a_{ij}表示单位 j 种食物含第 i 种营养成分的数量；

以 x_j 表示在配料方案中所含有 j 种食物的数量.

目标是使总的费用最小

$$Z=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n\qquad 达到最小,$$

约束条件是各种营养成分达到最低要求，

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i,$$

选用的食物量不可能是一个负数，

$$x_j\geqslant 0,\qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

即

$$\min Z=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i,\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$
$$x_j\geqslant 0.$$

2.1.3　开料问题的数学模型

合理开料问题是许多工企业部门经常遇到的问题. 在一般情况下材料不可能完全地被利用，会有一部分余料，这势必加大产品的单耗和成本. 因此，如何最大限度地减少边角余料，提高材料利用率，从而降低产品成本，这是开料问题要研究的内容.

例如某车间有一批长为 180 厘米的坯料，现因产品需要，要将它截成三种不同长度的条料，三种条料规格分别为 70 厘米、52 厘米、35 厘米. 生产任务规定，这三种条料

需要量为 100 条、150 条、900 条. 问应如何开料，才能使总的耗坯料数量为最少?（也可以使边角余料最少）

为了完成规定的开料任务，最简单的办法就是单一开料法，即每一条坯料只开一种规格的条料. 单一开料方法简单方便，但往往会产生比较大的边角余料，导致材料利用率不太高. 为了减少边角余料，可采用套裁方法.

对于用同一坯料开出不同规格的条材，开料方式可以有多种的. 为了使总的边角余料数最小，把各种不同的开料方法一一列出，然后再建立开料的数学模型.

假设切口宽度为 0，或者切口宽度可以忽略不计，在这种情况下，如果从一条坯材上开出若干个零件来，这些零件的总长度一定不超过坯材的长度. 有了这个简单的判断准则，可以列出全部开料的方式来.

设在 180 厘米长的坯材上能开出规格为 70 厘米的 u 条，规格为 52 厘米的 v 条，规格为 35 厘米的 w 条. 那么符合式子:

$$70u+52v+35w \leqslant 180.$$

即坯料的总长度小于或等于原坯料的长度.

要把全部开料方式列出，使可以做到既不遗漏又不重复，应从最大尺寸的规格开始，即先计算一下规格为 70 厘米的最多能开到多少条?

$$u=\frac{180}{70}\approx 2 \text{ 条}.$$

①当 $u=2$ 时，$180-70\times 2=40$,

$$52v+35w \leqslant 40.$$

要满足 $52v+35w \leqslant 40$，只有 $v=0$，$w=1$，$52\times 0+35\times 1=5$,

于是得：规格为 70 厘米的，开 2 条，　$u=2$,
　　规格为 52 厘米的，开 0 条，　$v=0$,
　　规格为 35 厘米的，开 1 条，　$w=1$,

余料 $=5$ 厘米.

②当 $u=1$ 时，$180-1\times 70=110$

$$52v+35w \leqslant 110.$$

若取 $v=2$，则 $110-52\times 2=6$,

于是得：规格为 70 厘米的，开 1 条，　$u=1$,
　　规格为 52 厘米的，开 2 条，　$v=2$,
　　规格为 35 厘米的，开 0 条，　$w=0$,

余料 $=6$ 厘米.

③当 $u=1$ 时，$180-1\times 70=110$,

$$52v+35w \leqslant 110.$$

若取 $v=1$，则 $110-52\times 1=58$,
　　$w=1$，则 $58-35\times 1=23$,

于是得：规格为 70 厘米的，开 1 条，　　$u=1$，

规格为 52 厘米的，开 1 条，　　$v=1$，

规格为 35 厘米的，开 1 条，　　$w=1$，

余料 $=23$ 厘米.

④当 $u=1$ 时，$180-1\times70=110$，

$$52v+35w\leqslant110.$$

若取 $v=0$，$w=3$，则 $110-35\times3=5$，

于是得：规格为 70 厘米的，开 1 条，　　$u=1$，

规格为 52 厘米的，开 0 条，　　$v=0$，

规格为 35 厘米的，开 3 条，　　$w=3$，

余料 $=5$ 厘米.

……

依此类推，共有 $1+3+4=8$ 种开料方式，如表 2－1－3 所示.

表 2－1－3

各种规格的条数		开料方式								需要量（条）
		一	二	三	四	五	六	七	八	
规格	70 厘米	2	1	1	1	0	0	0	0	100
	52 厘米	0	2	1	0	3	2	1	0	150
	35 厘米	1	0	1	3	0	2	3	5	100
余料（厘米）		5	6	23	5	24	6	23	5	

现在的问题是，在这八种下料方工中找出用料最省的开料方案，也就是说，在保证零件需要量的前提下，使总的边角余料最少.

从表中可看出第一、第四、第八种方式开料其余料最小，但如果采用这三种方式开料，52 厘米的零件是没有的，不能满足配套的需要，为此必须同时采用多种开料方式，才能满足配套的需要量，又使余料最少.

假设：以第一种方式开料的坯材条数为 x_1 条，

以第二种方式开料的坯材条数为 x_2 条，

⋮

以第八种方式开料的坯材条数为 x_8 条.

目标是使总的余料为最少

$Z=5x_1+6x_2+23x_3+5x_4+24x_5+6x_6+23x_7+5x_8$　　达到最小，

满足约束

$$\begin{aligned}
2x_1+x_2+x_3+x_4 &\geqslant 100,\\
2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7 &\geqslant 150,\\
x_1+x_3+3x_4+2x_6+3x_7+5x_8 &\geqslant 100,
\end{aligned}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad (j=1, 2, 3, \cdots, 8).$$

合理开料问题的一般数学模型：

设开料方式有 n 种；

需开零件规格有 m 种；

第 i 种规格零件需要量为 b_i；

每条原材料用第 j 种方式开料，开出第 i 种规格的零件数为 a_{ij}；

每条原材料用第 j 种方式开料所剩的边角余料长度为 C_j.

则可得到如下数学模型：

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \qquad (i=1, 2, \cdots, m),$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad (j=1, 2, \cdots, n).$$

从前面列举的数学模型可以看出，要使用线性规划方法解决实际问题，需具备五个基本条件，就是：

(1) 具有确定的线性目标函数；

(2) 具有多个方案可供选择；

(3) 线性目标函数和线性约束条件能用数学式子表达；

(4) 变量间必须具有相互的联系；

(5) 资源的供应量是有限的.

2.2　图 解 法

线性规划问题求解的方法有多种，对于在数学模型中仅有两个变量的线性规划问题，用图解法去求它的解具有直观、易理解的优点，对于在数学模型中具有多于两个变量的线性规划求解，图解法那就不能胜任了. 下面通过一个具体的例子对图解法加以说明.

例：某车间生产甲、乙两种产品，每件所消耗劳动力、原料及可供使用资源量见表 2-2-1. 问：如何安排生产，才能使总利润达到最大?

表 2-2-1

单位产品消耗资源量	产品		现有资源量
	甲	乙	
劳动力	3	6	24
原料	2	1	10
单位产品利润（元）	2	3	

解：设安排生产甲产品 x_1 件，乙产品 x_2 件，总利润为 Z，有

$$Z=2x_1+3x_2 \quad 达到最大, \tag{2-2-1}$$

满足
$$3x_1+6x_2\leqslant 24, \tag{2-2-2}$$
$$2x_1+x_2\leqslant 10, \tag{2-2-3}$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0. \tag{2-2-4}$$

求解步骤为：

第一步：

用图形来表示约束条件不等式. 用 x_1 轴表示产品甲的数量，用 x_2 轴表示产品乙的数量，那么上述每一个不等式都可以在图上表示出来.

满足 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，所有点在第一象限及 x_1 轴，x_2 轴正向上.

对不等式（2-2-3），取等号成为方程式

$$2x_1+x_2=10,$$

当 $x_1=0$，有 $x_2=10$，得点（0，10）；当 $x_2=0$，有 $x_1=5$，得点（5，0 ）.

过点（0，10）和点（5，0）作直线，这样得到 $2x_1+x_2\leqslant 10$ 的解域，见图 2-2-1 阴影部分. 在阴影部分，包括其三条围线，任何一点都满足不等式（2-2-3）.

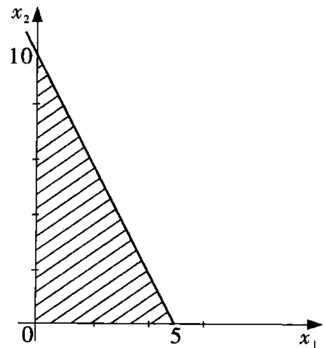

图 2-2-1

对不等式（2-2-2），取等号成为方程式

$$3x_1+6x_2=24,$$

当 $x_1=0$，有 $x_2=4$，得点（0，4）；当 $x_2=0$，有 $x_1=8$，得点（8，0）.

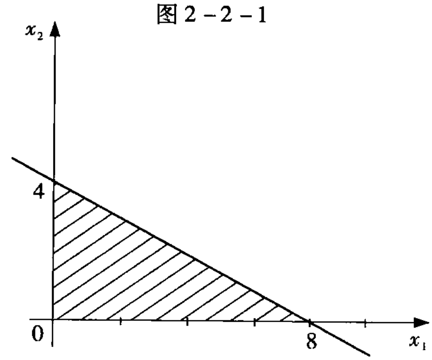

图 2-2-2

过点（0，4）和点（8，0）作直线，得到 $3x_1+6x_2\leqslant 24$ 的解域，见图 2-2-2 阴影部分. 在阴影部分及三条围线上任何一点都满足不等式（2-2-2）.

对不等式组的解域，是两个解域的公共部分，如图 2-2-3 所示的阴影部分，则 $OABC$ 凸多边形为满足约束方程的解域.

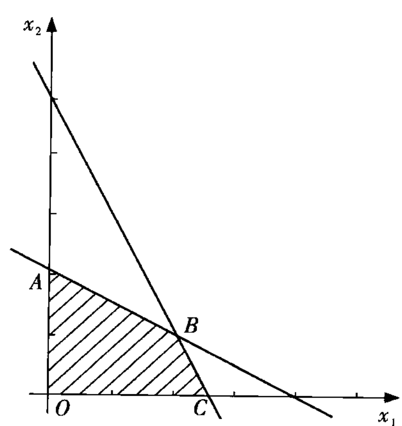

图 2-2-3

第二步：

现在来考虑目标函数，式（2-2-1）.

画目标函数图. 用给定的 $Z=2x_1+3x_2$ 画目标函数图. 可以这样来做，先令目标函数值为 0（当产品未销售出去时，是没有利润的），即

$$2x_1+3x_2=0，得点（0，0）及 x_2=-\frac{2}{3}x_1.$$

这时，目标函数图形是过坐标原点，斜率为 $-\frac{2}{3}$ 的直线 L，见图 2－2－4.

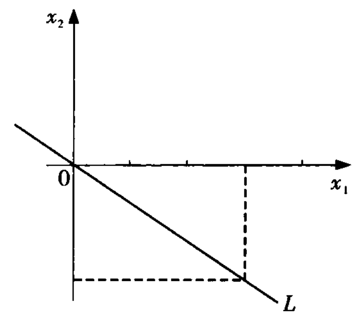

图 2－2－4

因为目标函数 Z 是求极大值，使利润达到最大，要求在解域 $OABC$ 上寻找一点（$x_1{}^*$，$x_2{}^*$），使得 $Z=2x_1{}^*+3x_2{}^*$ 取得最大值.

在解域 $OABC$ 里任一点（x_1，x_2），都有一确定的目标函数 Z 与之相对应. 例如在 $OABC$ 里取一点 $x_1=2$，$x_2=3$，这时 $Z=2\times2+3\times3=13$.

若以 h 表示在解域 $OABC$ 上取任一点时所对应的目标函数值，即 $2x_1+3x_2=h$.

现在目标是使 h 达到最大值，当 h 达到最大值时直线 $2x_1+3x_2=h$ 应该在哪一个位置呢？首先，为了要满足约束条件，直线 $2x_1+3x_2=h$ 一定在解域 $OABC$ 里. 其次，以图形的原点（0，0）作为一个基点，考察直线 $2x_1+3x_2=h$ 与（0，0）点距离. 回顾一下，直线方程表达式为 $Ax+By+C=0$，从直线外一已知点（x_0，y_0）到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离 d 公式为：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

现在从原点（0，0）到直线 $2x_1+3x_2-h=0$ 的距离 d 为：

$$d=\frac{|2\times0+3\times0-h|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|h|}{\sqrt{13}}.$$

可见 d 与 $|h|$ 成正比关系，$\sqrt{13}$ 为一常数.

当 h 增大时，则 d 也增大，亦即，d 越增大，则 h 也越增大. 因此要使 h 达到最大值，应该使直线 $2x_1+3x_2=h$ 与原点距离最远，但至少与解域 $OABC$ 有一个交点.

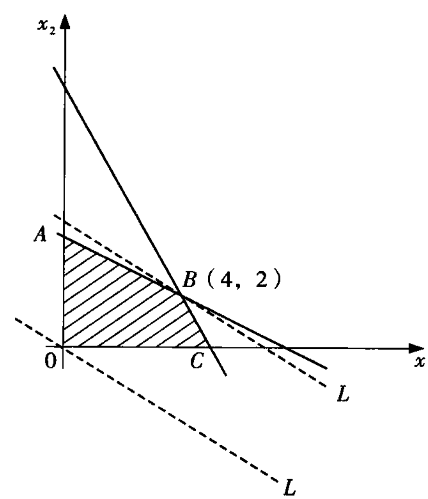

图 2－2－5

现在回到求 $Z=2x_1+3x_2$ 达到最大问题上来，刚才已作出直线 L：$2x_1+3x_2=0$，为了求最大值，把直线 L 沿着右上方作平行移动，经过解域 $OABC$，与解域 $OABC$ 最后交于 B 点，则 B 点为所求得的使目标函数达到最大的解. 图 2－2－5 读出 B（4，2），得 $x_1=4$，$x_2=2$，$Z=2\times4+3\times2=14$.

对于遇到在图形中不易读出精确的解时，可通过解联立方程获得最优解.

通过图解法可以较好地理解两个概念：

(1) 可行解——满足约束条件的解.

(2) 最优解——满足目标函数的可行解.

用图解法求线性规划问题的解，当遇到解域是一个无界，目标函数线与可行解域没有最后相交点，这时，这个问题无最优解. 如：

求 x_1，x_2，使

$$Z = x_1 + 2x_2 \quad 达到最大,$$

满足

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leqslant 2, \\ x_2 &\leqslant 3, \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

见图 2-2-6.

可行解域为空集，原问题约束方程存在矛盾方程组，这时线性规划问题无解. 如：

求 x_1，x_2，使

$$Z = x_1 + 2x_2 \quad 达到最大,$$

满足

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 8, \\ 4x_1 + 3x_2 &\geqslant 36, \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

见图 2-2-7.

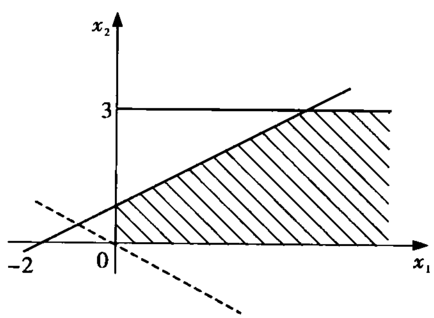

图 2-2-6

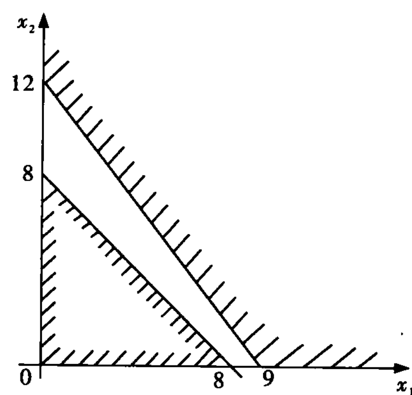

图 2-2-7

若目标函数线平行移动到最后与一约束线重合，这时线上每一点都是最优解，亦即有无限多组解，如：

求 x_1，x_2，使

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \quad 达到最大,$$

满足

$$\begin{aligned} x_2 &\leqslant 3, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 12, \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$