数学解题

靠数学思想给力

（上）

王连笑 著

书山题海——跋涉艰难
名师大家——仙人指路

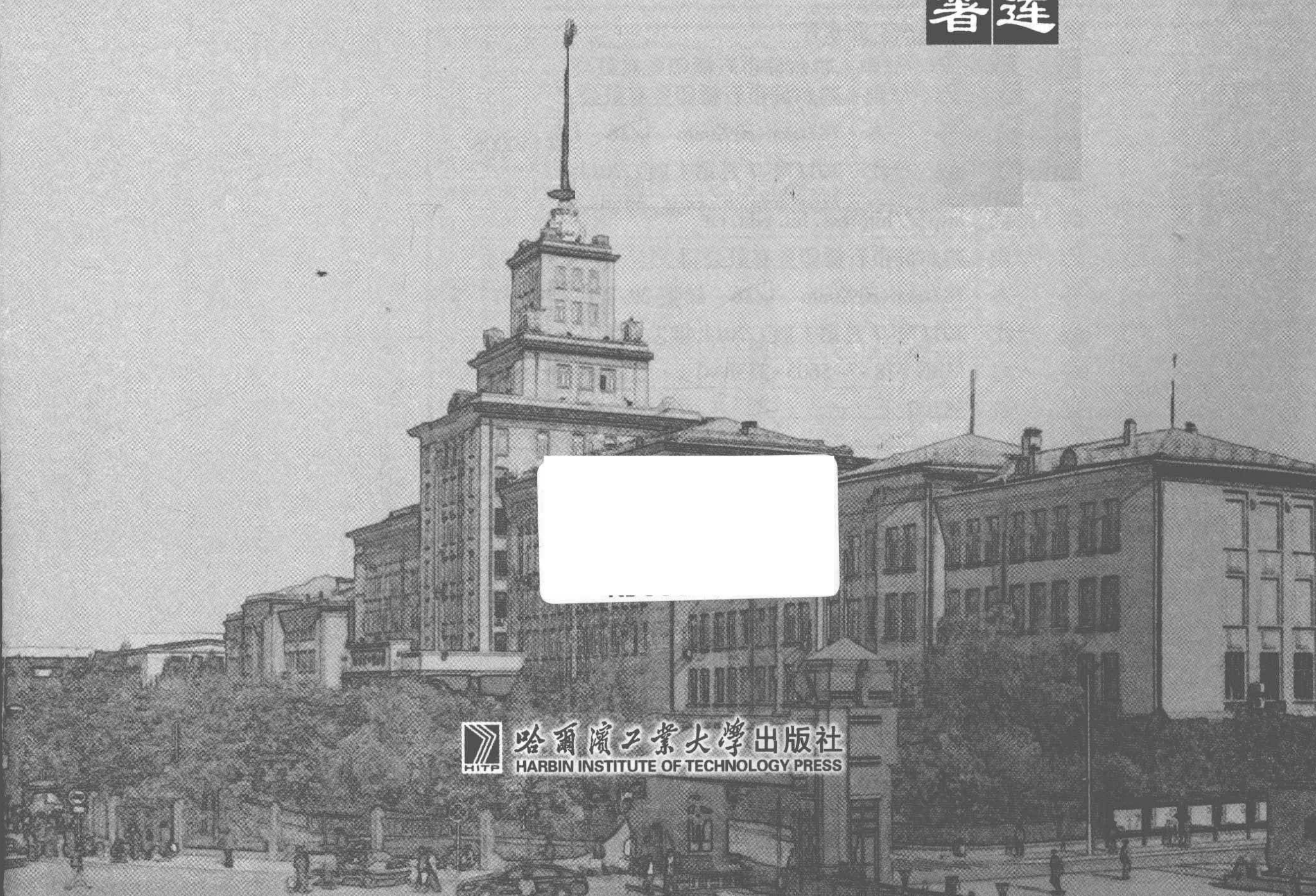
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学解题

靠数学思想给力

（上）

王连笑 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本套书是关于数学解题与数学思想的书. 本册共有两章,第一章为在数学思想指导下的解题,第二章通过大量例题对函数与方程的思想作了介绍.

本书适合高中师生和数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

数学解题:靠数学思想给力. 上/王连笑著—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.6

ISBN 978-7-5603-3338-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①数学-解法 Ⅳ. ①O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 121494 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 唐 蕾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress. hit. edu. cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 20.75 字数 373 千字
版 次 2011 年 7 月第 1 版 2011 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3338-0
定 价 38.00 元

前言

数学思想是数学的基本观点，是现实世界的空间形式和数量关系反映到人的意识之中，经过思维活动而产生的结果，它是对数学事实与数学理论和内容的本质认识．数学思想是从数学内容提炼出来的精髓，是将知识转化为能力的关键．数学思想是数学知识在更高层次上的抽象和概括，它蕴涵于数学知识发生、发展和应用的过程中．

在中学数学课程中，已经把数学思想列入中学数学的"四基"要求：基本知识，基本技能，基本思想方法和基本数学活动经验．

笔者在 1995 年曾写了一本书，书名叫《数学解题中的数学思想》，这是一本关于数学解题与数学思想的书，书中通过大量的例题对函数思想、方程思想、参数思想、分类思想、数形结合思想和化归思想作了介绍．

从 1995 年到现在过了十多年．这些年，随着中学数学教学改革的不断发展和数学教学的不断深入，人们对数学思想的认识也在不断加深，每一个中学数学教师都注意在课堂教学中渗透数学思想，注意对中学生数学思想的培养和提升，许多中学生都认识到，学习数学离不开数学思想的学习．数学解题要靠数学思想给力，数学思想的重要性已经被中学数学教师和学生所接受．

问题是数学的心脏．学数学就要学解题，要提高解题的能力和水平，首先就要站在较高的观点上去研究解题，就要从数

学的本质上去看待解题，就要在解题的过程中体现数学思想并注意发挥数学思想的功能.解决数学问题的最深层的精灵就是思想，方法是技巧的积累，思想是方法的升华，只有用数学思想武装起来的学生，解决问题才有远见和洞察力.这就是说，数学中的一些具体方法都是在数学思想的指导下产生的，我们在解题的时候，如果能够站在数学思想的高度，抓住数学中最本质的东西去思考，就会高屋建瓴，就会使解题更加科学与合理，就会使解题从被动变为主动，就会形成较为完善的解题系统.

中学生需要数学思想，中学教师需要数学思想，学数学知识需要数学思想，学数学解题需要数学思想，笔者就是一名中学数学教师，深感数学思想的重要，总是希望在原来写过的《数学解题中的数学思想》的基础上，重新写一本关于数学解题和数学思想的书，恰好哈尔滨工业大学出版社的刘培杰先生鼓励笔者写一本数学思想的书，正因为如此，笔者以高考考查的七个数学思想为核心，以近几年出现的优秀高考数学试题，优秀数学竞赛试题和优秀习题为内容，写出了这套书.

这本书的主要内容，在近十几年，笔者曾在全国各地特别是在天津市为中学教师和高三学生做过多次讲座，数学思想是笔者在教学中最重视的内容，如果在"百度"或"谷歌"上搜索笔者的名字，与笔者名字联系最多的恐怕就是数学解题与数学思想，所以这本书是笔者多年教学体会从数学解题与数学思想角度的一个汇报.

到2011年，笔者在中学数学讲坛上，已经站立了整整50个春秋，这本书是献给我的同行——中学数学教师和我一生服务的对象——中学生的，希望书中的内容对他们能有一些帮助，当然也是自己从教50年的一个纪念.

王连笑

2010年11月27日于天津

目录

第一章

在数学思想指导下的解题

近些年来，在许多事情的推动下，人们对数学知识与训练的需要日益增加. 现今，除非学生和教师设法超越数学的形式主义，并努力去把握数学的实质，否则产生挫折和幻灭的危险将会更甚. 数学教学有时竟演变成空洞的解题训练，这种训练虽然可以提高形式推导的能力，却不能导致真正的理解与深入的独立思考.

——R·柯朗

第一节　学生解题时经常发生的一些现象

对于如何解题这样一个经常遇到又十分普通的问题,不同的人有不同的处理方法.

有的人在解题时,只是就题论题,把解题的兴奋点集中在题型与方法的形式主义的对号和单纯的演算上,因而他关心的是题目的模式和题型加方法的解题套路. 当然,不管用什么方法,能够把题目解出来就是一件好事,能够做到这一点就值得赞扬. 然而,如果只是为了解题而解题,只是满足于数学题一个一个地解决,这样往往就会题过境迁,就会在题海里找不到明确的方向,也往往只能习惯于常见题型的解决和对常用方法的运用自如,如果遇到一个稍微困难的题目或没有见过的题型,就会感到迷茫,就会束手无策.

常常遇到这样的场面:

在解某一道题目时,同学甲是构造一个函数解决的,而同学乙没能解出来,当同学甲向同学乙介绍自己的解法时,同学乙会感慨地说:"我怎么没有想到呢?"

在解一道选择题时,同学丙是通过计算解出来的,用了三分钟,而同学丁则是通过画图解决的,用了一分钟,这时,同学丙也会感慨地说:"我怎么没有想到呢?"

这里的想到和没有想到,本质上就是具备不具备数学思想,会不会用数学思想指导解题,同学乙实际上是没有函数和变量的意识,没有考虑到用函数思想解题,没有用函数和变量去思考,而同学丙则是对数形结合的数学思想不能运用自如,没有图形意识. 这两个同学都是在解题中没有去注意数学的本质,没有用数学的基本思想去分析题目,指导解题.

这里的想到或没有想到本身就是数学意识,而数学意识是数学思想的具体体现.

再看两个例子.

第一个例子是,1984 年,李政道教授在谈到人才培养问题时,曾风趣地打了一个比方:一个上海学生对上海马路十分了解,另一个学生从来没到过上海. 若给他们一张上海地图,告诉他们明天考画上海的地图和填写街道名称,则后者可能考得比前者好. 但过了一天,把他们放到上海市中心,假定所有的路牌子都拿掉了,那么谁能正确地走到目的地呢? 答案是显然的. 李政道教授接着说:"真正的学习是要没有路牌子也能走路,最后能走出来,这才是学习的本质."

第二个例子是张奠宙、朱成杰先生编著的《现代数学思想讲话》一书中举过的一个例子. 在联合国教科文组织的一套数学教育论文专辑中曾举例说:我们能确信计算三角形面积的公式一定是重要的吗? 很多人在校外生活中使用这个公式最多不超过一次,更重要的是要获得这样的思想方法,就是通过分割一个表面成一些简单的小块,并且用一种不同的方式重新组成这个图形来求它的面积值. 当然,获得这种能力的最简单的练习会涉及平行四边形和三角形,这个见解无疑是正确的.

这两个例子很有启发:第一个例子表明能背着画地图的学生模仿、记忆能力很强,但不会自己走路. 考试取得好成绩固然重要,但更重要的是学会走路,解题不能只靠题型加方法,背题型,记方法,这样"没有路牌子"就不会走路,最后到达不了目的地. 第二个例子告诉我们三角形面积公式除了在进一步学习感到需要之外,这个公式在校外生活中,有多少人使用它呢? 对三角形面积公式可能有两种不同的处理方法,一种是把学习的重点放在如何记忆三角形面积公式,并给出一些数据,比如底与高的值,面积与高的值,面积与底的值去求另一些数据,这种学习充其量只能训练运算能力;而另一种则重视三角形面积公式的推导过程,重视分析如何把所求三角形面积化为平行四边形面积进而化为矩形的面积,从而学会一种把生疏问题化为熟悉问题的思想方法,并且可以把这种思想方法迁移到对其他问题的规律性认识和研究上.

上面的四个同学和两个例子向我们提出了这样的问题,学生应该学习什么样的数学知识? 怎样学习才算是学会数学,会学数学?

第二节　什么是数学思想方法

美国杰出的数学家R · 柯朗(Richard Courant)在他的名著《什么是数学》的序言中讲得很深刻. 他说:"近些年来,在许多事情的推动下,人们对数学知识与训练的需要日益增加. 现今,除非学生和教师设法超越数学的形式主义,并努力去把握数学的实质,否则产生挫折和幻灭的危险将会更甚.""数学教学有时竟演变成空洞的解题训练,这种训练虽然可以提高形式推导的能力,却不能导致真正的理解与深入的独立思考."

因此,要提高解题的能力和水平,首先就要站在较高的观点上去研究解题,就要从数学本质上去看待解题,就要在解题的过程中体现数学思想并注意发挥数学思想的功能.

那么,什么是思想? 什么是数学思想? 什么是数学思想方法呢?

思想是客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果. 它是从

大量的思维活动中获得的产物,经过反复提炼和实践,如果一再被证明为正确,就可以反复被应用到新的思维活动中,并产生出新的结果.

数学思想是数学的基本观点,是现实世界的空间形式和数量关系反映到人的意识之中,经过思维活动而产生的结果,它是对数学事实与数学理论和内容的本质认识.数学思想是从数学内容提炼出来的精髓,是将知识转化为能力的关键.数学思想是数学知识在更高层次上的抽象和概括,它蕴涵于数学知识发生、发展和应用的过程中.

在数学解题中主要运用的数学思想有函数与方程的思想、数形结合的思想、分类与整合的思想、化归与转化的思想、特殊与一般的思想、有限与无限的思想和或然与必然的思想等.

这些数学思想的名称与通常学习的数学概念或数学方法的名称有一些虽然相同,但是数学概念和数学方法本身并不等于数学思想,数学知识和数学思想方法是紧密相连的,没有脱离数学知识的数学思想方法,也没有不包含数学思想方法的数学知识.数学基础知识与数学思想方法是数学学习的两条主线.数学基础知识是一条明线,用文字明明白白地写在教材里,反映着知识间的纵向联系;数学思想方法则是一条暗线,反映着知识间的横向联系,它常常隐藏在基础知识的背后,需要人们加以分析、提炼才能显露出来.在数学学习中,应把二者有机地结合起来,才能学好知识,进而形成优化的知识结构和良好的数学意识.

数学思想比数学概念具有更高的抽象和概括水平,后者比前者更具体、更丰富,而前者比后者更本质、更深刻.例如,学习了函数的定义和性质,并能基本运用,并不一定具备函数思想,当题目明确了所研究的对象是函数时,你可能会想到运用这个函数的性质去解决问题,但当题目没有明确所研究的对象是函数的时候,你是否会想到用函数与变化的观点去思考与解决问题呢?又如,解方程中的消元法、恒等变形中的配方法、三角函数中的诱导公式和几何中的割补法等都是把问题向简单方向转化的具体方法,是化归与转化思想的具体体现,但是,相对于消元法、配方法、诱导公式和割补法等来说,化归与转化思想具有较高的层次.

一些同学在数学学习中,能够记住课本上的定义、定理和公式,甚至能够背得烂熟,但是一遇到解答习题,哪怕是一些简单的题目就会感到束手无策,不知如何思考,找不到解题的思路.造成这种状况的原因是什么呢?原因当然很多,但其中一个原因就是,这些学生在解题时往往不注重对题目的分析,不注意解题时用什么思想去指导,在题目解出来以后,又不去思考是怎样解出来的.这样,他们即使做了一千道数学题,对一千零一道题还是不会求解.这种情

形反映在解题中就是注意解题技能、技巧和方法，而忽略数学思想.

还有一个问题就是弄清技巧、方法和数学思想的关系，技巧是解决问题所需要的特殊手段，方法是解决一类问题采用的共同手段，是解决思想、行为等问题的门路和程序，是思想的产物，是包含或体现着思想的一套程序，它既可操作又可仿效，而解决问题的最深层的精灵就是思想，“方法是技巧的积累，思想是方法的升华”，只有用数学思想武装起来的学生，解决问题才有远见和洞察力. 这就是说，数学中的一些具体方法都是在数学思想的指导下产生的，我们在解题的时候，如果能够站在数学思想的高度，抓住数学中最本质的东西去思考，就会高屋建瓴，就会使解题更加科学与合理，就会使解题从被动变为主动，就会形成较为完善的解题系统.

著名数学教育家波利亚（G. Polya）曾统计过，学生毕业后，研究数学和从事数学教育的人占 1%，使用数学的人占 29%，基本上不用数学的占 70%. 学习形式化的数学知识，对于将来读数学系的学生或许有益，而让 99% 的人陪 1% 的人去学数学家才要的数学，对于大多数学生来说实在是一种浪费. 相比之下，数学思想方法比形式化的数学知识更具有普遍性，在学生未来的工作和生活中有更加广泛的应用. 日本数学教育家米山国藏曾说过：“我搞了多年的数学教育，发现学生们在初中、高中接受的数学知识在毕业进入了社会后，几乎没有什么机会应用这些作为知识的数学，所以通常是出校门不到一两年就很快忘掉了. 然而，不管他们从事什么业务工作，唯有深深铭刻于头脑中的数学精神、数学的思维方法、研究方法和着眼点等，都随时随地发生作用，使他们受益终生.”因此，我们应重视数学思想方法的学习与运用.

对于解题，数学思想就是解题策略，它能沟通问题与知识、方法间的联系，调节解题的方向，是解题的指导思想，属于策略性知识. 数学思想通常表现为数学方法的形成，所以通常把二者统称为“数学思想方法”.

数学思想方法可以分为四个层次，如图 1.1 所示.

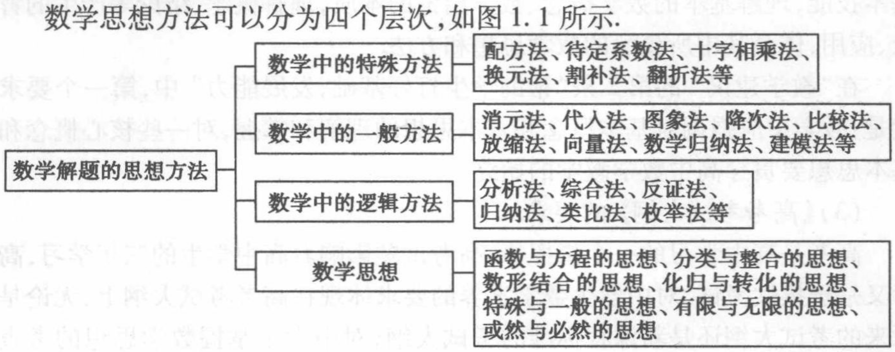


图 1.1

第三节　课程标准和高考对数学思想方法的要求

(1)《义务教育课程标准》的要求.

在《义务教育课程标准(实验修订稿)》中对学生的培养目标的表述上,在原来的“双基”的基础上,提出了“四基”,即基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验.

在课程内容上也指出:课程内容既要反映社会的需要、数学学科的特征,也要符合学生的认知规律.它包括数学的结论,也应包括数学结论的形成过程和数学思想方法.

在“课程目标”的总体目标中,在“数学思考”中,提出了“学会独立思考,体会数学的基本思想和思维方式.”

在教学建议中,第4条就是“引导学生积累数学活动经验,感悟数学思想”.

(2)《普通高中数学课程标准》的要求.

在《普通高中数学课程标准》的前言中指出:使学生掌握数学的基础知识、基本技能、基本思想,使学生表达清晰,思考有条理,使学生具有实事求是的态度、锲而不舍的精神,使学生会用数学的思考方式解决问题,认识世界.

在“课程的基本理念”第7条“强调本质,注意适度形式化”中强调:数学课程要讲逻辑,更要讲道理,通过典型例子的分析和学生的自主探索活动,使学生理解数学概念,结论逐步形成的过程,体会蕴涵在其中的思想方法.第10条“建立合理、科学的评价体系”也指出:例如,过程性评价应关注对学生理解数学概念、数学思想等过程的评价.

在“课程目标”的具体目标的第1条就指出:获得必要的数学基础知识和基本技能,理解基本的数学概念、数学结论的本质,理解概念、结论等产生的背景、应用,体会其中所蕴涵的数学思想和方法.

在“教学建议”的第2条“帮助学生打好基础,发展能力”中,第一个要求就是:教学中应强调对基本概念和基本思想的理解和掌握,对一些核心概念和基本思想要贯穿高中数学教学的始终.

(3)《高考考试大纲》的要求.

高考是高中学习的一个指挥棒,高考试题影响着高中学生的三年学习,高考又是选拔性考试,对中学生数学素养的要求体现在高考考试大纲上,无论是原来的考试大纲还是新课程标准的考试大纲,对中学生掌握数学思想的考查要求都是很高的.

数学科的命题，在考查基础知识的基础上，注重对数学思想和方法的考查，注重对数学能力的考查.

对数学思想和方法的考查是对数学知识在更高层次的抽象和概括的考查，考查时必须要与数学知识相结合，通过数学知识的考查，反映考生对数学思想和方法的理解. 要从学科整体意义和思想价值立意，注意通性通法，淡化特殊技巧，有效地检测考生对中学数学知识中所蕴涵的数学思想和方法的掌握程度.

（4）高考评价报告要求.

数学在培养和提高人的思维能力方面有着其他学科所不可替代的独特作用，这是因为数学不仅仅是一种重要的“工具”或者“方法”，更重要的是一种思维模式，表现为数学思想. 高考数学科提出“以能力立意命题”，正是为了更好地考查数学思想，促进考生数学理性思维的发展. 因此，要加强如何更好地考查数学思想的研究，特别是要研究试题解题过程的思维方法，注意考查不同思维方法的试题的协调和匹配，使考生的数学理性思维能力得到较全面的考查.（《2002 年普通高考数学科试题评价报告》（教育部考试中心））

（5）考试中心对教学与复习的建议.

在考试中心对数学复习的建议中指出：数学思想方法较之数学基础知识有更高的层次. 具有观念性的地位，如果说数学知识是数学内容，可用文字和符号来记录和描述，那么数学思想方法则是数学意识，只能领会、运用，属于思维的范畴，用以对数学问题的认识、处理和解决.

数学思想方法与数学基本方法常常在学习、掌握数学知识的同时获得，与此同时又应该领会它们在形成知识中的作用，到了复习阶段应该对数学思想方法和数学基本方法进行疏理、总结，逐个认识它们的本质特征、思维程序或者操作程序，逐步做到自觉地、灵活地施用于所要解决的问题. 近几年来，高考的每一道数学试题几乎都考虑到数学思想方法或数学基本方法的运用，目的也是加强这些方面的考查. 同样，这些高考试题也成为检验数学知识，同时又是检验数学思想方法的良好素材，复习时可以有意识地加以运用.

第四节　从一个题目的解题过程看数学思想的指导作用

让我们从一道高考试题的解题过程中，体会如何在数学思想的指导下完成一道数学题解答.

【例】（2004 年福建卷文）已知 $f(x)=4x+ax^2-\frac{2}{3}x^3(x\in\mathbf{R})$ 在区间

$[-1,1]$ 上是增函数.

(Ⅰ) 求实数 a 的值组成的集合 A.

(Ⅱ) 设关于 x 的方程 $f(x)=2x+\frac{1}{3}x^3$ 的两个非零实根为 x_1,x_2,试问:是否存在实数 m,使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立?若存在,求 m 的取值范围;若不存在,请说明理由.

【分析及解】 这是一道以三次函数形式呈现出来的函数问题.

首先解决第(Ⅰ)问.

这一问相当于 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数,求实数 a 的取值范围.

对函数 $f(x)=4x+ax^2-\frac{2}{3}x^3(x\in\mathbf{R})$ 求导数得 $f'(x)=4+2ax-2x^2$.

由已知,$f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数,则等价于 $f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立.

即 $x^2-ax-2\leqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立.

这是一个含参数的不等式的问题,如何处理这一问题呢?

首先是函数思想起了作用.

把 x^2-ax-2 看做函数. 记 $\varphi(x)=x^2-ax-2$.

要使 $\varphi(x)\leqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立,只要 $\varphi_{\max}(x)\leqslant 0$ 就可以了.

所以问题转化为求 $\varphi(x)$ 的最大值.

由于 $x\leqslant\frac{a}{2}$ 时,$\varphi(x)$ 为减函数,$x\geqslant\frac{a}{2}$ 时,$\varphi(x)$ 为增函数,因此,又要对 $\varphi(x)$ 的对称轴相对于区间 $x\in[-1,1]$ 中的点的不同位置进行分类讨论.

当 $x=\frac{a}{2}\leqslant 0$ 时,由 $\varphi(x)$ 的图象(图 1.2)可以看出,$\varphi(1)$ 最大. 解不等式组

$$\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant 0\\ \varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\end{cases}$$

得

$$-1\leqslant a\leqslant 0$$

当 $x=\frac{a}{2}>0$ 时,由 $\varphi(x)$ 的图象(图 1.3)可以看出,$\varphi(-1)$ 最大. 解不等式组

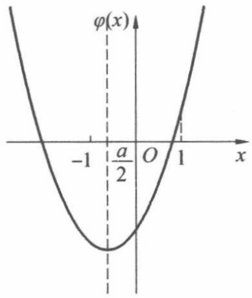


图 1.2

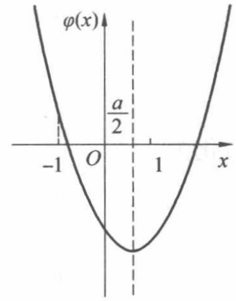


图 1.3

$$\begin{cases}\dfrac{a}{2}>0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}$$

得
$$0<a\leqslant 1$$

综合以上得 $-1\leqslant a\leqslant 1$，即 $A=\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$.

如果对函数图象比较熟悉的话，可以知道，$\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值只能在区间的端点得到. 因此只要解

$$\begin{cases}\varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}$$

a≥-1
a≤1

就可以得到 $A=\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$.

下面研究第(Ⅱ)问.

关于 $f(x)=2x+\dfrac{1}{3}x^3$ 的方程可以化为

$$4x+ax^2-\frac{2}{3}x^3=2x+\frac{1}{3}x^3$$

解得 $x=0$ 和 $x^2-ax-2=0$.

由于 $\Delta=a^2+8>0$，所以方程 $x^2-ax-2=0$ 有两个非零实根 x_1,x_2.

下面计算 $|x_1-x_2|$.

由 $x_1+x_2=a, x_1x_2=-2$ 得

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+8}$$

本题等价于是否存在 m，使不等式

$$m^2+tm+1\geqslant\sqrt{a^2+8} \qquad ①$$

对 $a\in A, t\in[-1,1]$ 恒成立.

把 $\sqrt{a^2+8}$ 看做关于 a 的函数 $T(a)=\sqrt{a^2+8}$，则式①等价于

$$m^2+tm+1\geqslant T_{\max}(a) \quad ②$$

由于 $a\in A$,则

$$T(a)=\sqrt{a^2+8}\leqslant\sqrt{1+8}=3$$

从而式 ② 转化为

$$m^2+tm+1\geqslant 3$$

即

$$m^2+tm-2\geqslant 0 \quad ③$$

对 $t\in[-1,1]$ 恒成立.

我们又可以把式 ③ 的左边看做 t 的函数. 记 $g(t)=m^2+tm-2=mt+m^2-2$.

对 $m=0$ 或 $m\neq 0$ 分类研究.

若 $m=0$,式 ③ 化为 $g(t)=-2\geqslant 0$,显然不成立;

若 $m\neq 0$,$g(t)$ 是 t 的一次函数,这样,要使 $g(t)\geqslant 0$ 对 $t\in[-1,1]$ 恒成立,只要 $g(-1)\geqslant 0$ 及 $g(1)\geqslant 0$ 同时成立即可(图 1.4,1.5). 解不等式组

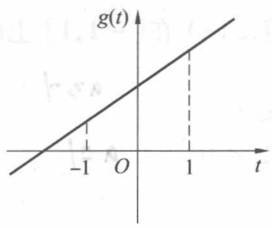


图 1.4

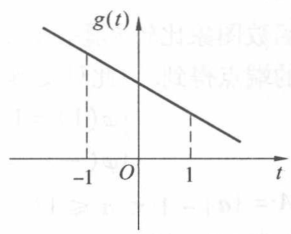


图 1.5

$$\begin{cases}g(1)=m^2+m-2\geqslant 0\\ g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0\end{cases}$$

得 $m\leqslant -2$ 或 $m\geqslant 2$.

所以存在实数 m,使不等式 $m^2+tm+1\geqslant |x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A,t\in[-1,1]$ 恒成立,其取值范围是 $\{m\mid m\leqslant -2$ 或 $m\geqslant 2\}$.

这一试题的解题过程是以数学思想作指导的解题过程.

(1) 化归与转化思想.

在解题过程中进行了几次化归和转化.

第 1 次转化:把三次函数 $f(x)=4x+ax^2-\dfrac{2}{3}x^3(x\in\mathbf{R})$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数的问题转化为在这一区间 $f'(x)\geqslant 0$ 的问题;

第 2 次转化:第(Ⅰ)问,把 $x^2-ax-2\leqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立的问题

转化为 $\varphi_{max}(x) \leqslant 0$ 成立的问题；

第 3 次转化：$\varphi_{max}(x) \leqslant 0$ 成立的问题转化为求 $\varphi(x)$ 的最大值的问题；

第 4 次转化：第（Ⅱ）问，把 $m^2 + tm + 1 \geqslant |x_1 - x_2|$ 的问题转化为 $m^2 + tm + 1 \geqslant \sqrt{a^2 + 8}$ 的问题；

第 5 次转化：把 $m^2 + tm + 1 \geqslant \sqrt{a^2 + 8}$ 的问题进一步转化为 $m^2 + tm + 1 \geqslant T_{max}(a)$ 的问题；

第 6 次转化：把 $m^2 + tm + 1 \geqslant T_{max}(a)$ 的问题又转化为 $m^2 + tm - 2 \geqslant 0$ 对 $t \in [-1,1]$ 恒成立的问题；

第 7 次转化：把 $m^2 + tm - 2 \geqslant 0$ 对 $t \in [-1,1]$ 恒成立的问题转化为一次函数 $g(t) = mt + m^2 - 2 \geqslant 0$ 对 $t \in [-1,1]$ 恒成立的问题；

第 8 次转化：把 $g(t) = mt + m^2 - 2 \geqslant 0$ 对 $t \in [-1,1]$ 恒成立的问题转化为求 $g(t)$ 的最小值的问题.

这 8 次转化每一次转化都是把生题化为熟题.

（2）函数与方程思想.

在解题过程中，我们多次把代数式看做函数：

第 1 次是把 $\varphi(x) = x^2 - ax - 2$ 看做是 x 的函数；

第 2 次是把 $T(a) = \sqrt{a^2 + 8}$ 看做是 a 的函数；

第 3 次是把 $g(t) = mt + m^2 - 2$ 看做是 t 的函数.

从而把含参数的不等式问题化为函数的最值问题.

此外还有对方程 $f(x) = 2x + \frac{1}{3}x^3$ 的根的讨论.

（3）数形结合的思想.

在解题过程中，我们利用 $\varphi(x)$ 和 $g(t)$ 的图象帮助思考.

（4）分类讨论与整合思想.

第 1 次分类：在求 $\varphi(x)$ 的最大值时，对于 $\varphi(x)$ 的图象，按对称轴的不同位置进行讨论，

第 2 次分类：在解决一次函数 $g(t) = mt + m^2 - 2 \geqslant 0$ 的恒成立时，对 $m = 0$ 和 $m \neq 0$ 分类进行了讨论.

（5）有限与无限思想.

在求三次函数 $f(x) = 4x + ax^2 - \frac{2}{3}x^3 (x \in \mathbf{R})$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数的时候，运用了导数的方法.

在解题的过程中，我们先后运用了几种数学思想才顺利完成，运用数学思