应用数学丛书

沃尔什函数与沃尔什变换

关肇直　陈文德　编著

国防工业出版社

应用数学丛书

沃尔什函数与沃尔什变换

关肇直 陈文德 编著

国防工業出版社

内容简介

本书是介绍沃尔什函数与沃尔什变换的基础概念，包括了沃尔什函数、沃尔什变换、应用简述等。对沃尔什分析与傅里叶分析作了比较，对快速沃尔什变换亦作了详细讨论。本书可供高等院校工科有关专业研究生、教师及从事科研工作的工程师参考。

应用数学丛书

沃尔什函数与沃尔什变换

关肇直 陈文德 编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张 4 3/4　122千字

1984年4月第一版　1984年4月第一次印刷　印数：0,001—5,700册

统一书号：15034·2610　定价：0.73元

应用数学丛书目录●

1. Z-变换与拉普拉斯变换　　关肇直　王恩平编著
2. 常微分方程及其应用　　秦化淑　林正国编著
3. 实变函数论基础　　胡钦训编著
4. 正交函数及其应用　　柳重堪编著
5. 沃尔什函数与沃尔什变换　　关肇直　陈文德编著
6. 圆柱函数　　刘　颖编著

● 这是第一批的目录，以后将陆续分批刊登。

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

序

由于数字技术和半导体技术的广泛应用和迅猛发展，近一、二十年中沃尔什函数与沃尔什变换在通信、信号处理、控制等电子工程领域得到了重要应用。这本小册子作为现代应用数学丛书之一，向读者介绍沃尔什函数与沃尔什变换这一数学工具。

本书除了叙述沃尔什分析的数学内容外，还以较通俗的语言阐明了抽象调和分析和抽象代数的某些观点，在这基础上，反复比较了沃尔什分析和傅里叶分析之间本质上的相似处与不同处，从而便于读者掌握和使用。为了容易阅读，本书正文的论证力求初等与严谨。为了便于应用，对于快速沃尔什变换算法的理论基础及各种具体算法讨论得相当详细。

目　　录

第一章　沃尔什函数

§1　沃尔什函数的引入

正弦和余弦函数系是“完全的直交函数系”(严密定义见§6)，在这个函数系上建立的傅里叶分析在电子工程中十分重要，应用很广。随着数字技术和半导体技术的发展，另一类完全的直交函数系——沃尔什函数系——的理论和应用在最近二十年得到很大发展。沃尔什函数仅取＋1和－1两个数值，和数字逻辑特征一致，但又和正弦余弦函数有一系列本质上类似的性质，因而在信号处理、通信和控制等方面得到了广泛应用。

为了引入沃尔什函数，我们从工程上极为熟悉的矩形波的二分频谈起。将正弦波放大和限幅就可得到矩形波，再用二分频器，例如用一个触发器，就可以把矩形波二分频；连续使用触发器进行多次的二分频就得到图1.1所示的波形。

这些波形看作时间的函数时，称为拉德马赫函数（Rademacher)，它的数学表达式为：

$$R(k,t)=\operatorname{sgn}[\sin 2^k\pi t] \tag{1.1.1}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

其中sgn为正负号函数，即：

$$\operatorname{sgn}[x]=\begin{cases}+1 & 当\ x>0\\ -1 & 当\ x<0\end{cases} \tag{1.1.2}$$

当$x=0$时，$\operatorname{sgn}[x]$无定义。由式（1.1.1）定义的$R(k,t)$的时基已经归一化，即其函数定义域为$[0,1)$区间。如果把$R(k,t)$周期地延拓到实数轴上，由图1容易看出$R(k,t)$关于0点呈奇对称，所以它们的线性组合出来的波形总也是对于

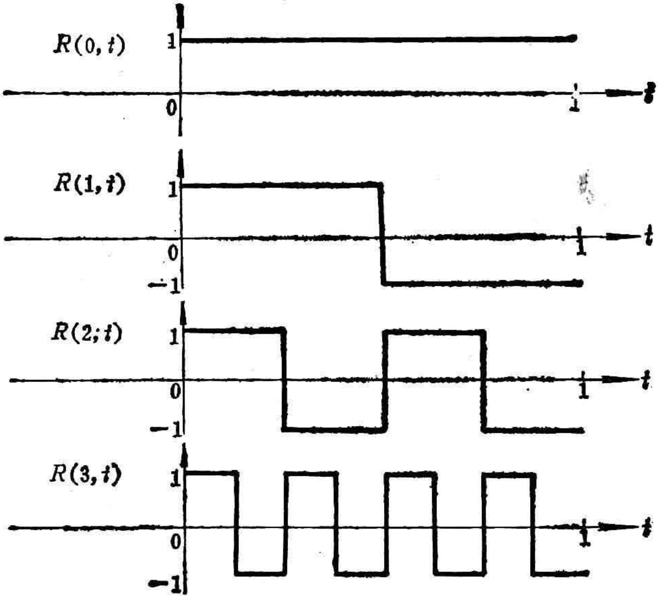

图1.1 拉德马赫函数

0 点成奇对称的，以致象 $f(t)=\cos t$ 这样简单的偶对称的时间函数，就无法用 $R(k, t)$ 的线性组合来表出，因此我们说：拉德马赫函数是一组不完全的直交函数，它只是沃尔什函数的一个子集，但由它可引出完全的沃尔什函数。

沃尔什函数可以由拉德马赫函数的乘积来引入。把整数 n 用二进制数表出：

$$n = \sum_{k=0}^{m-1} n_k 2^k \tag{1.1.3}$$

其中，$n_k = 0$ 或 1。当 n_k，$0 \leqslant k \leqslant m-1$，取 0 和 1 的各种可能值时，$n$ 就跑遍 0 到 $2^m - 1$ 的一切整数值。沃尔什函数 $\mathrm{WAL}_p(n, t)$，在 $n=0, 1, 2, \cdots 2^m - 1$，$0 \leqslant t < 1$ 的情况下，可由下式定义：

$$\mathrm{WAL}_p(n, t) = \prod_{k=0}^{m-1} R(k+1, t)^{n_k} \tag{1.1.4}$$

例1 求 $WAL_p(7,\ t)$ 的表达式

因为，$7=1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$，所以

$$WAL_p(7,\ t)=R(3,\ t)R(2,\ t)R(1,\ t)$$

图 1.2 列出了前十六个沃尔什函数的波形，沃尔什函数的这种排列次序称为自然序数，或称并矢量定 序、佩 利（Paley）定序、二进制定序、正常定序。

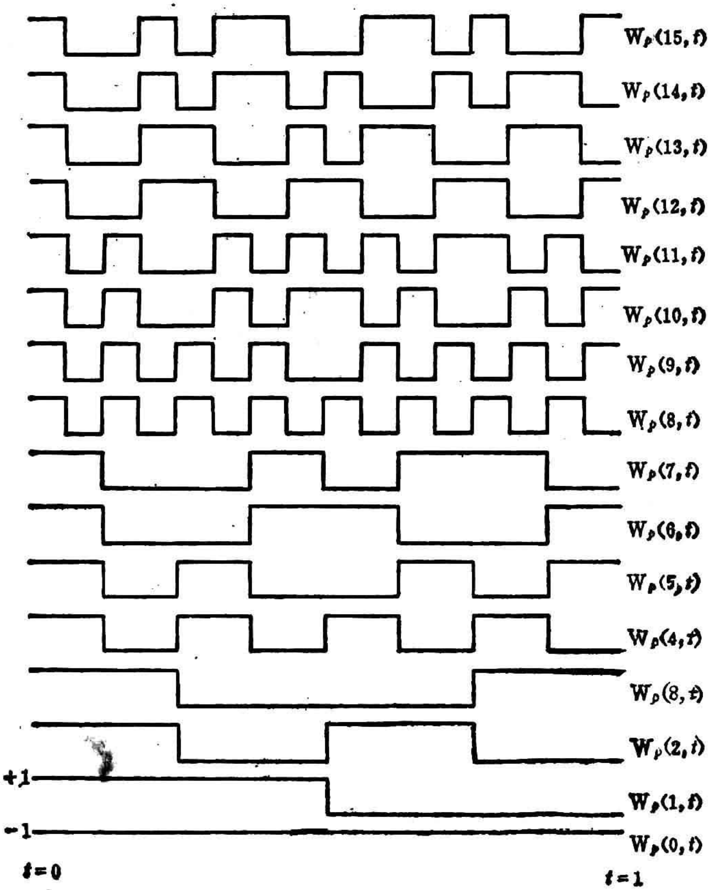

图1.2 自然序数的沃尔什函数

（图中 W_p 表示 WAL_p）

下面来给出 $WAL_p(n, t)$ 的指数形式定义。把 t（$0 \leqslant t < 1$）用二进制小数表出：

$$t = \sum_{k=1}^{+\infty} t_k 2^{-k} \tag{1.1.5}$$

其中，$t_k = 0$ 或 1，则用式（1.1.1）表示的拉德马赫函数也可由以下指数形式定义：

$$\begin{cases} R(0, t) = 1 \\ R(k, t) = (-1)^{t_k}, \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{1.1.6}$$

把式（1.1.6）代入式（1.1.4）得

$$WAL_p(n, t) = (-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_k \cdot t_{k+1}} \tag{1.1.7}$$

这就是自然序数的沃尔什函数指数形式定义。

在〔0，1）区间之外 $WAL_p(n, t)$ 的定义，还是和拉德马赫函数一样，采用周期地延拓出去，即在实轴上 $WAL_p(n, t)$ 是一个周期为 1 的函数。由于我们已经把 $WAL_p(n, t)$ 周期地延拓到了全实轴上，所以不但可以如上述那样在〔0，1）区间上进行讨论研究，有时为了某种需要和方便，也可以把归一化时基的区间取为$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，这时，有关的理论和在〔0，1）区间上讨论时是完全类似的，以后常常不再作附加的说明。

§2 广义沃尔什函数和特征函数

上节以二分频波形着手引入了沃尔什函数的波形，定义及数学表达式，对于沃尔什级数理论，这些基本上已经够用了。但为了揭示沃尔什函数和正、余弦函数本质上的联系和区别，为了数学上严密地引入沃尔什变换，必须把沃尔什函数 $WAL_p(n, t)$ 中的 n 由非负整数开拓到正实数，也就是给出广义沃尔什函数的定义。

先引入“加法交换群”的概念。“加法交换群”是一个比较

抽象的数学概念，它是从大量具体的数学对象中抽象出来的。我们从中学就接触到全部整数组成的集合。整数间可以进行加减法，运算结果还是整数，并且适合交换律、结合律、减法可以看作是加法的逆运算。后来，我们又接触到全体有理数组成的集合。有理数间也可以进行加减法，运算结果还是有理数，并且适合交换律，结合律。以上谈的是普通的数。在工程中，例如在计算机和数字系统中，我们经常使用二进制数。最简单的是 0 和 1 这二个数组成的集合，如果对 0，1 进行不进位的加法运算（也就是用半加器作运算)，显然运算结果是 0 或 1，另外，不借位的减法运算和不进位的加法运算是一样的，而且不进位，借位的加减运算也适合交换律和结合律。在计算机中大量使用的是多位的二进制数，有的计算机电路中有多位的半加器。设半加器的位数为 m 位，那么 2^m 个 m 位二进制数组成的集合也和上述的各种集合有类似的性质：它们之间可以用半加器进行半加运算，（也就是不进位，借位的加减法运算），运算结果还是 m 位二进制数。实际上还有许多数学对象具有这类性质。例如：全体整数为元素的 $m\times n$ 阶矩阵组成的集合，它们之间可以进行加减法，运算结果还是 $m\times n$ 阶整数为元素的矩阵，并且适合交换律和结合律等等。我们把上述各种数学对象所具有的共性抽象出来，把具有这种共性的集合，称为“加法交换群”。这样的概念包含了上述各例为特殊情况，同时还包含了其它丰富而众多的数学对象作为其特殊情况。只要对抽象的“加法交换群”进行透彻的研究，就可以揭示出这些丰富而众多的数学对象的共同规律和本质特性。

“加法交换群”的严密数学定义如下。

设 G 是一个非空集合，假定在 G 中规定了一种“加法”运算，（注意：这里的加法不一定是通常算术中的加法，而是一种广义的加法）且 G 对这个加法运算是自封闭的，即对任意两个元素 a，$b\in G$，其和 $a+b$ 仍是 G 中元素。另外，以下运算规则成立：

（1）对任意 a，$b\in G$，有

$$a+b=b+a \qquad \text{（交换律）}$$

（2）对任意 a，b，$c\in G$，有

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad \text{（结合律）}$$

（3）G 中有一个零元素 0，具有性质

$$a+0=a\text{，对一切 } a\in G$$

（4）对任意 $a\in G$，G 中存在一个 a 的负元素 $-a$ 满足

$$a+(-a)=0$$

这时我们说 G 对于所规定的加法运算是一个交换群，亦称 G 为阿贝尔（Abel）群或交换群。

注意：上述定义中的（3），（4）实质上就是说 G 中有减法。

例 2 把全体实数组成的集合记成 R，在 R 中按普通算术那样规定了实数加法运算，则显然 R 对加法自封闭，且满足交换群的四条运算规则，所以 R 对普通加法是一个交换群。

例 3 二元序列的并矢群

把形如 $(t_i)=(\cdots,0,0,t_{-N},\cdots,t_0,t_1,\cdots)$ 的全部 0-1 序列的集合记成 Δ，这里序列 (t_i) 的元 t_i 仅取 0，1 这二个值，而且从某个 t_{-N} 起左边的所有元都是 0，(t_i) 是一类特殊的二元序列。在 Δ 中规定一个加法运算 $\oplus$ 如下：

若 $(t_i),(t'_i)\in\Delta$，则其和 $(t_i)\oplus(t'_i)$ 仍是一个 0-1 序列，这序列中的每个元记为 $(t\oplus t')_i$，由下式给出，

$$(t\oplus t')_i\triangleq t_i+t'_i\pmod 2\text{，对所有整数 } i \qquad (1.2.1)$$

这里 mod 2 表示模二和，即不计进位的半加运算，其运算规则为：

$$\begin{aligned}0+0&=0\pmod 2\\0+1&=1\pmod 2\\1+0&=1\pmod 2\\1+1&=0\pmod 2\end{aligned} \qquad (1.2.2)$$

因此 Δ 中的 $\oplus$ 运算实际上就是把 Δ 中的每个元 t 看作无穷维矢量，然后把它的分量 t_i 按模 2 相加，容易验证 Δ 对 $\oplus$ 运算自封闭，且满足交换律和结合律，Δ 中的零元素就是全零序列 $(\cdots,0,0,0,\cdots)$，t 的负元素 $-t=t$，所以，Δ 对加法 $\oplus$ 是一个交换群，称为并矢群。显然并矢群是 m 位二进制数在半加运算下

形成的群的一种推广。

例 3 中定义的并矢加法在沃尔什函数理论和应用中很重要。

现在，我们从 § 1 式 (1.1.7) 出发来定义广义沃尔什函数，§ 1 中把非负整数 n 用二进制数表出，又把 t 用二进制小数表出 (见式 (1.1.3)，(1.1.5))。在这基础上引出了 $\mathrm{WAL}_p(n, t)$ 的指数形式的定义 (见式 (1.1.7)) 这个过程可以推广到任意非负实数。用 R_+ 记所有非负实数组成的集合，则对任意 $t\in R_+$，都可用二进制数表出，如

$$t = t_{-N}2^N + t_{-N+1}2^{N-1} + \cdots + t_{-1}2^1 + t_0 2^0 + t_1 2^{-1} + t_2 2^{-2} + \cdots$$

$$= \sum_{i=-N}^{+\infty} t_i 2^{-i} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} t_i 2^{-i} \qquad (1.2.3)$$

这里 $i < -N$ 时，$t_i = 0$。反过来，任一例 3 中的 0-1 序列 (t_i) 可按上式得到一个正实数 t。t 和 (t_i) 之间通过二进制表示建立起来的对应关系，使我们可以定义一些映象 (或称变换，算子)。

先定义从并矢群 Δ 到 R_+ 的映象 λ，

$$\lambda[(t_i)] = \sum_{i=-N}^{+\infty} t_i 2^{-i} = t \qquad (1.2.4)$$

反过来，还可定义从 R_+ 到并矢群 Δ 的映象 μ 和 γ 如下：

$$\text{对 } t\in R_+,\quad \mu(t) = (t_i) \qquad (1.2.5)$$

其中 0-1 序列 (t_i) 的元 t_i 由二进制表达式 (1.2.3) 给出。当 t 可以表成有限个 2 的幂的和时，称 t 为二进有理数 (注意它和有理数有区别)。每个二进有理数可以有二种表示法，例如 1 可以表示成：

$$1 = 1 \times 2^0 \qquad (1.2.6)$$

也可以表示成：

$$1 = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + \cdots \qquad (1.2.7)$$

现在，定义映象 μ 时，如 t 为二进有理数，我们规定：$\mu(t)$ 用式 (1.2.6) 那种 2 的幂的有穷和表示。类似地定义映象 γ：

$$\gamma(t) = (t_i) \qquad (1.2.8)$$

其中 t_i 亦由式（1.2.3）给出；但 γ 和 μ 不同点在于，当 t 是二进有理数时，我们规定：$\gamma(t)$ 采用式（1.2.7）那种 2 的幂的无穷和表示。显然，由定义，当 t 不是二进有理数时 $\mu(t)=\lambda(t)$。当 t 是二进有理数时，必然存在一个整数 M，使得序列 $\mu(t)=(t_i)$ 中，有 $t_M=1$，而对所有 $i>M$ 有 $t_i=0$。例如，取 $t=7$，是一个二进有理数，则 $M=0$，且

$$\mu(7)=(\cdots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots)$$

$$\gamma(7)=(\cdots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ \cdots)$$

另外，由 λ 的定义，对所有 $t\in R_+$，有

$$\lambda(\mu(t))=\lambda(\gamma(t))=t \tag{1.2.9}$$

把式（1.2.3）和式（1.1.3）比较，i 与 k 差一个负号，把式（1.1.3）统一记成式（1.2.3）的形式：

$$n=\sum_{i=-(m-1)}^{0} n_i 2^{-i} \tag{1.2.10}$$

再由上式来推导式（1.1.7），得：

$$\mathrm{WAL}_p(n,\ t)=(-1)^{\sum\limits_{i=-(m-1)}^{0} n_i t_{1-i}} \tag{1.2.11}$$

把 n 和 t 都推广到非负实数，从式（1.2.11）就可得到广义沃尔什函数的如下定义。对任意 $y\in R_+$，广义沃尔什函数

$$\psi_y(t)\triangleq(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} y_i t_{1-i}} \quad (t\in R_+) \tag{1.2.12}$$

这里 y_i 和 t_i 分别由 y 和 t 的二进制表示，即 $\mu(y)=(y_i)$ 和 $\mu(t)=(t_i)$ 给出。

广义沃尔什函数 $\psi_y(t)$ 有以下重要的乘法定理（或称乘积定理）。

定理1.1 对几乎所有的 y，$z\in R_+$，有公式

$$\psi_y(t)\psi_z(t)=\psi_{y\oplus z}(t)，\text{对所有 } t\in R_+ \tag{1.2.13}$$

这里 $y\oplus z\triangleq\lambda(\mu(y)\oplus\mu(z))$。　　　　(1.2.13 a)

证明 由式（1.2.12）和并矢运算$\oplus$的定义

$$\psi_y(t)\psi_z(t)=(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} y_i t_{1-i}}\times(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} z_i t_{1-i}}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}(y_i+z_i)t_{1-i}}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}(y_i\oplus z_i)t_{1-i}}=\psi_{y\oplus z}(t)$$

注意，由于映象μ的定义中规定了：当y为二进有理数时，$\mu(y)$采用2的幂的有限和的表示，因而当$\mu(y)\oplus\mu(z)$这个0-1序列从某一元起右边各元全为1时，

$$\mu(y\oplus z)\neq\mu(y)\oplus\mu(z)$$

因而，

$$\psi_{y\oplus z}(t)\neq(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty}(y_i+z_i)t_{1-i}}$$

于是式（1.2.13）在这种情况下不成立。右边全为1的0-1序列仅有可数多个，所以，从y，z这两个变量的二维角度来看，式（1.2.13）不成立的y，z测度为零，定理1.1证毕。

推论1.1 y，z为非负整数n_1，n_2时，对所有n_1，n_2有

$$WAL_p(n_1,\ t)WAL_p(n_2,\ t)=WAL_p(n_1\oplus n_2,\ t) \tag{1.2.14}$$

关于推论1.1的证明，只要注意到y，z取非负整数时，$\mu(y)\oplus\mu(z)$不会右边全1。详证读者可自己推导。

定理1.1揭示了沃尔什函数和正弦余弦函数本质上的类似。熟知，对ω，$t\in R$有

$$\cos\omega t+j\sin\omega t=e^{j\omega t} \tag{1.2.15}$$

这里$j=\sqrt{-1}$。傅里叶级数和傅里叶分析理论亦可以建立在圆函数系$e^{j\omega t}$上。而指数函数有性质：

$$e^{j(\omega_1+\omega_2)t}=e^{j\omega_1 t}\cdot e^{j\omega_2 t} \tag{1.2.16}$$

把上式和式（1.2.13）比较，可看出沃尔什函数和圆函数间都满足类似的乘法定理，仅对沃尔什函数，$y\oplus z$ 是按并矢相加的。

另外，由式（1.2.12）定义，易知：

$$|\psi_y(t)|=1，对所有 y，t\in R_+;$$

这又和

$$|e^{j\omega t}|=1，对所有\omega，t\in R$$

类似。满足以上二条性质，再加上一条“连续性”的函数，称为局部紧● 的交换群的特征函数或称为指标。把圆函数 $e^{j\omega t}$ 看作 ω 为参数的时间函数时，（这里 $\omega\in R$，R 是实数加法交换群，参见例 2），可证它是实数加法群的特征函数。而对于沃尔什函数 ψ_y，可证它是并矢群 Δ 或（R_+）的特征函数。严格说，ψ_y 在 Δ 上仅是一个几乎处处的特征函数，因定理 1.1 指出：在一个（y，z）的零测度集上乘法定理不成立。但因这些（y，z）的测度为零，所以理论上没有引起什么差别。

基于局部紧交换群上的特征函数理论，建立起了抽象调和分析理论，详见附录 1。这种理论把傅里叶分析和沃尔什分析作为它的二个特殊情况。从这种理论的观点出发，可以清楚地看出傅里叶分析和沃尔什分析本质上是非常类似的，沃尔什分析中亦有变换理论，帕斯瓦尔（Parseval）定理、卷积定理、维纳（Wiener）定理等成立；但是二者之间也有本质上的差异，傅里叶分析中的普通加法对应于沃尔什分析中的并矢加法。并矢加法一方面使沃尔什分析的一系列问题和计算变得不同了，有时显得复杂了，另一方面并矢群的特殊性质，使沃尔什分析在傅里叶分析达不到的领域，如量子物理学中得到重要应用。

广义沃尔什函数还有以下对称性质。

定理1.2 对所有 y，$t\in R_+$，有

$$\psi_y(t)=\psi_t(y) \tag{1.2.17}$$

● “局部紧”的定义参见附录 1。