应用型再生核空间

吴勃英　林迎珍◎著

科学出版社

应用型再生核空间

吴勃英　林迎珍　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书首先抓住再生核空间的特色，介绍了这个空间的主要性质，然后介绍了再生核空间这个具有实用前景的框架结构、构造过程、一些典型的应用实例及潜在能力 这是在泛函分析基础上建立的应用领域，所介绍的是数值计算领域的新方法.

一个空间之所以被称为再生核空间，是因为空间中有一个被称为再生核的函数 当在这个空间处理问题时，这个核心函数能够承上启下主宰其他，并且它又是一个初等函数，这就使得再生核理论在计算上有着极强的优势. 近年来不少文献表明，再生核有着广泛的应用前景 如果能将再生核空间理论尽早推广，让更多的读者接受、重视并研究它，相信会促进许多应用领域的发展.

本书适合高等院校理工科教师、研究员、研究生和高年级本科生等使用

图书在版编目(CIP)数据

应用型再生核空间/吴勃英，林迎珍著. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-033756-6

I. 应… Ⅱ. ①吴… ②林… Ⅲ. ①核空间 Ⅳ. O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 040371 号

责任编辑· 张中兴／责任校对· 冯 琳

责任印制：阎 磊／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码 100717

http //www sciencep com

北京九天志诚印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 3 月第 一 版 开本 B5(720×1000)

2012 年 3 月第一次印刷 印张 11 1/4

字数 210 000

定价：31.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

再生核空间是泛函分析中的一个领域, 是一个特殊的 Hilbert 空间. 尽管这个空间曾被这样那样描述性地提出过, 但它的应用近年来才开始活跃起来. 人们发现它能够应用在许多方面, 如信号处理、微分方程数值解等. 近年来, 国际上已有不少文献论述再生核的应用前景.

该书作者早在 20 世纪 80 年代就开始研究再生核, 并取得了一些富有意义的成果. 该书综合了此项研究中相关的应用部分及最新的若干理论进展, 有较高的学术价值.

该书首先从再生核的最基本概念入手, 介绍求解插值算子、微分方程、无穷代数方程的一些基本方法, 然后再叙述再生核空间的构造技巧等, 顺序以贯, 简明扼要. 国内外目前尚无类似的书籍出版, 我相信该书一经出版, 定会引起广泛的关注, 并得到推广.

崔明根

2012 年 2 月

前　言

Hilbert 空间是泛函分析中非常重要的空间, 从 n 维向量空间到无限维的 ℓ^2 空间以及 L^2 空间都是 Hilbert 空间.

那就来谈谈我们非常熟悉的 L^2 空间吧. L^2 空间是一个极其广泛的函数空间.

$$L^2\text{空间} = \{f(x) \mid f(x)\text{为复值函数},\ x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ \int_D |f|^2 \mathrm{d}x < \infty\}.$$

在泛函分析一个多世纪的发展历程中, 处处可以看到它广泛的应用. 例如, 人们所熟悉的数字信号, 无论是在时域还是在频域里作分析, 都将它置于一个相应的 L^2 空间. 无论是对它采用 Fourier 分析还是小波分析, 也都是在 L^2 空间中进行研究.

L^2 空间是 Hilbert 空间一个最有代表性的空间. 它主要的优点如下:

(1) 无论从理论角度, 还是从应用角度来看, 它所包含的函数是足够广泛的;

(2) 它存在可数个函数构成的标准正交基 $\{e_n\}$.

这样，空间的每个函数 $f(x)$ 都可以展开成 Fourier 级数, 即

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n,$$

其中 Fourier 系数 $\langle f, e_n \rangle = \int_D f \bar{e}_n \mathrm{d}x$.

Fourier 系数是由内积给出的, 而内积又是一个积分. 学过数学分析的人都知道, 一般来说, 精确计算一个积分是做不到的. 这些缺点给实际的应用带来许多阻碍, 而在再生核空间中计算内积是有优势的. 作者编写本书的第一个着眼点就是希望把这种优势介绍给读者.

再生核空间的发展过程应该追溯到 N Aronszajn 在 1950 年的出版的 *Theory of Reproducing Kernels* 一书. 该书完整、规范地形成了一套再生核空间基础理论, 至今仍被认为是一部经典的专著. 应当说, 再生核空间是一个很有特色的 Hilbert 函数空间. 再生核空间 H 定义是这样说的:

设 H 是一个 Hilbert 函数空间, 其函数的定义域为 X. 对每个 $x \in X$, 都存在着唯一的函数 $R_x(y) \in H$, 使得

$$f(x) = \langle f, R_x \rangle, \quad \forall\ f \in H.$$

任意函数 $f(y)$ 和 $R_x(y)$ 的内积等于 $f(x)$, 这就是再生核空间的一个特色. 不难看到, 当基于函数 $R_x(y)$ 而得到一个空间的标准正交基时, 将能精确地计算 Fourier 系数.

在第 1 章中, 适当地介绍了泛函分析中后继章节里将要用到的定理、公式, 并尽可能压缩篇幅去描述它们.

在第 2 章中, 定义了再生核空间, 例举了大家熟悉或不熟悉的再生核空间, 尤其指出 L^2 空间不是再生核空间. 这样, 再生核空间的提出的确有着积极的意义. 此外, 当内积空间不完备时, 只要赋值泛函有界, 也能给出构造再生核空间的一个途径, 它在应用中是方便的.

1986 年, 作者在 "W_2^1 空间中的最佳插值逼近算子" 一文中, 构造了第一个应用型再生核空间 $W_2^1[a,b]$, 首次给出了再生核表达式, 形成了再生核的一个应用领域. 从此, 构造其他应用型再生核空间、求再生核表达式的研究就开展起来了. 大家在再生核函数的求法中都用到了 δ 函数. 关于 δ 函数, 人们并不很熟悉. 这样, 在第 3 章中严格地、较通俗地介绍了 δ 函数. 为了能让读者从本质上认识这个 "看不到、摸还在的、奇怪的" 函数, 从泛函分析的角度精确定义它, 从数学积分的性质上描述它, 再从物理集中分布方面体会它, 从广义导数里再现它, 从离散形式方面比较它, 最后从一个实例里看到它. 这样, 相信读者在读完第 3 章后, 就不会再对 δ 函数说不清道不明了.

再生核空间的一个特点是它有一个被称为再生核的函数, 它使得其他每个函数与它作内积都能再生. δ 函数对连续函数就有这样的再生功能, 但是 δ 函数终究不是一个常义函数. 如果能将一个函数空间稍加限制, 就不再只是理论上谈再生核, 而是使它能够被初等函数表达出来. 这样, 在第 4 章中, 作者将在 1986 年首次提出的一个具有非常好的应用价值的再生核空间写进来, 并将本章命题为 "一个应用型再生核空间的问世". 因为在此之前, 的确没有这样一个再生核空间被提出, 也没有一个再生核空间的再生核表达式被解析表示.

基于第 4 章的内容, 在第 5 章中, 应用再生核理论研究了如下 5 个具体问题:

(1) 构造一个最佳逼近插值算子;

(2) 利用再生核空间逐次投影求无穷方程组的逼近解;

(3) 求解线性方程;

(4) 线性泛函的最佳逼近;

(5) 导出求反函数公式.

这是 5 个不同方面的问题, 而这些问题的算法表明, 再生核在计算中有着强大的优势, 即这些算法简单、可行. 按照编写顺序, 再生核的应用在第 5 章中还不能完全地展开, 这是因为在后继章节中, 还要对再生核空间进行深入研究, 之后才能有进一步的应用. 这些内容读者可以在第 8 章中见到.

针对第 4 章中所提出的再生核函数的不足, 作者在 2006 年提出了第二代简化的应用型再生核空间, 其中再生核具有多项式形式. 这大大推进了再生核方法的应用, 并且简化后的再生核空间保留了简化前的再生核的各种好的性质, 我们也严格地证明了它们是等价的. 这些都将在第 6 章中加以介绍.

第二代再生核的出现, 不仅是再生核函数表达式的大大化简, 更主要的是将应用从低维推向高维, 从简单边界条件推向复杂边界条件. 在第 7 章中, 一一例举了几个各异的再生核空间和再生核函数的求法. 由于众多的应用问题常常归结为某种带有相应定解条件的微分方程模型, 本章将通过这些例子来介绍如何将方程的定解条件“消化”到空间里, 让再生核函数承担“重任”. 也就是说, 构建一个恰当的再生核空间框架会使得问题事半功倍. 这是再生核空间的又一个优势 —— 吸收定解条件.

在第 8 章中, 介绍了一般的线性算子方程求解方法. 在方程多解的情况下, 不仅给出全部解的表示方法, 并且能够在一个子空间中找到特定解, 并论证它是所有解中范数最小的解. 对于某一类非线性算子方程, 本章介绍了两种数值方法, 还讨论了二次方程组的数值求解方法.

到现在为止, 求再生核的方法总是没有离开 δ 函数. 前面已经指出, δ 函数是一个广义函数, 因此, 在含有它的运算中, 始终得小心翼翼, 唯恐在不经意时做了非法运算. 在本书的最后一章中回避了 δ 函数, 给出了一个求再生核函数的新方法.

由于作者学识有限, 书中纰漏和不足之处在所难免, 敬请读者指正.

作　者

2011 年 10 月

目　　录

第 1 章　泛函分析中一些概念的回顾

由于本书要介绍的再生核空间是一个特殊的 Hilbert 空间, 因此, 首先必须要介绍一些泛函分析的内容, 以保证读者能够顺利地读到后继章节. 但为了不冲淡本书的主题, 本章介绍的仅是本书需要的泛函分析的概念与公式.

1.1　线性空间与线性映射

定义 1.1　非空集合 E 称为数集 X 上的**线性空间**, 如果在 E 上有被称为**加法的运算**

$$x \oplus y \in E, \quad \forall\ x, y \in E$$

和数乘的运算

$$\alpha x \in E, \quad \forall\ \alpha \in X, x \in E,$$

使得对任意的 $x, y, z \in E$, $\alpha, \beta \in X$, 满足

(1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

(2) $x \oplus y = y \oplus x$;

(3) $\exists\ \theta \in E$, 使得 $x \oplus \theta = x$;

(4) $\forall\ x \in E, \exists\ x^{-1} \in E$, 使得 $x \oplus x^{-1} = \theta$;

(5) $\alpha(x \oplus y) = \alpha x \oplus \alpha y$;

(6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x \oplus \beta y$;

(7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;

(8) $1x = x$.

线性空间 E 中的元素常被称为**向量**, θ 被称为**线性空间** E 的**零向量**. *在不造成混淆的情况下, 常将 θ 记为 0, 也将 $\oplus$ 记为 $+$.*

例 1.1　n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 在通常的向量加法和数乘意义下是实数集 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 它的零元是空间 n 维零向量.

例 1.2　n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 在通常的向量加法和数乘意义下是复数集 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

例 1.3　在集合

$$\ell^2 = \left\{ x \mid x = (x_1, x_2, \cdots),\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,\ x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

上定义加法 “+”

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots)$$

和数乘

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots),\quad \alpha\in\mathbb{R},$$

则 ℓ^2 是线性空间.

例 1.4　在集合

$$C[a,b]=\{f(t)\mid f(t)\ \text{是}\ [a,b]\ \text{上的连续函数}\}$$

上定义加法 “+”

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t)$$

和数乘

$$(\alpha f)(t)=\alpha f(t),\quad \alpha\in\mathbb{R},$$

则 $C[a,b]$ 是线性空间. 它的零元是零值函数.

例 1.5　在集合

$$L^2[a,b]=\left\{f(t)\,\middle|\,\int_a^b|f(t)|^2\mathrm{d}t<\infty\right\}$$

上定义加法 “+”

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),\quad \text{a.e.}$$

和数乘

$$(\alpha f)(t)=\alpha f(t),\ \text{a.e.},\quad \alpha\in\mathbb{R},$$

其中 a.e. 表示几乎处处的意思, 则 $C[a,b]$ 是线性空间. 它的零元是 $[a,b]$ 上几乎处处为零值的函数.

定义 1.2　设 E 是线性空间, 如果 M 是 E 的非空子集, 并且对 E 的加法和数乘运算是封闭的, 即对任意的 $x,y\in M$ 和 $\alpha,\beta\in X$, 有 $\alpha x+\beta y\in M$, 则称 M 为 E 的**子空间**.

定义 1.3　设 E 是一个线性空间, $\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset E$, 如果存在不全为零的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in X$, 使得 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_mx_m=0$, 则称这组向量为**线性相关的**; 一组向量不是线性相关的, 则称之为**线性无关的**.

可列个向量 $\{x_1,x_2,\cdots\}\subset E$ 中任意有限个向量都是线性无关的, 则称 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 为线性无关的.

定义 1.4 设 E 是一个线性空间, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset E$ 是线性无关的, 并且对每个 $x \in E$, 都存在着 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in X$, 使得 $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, 则称线性空间 E 为 n **维空间**, 称 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 E 的**一组基**, 也称 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ 为向量 x 关于基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的**线性分解**或**线性表示**.

如果 E 不存在有限向量构成的基, 则称 E 为**无限维空间**.

例如, ℓ^2 空间和 L^2 空间都是无限维空间.

定义 1.5 设 E_1, E_2 是数集 X 上的线性空间, 如果映射 $F: E_1 \to E_2$ 满足

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y), \quad \forall\, \alpha, \beta \in X,\ x, y \in E_1,$$

则称映射 F 为**线性映射**.

1.2 赋范空间与内积空间

线性空间 E 仅具有加法和数乘能力, 没有"距离"结构, 这就无法描述"极限"这种邻近的概念. 为此, 赋范空间被引进来. 为了进一步精确描述线性空间 E 中元素间的"位置"关系, 另一种"夹角"的结构也将被引进来, 那就是内积.

定义 1.6 设 E 是定义在复数集 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, 如果映射 $x \to \|x\| \in \mathbb{R}$ 满足

(1) $\forall\, x \in E$, $\|x\| \geqslant 0$, 并且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 x 是 E 中的零元;

(2) $\forall\, x, y \in E$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

(3) $\forall\, x \in E$ 和 $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

则称 $\|x\|$ 为 E 上的**范数**, 称 $(E, \|\cdot\|)$ 为**赋范空间**. *在不混淆的情况下, 简记赋范空间为 E.*

以下所指的线性空间都是定义在复数集 $\mathbb{C}$ 上的, 因此, 就不再强调了.

定义 1.7 设 E 是线性空间, 如果 $E \times E$ 上的映射 $(x, y) \to \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$ 满足

(1) $\forall\, x \in E$, $\langle x, x \rangle \geqslant 0$, 并且 $\langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(2) $\forall\, x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

(3) $\forall\, x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

(4) $\forall\, x, y, z \in E$, $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

则称 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 E 上的**内积**, 称 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为**内积空间**. *在不混淆的情况下, 简记内积空间为 E.*

注意: 在本书中, 总是用 $\bar{a}$ 表示复数 a 的共轭数.

内积空间可以自然地诱导一个相应的范数, 即 $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. 在这种意义下, 内积空间也为赋范空间.

这样，一个内积空间有了如同 n 维向量空间 R^n 一样的线性运算、距离与几何结构.

定义 1.8　设 E 是内积空间. 如果 $x,y \in E$, 满足 $\langle x,y\rangle = 0$, 则称 x,y 为**正交**的，记为 $x \perp y$. 对于 E 的两个子集 M_1, M_2, 如果 $\forall\, x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$, 都有 $x_1 \perp x_2$, 则称子集 M_1, M_2 为正交的，记为 $M_1 \perp M_2$, 并记 $M^{\perp} = \{x \in E | x \perp M\}$, 称之为子集 M 的**正交补**.

性质 1.1(勾股定理)　设 E 是内积空间，$x_i \in E\ (i = 1,2,\cdots,n)$, 并且 $x_i \perp x_j\ (i \neq j)$, 则

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

证明

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x_i, x_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.$$

□

定义 1.9　设 E 为赋范空间，$x_n, x_0 \in E$, 如果 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时，$\|x_n - x_0\| < \varepsilon$, 则 x_0 称为序列 $\{x_n\}$ 的**极限**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 或简记为 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$. 这时，称序列 $\{x_n\}$ 为 E 的**收敛列**.

引理 1.1　赋范空间 E 的收敛列必是有界列.

证明　设序列 $\{x_n\}$ 为赋范空间 E 的收敛列，则存在 $x_0 \in E$ 和自然数 N, 使得当 $n > N$ 时，$\|x_n - x_0\| < 1$, 进而有

$$\|x_n\| - \|x_0\| \leqslant \|x_n - x_0\| < 1,$$

所以对任意的自然数 n, 都有

$$\|x_n\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|x_0\| \leqslant \max\{1 + \|x_0\|, \|x_1\|, \|x_2\|, \cdots, \|x_N\|\},$$

从而说明序列 $\{x_n\}$ 是有界的.　□

定义 1.10　设 F 是赋范空间 E_1 到 E_2 的映射，如果对于 E_1 中的序列 $\{x_n\}$ 和 $x_0 \in E_1$, 当

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

时有

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$$

则称映射 F 为**连续的**.

引理 1.2 赋范空间 $(E, \|\cdot\|)$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 是 E 到 $\mathbb{C}$ 的连续映射.

证明 设序列 $\{x_n\}$ 为 E 的收敛列, $x_n \to x_0$, 则

$$\|x_n - x_0\| \to 0.$$

因为

$$\|x_n\| = \|x_n - x_0 + x_0\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|x_0\|$$

和

$$\|x_0\| = \|x_n - x_n + x_0\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|x_n\|,$$

所以

$$|\|x_n\| - \|x_0\|| \leqslant \|x_n - x_0\| \to 0.$$

因此, 范数 $\|\cdot\|$ 是连续的. □

定义 1.11 设 $\{x_n\}$ 是赋范空间 E 的序列, 如果 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 对一切自然数 m, 都有 $\|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon$, 则称序列 $\{x_n\}$ 为 E 的 **Cauchy 列**.

赋范空间中的 Cauchy 列如果均为收敛列, 则称赋范空间为**完备的**. 完备的赋范空间称为 **Banach 空间**.

在内积诱导的范数意义下, 内积空间也有收敛列、Canchy 列、完备等概念. 完备的内积空间称为 **Hilbert 空间**.

例 1.6 线性空间

$$L^1(-\infty, \infty) = \left\{ f(x) \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

在范数 $\|f(x)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x}$ 定义下是一个 Banach 空间.

例 1.4 中的线性空间 $C[a, b]$ 是一个 Banach 空间, 具有范数

$$\|f(t)\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

例 1.3 中的线性空间 ℓ^2 是一个 Hilbert 空间, 具有内积

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

例 1.5 中的线性空间 $L^2[a, b]$ 是一个 Hilbert 空间, 具有内积

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f \bar{g} \mathrm{d}t.$$

定义 1.12　设 E 为 Banach 空间, E 的线性子空间 M 称为 E 的闭子空间, 如果当 $x_n \in M$ 和 $x_n \to x$ 时, 有 $x \in M$.

定理 1.1(Schwarz 不等式)　设 E 为内积空间, 则对任意的 $x, y \in E$,

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{1-1}$$

证明　当 x, y 之一为 0 时, 式 (1-1) 中等号成立. 下面假设 x, y 都不是 0. 因为对任意的复数 α 有

$$0 \leqslant \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle+\overline{\alpha}\langle x, y\rangle+\alpha\langle y, x\rangle+|\alpha|^2\langle y, y\rangle,$$

所以当取 $\alpha=-\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ 时有

$$0 \leqslant \langle x, x\rangle-\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle-\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle+\left|\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\right|^2\langle y, y\rangle=\langle x, x\rangle-\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle},$$

于是

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

□

引理 1.3　内积空间 $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 E 到 $\mathbb{C}$ 的连续映射.

证明　设 $x_n \in E$, $y_n \in E$, 并且 $x_n \to x_0$ 和 $y_n \to y_0$, 则

$$\begin{aligned}
&|\langle x_n, y_n\rangle-\langle x_0, y_0\rangle| \\
=&|\langle x_n, y_n\rangle-\langle x_n, y_0\rangle+\langle x_n, y_0\rangle-\langle x_0, y_0\rangle| \\
=&|\langle x_n, y_n-y_0\rangle+\langle x_n-x_0, y_0\rangle| \\
\leqslant&|\langle x_n, y_n-y_0\rangle|+|\langle x_n,-x_0, y_0\rangle| \\
\leqslant&\|x_n\|\|y_n-y_0\|+\|x_n-x_0\|\|y_0\| \to 0.
\end{aligned}$$

这里用到了收敛序列有界的性质. 因此, 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是连续的. □

定理 1.2(最佳逼近元的存在性)　设 E 为 Hilbert 空间, M 为 E 的闭子空间, 则对任意的 $x \in E$, 存在唯一的 $y_0 \in M$, 使得 $\|x-y_0\|=\inf\limits_{y \in M}\|x-y\|$.

证明　记 $\alpha=\inf\limits_{y \in M}\|x-y\|$, 则存在 M 的序列 $\{y_n\}$, 使得 $\|x-y_n\| \to \alpha$. 下面来证明 $\{y_n\}$ 是 E 的 Cauchy 列. 利用等式

$$\|a+b\|^2+\|a-b\|^2=2(\|a\|^2+\|b\|^2),$$

将 a,b 换成 y_n-x, y_m-x. 再注意到由于 $y_n, y_m \in M$，于是有 $\|x-\frac{(y_n+y_m)}{2}\| \geqslant \alpha$, 则

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2 &= \|y_n-x+x-y_m\|^2 = 2\|y_n-x\|^2 \\ &\quad +2\|y_m-x\|^2-4\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\|^2 \\ &\leqslant 2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2-4\alpha^2 \\ &\longrightarrow 2\alpha^2+2\alpha^2-4\alpha^2=0,\end{aligned}$$

所以 $\{y_n\}$ 是 E 的 Cauchy 列. 而 M 是闭子空间，所以存在 $y_0 \in M$, 使得 $\|x-y_0\| = \inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$.

再证明最佳元 $y_0 \in M$ 的唯一性. 设 $y' \in M$ 也是 x 在 M 的最佳元, 则

$$\begin{aligned}\|y_0-y'\|^2 &= \|y_0-x+x-y'\|^2 \\ &= 2\|y_0-x\|^2+2\|y'-x\|^2-4\left\|x-\frac{y_0+y'}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 2\alpha^2+2\alpha^2-4\alpha^2=0,\end{aligned}$$

所以 $y_0=y'$. □

定理 1.3(正交分解定理) 设 E 为 Hilbert 空间, M 为 E 的闭子空间, 则对任意的 $x \in E$，有唯一的正交分解

$$x=y+z, \quad y\in M,\ z\in M^{\perp}. \tag{1-2}$$

证明 首先证明正交分解的存在性. 由假设 M 为 E 的闭子空间和定理 1.3, x 在 M 中存在唯一的最佳逼近元 y. 记 $\alpha=\|x-y\|$, 由于 $y\in M$，于是对任意复数 λ 以及任意元素 $u\in M$, $y+\lambda u\in M$, 故

$$\begin{aligned}\alpha^2 &\leqslant \|x-(y+\lambda u)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2-\bar{\lambda}\langle x-y,u\rangle-\lambda\langle u,x-y\rangle+|\lambda|^2\|u\|^2.\end{aligned}$$

取 $\lambda=\frac{\langle x-y,u\rangle}{\|u\|^2}$, 并注意到 $\|x-y\|=\alpha$, 从而

$$\alpha^2 \leqslant \alpha^2-\frac{|\langle x-y,u\rangle|^2}{\|u\|^2},$$

于是

$$|\langle x-y,u\rangle|^2 \leqslant 0,$$

所以 $\langle x-y,u\rangle=0$. 再由 u 为任意元素，故 $(x-y)\perp M$. 令 $z=x-y$, 便有