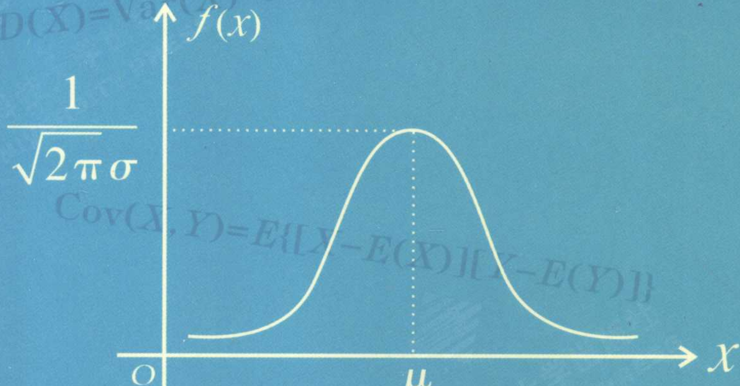
概率论与数理统计
学习指导及习题解析

主　编　马继丰
副主编　丁正生　伊晓玲　李尧　乔宝明



$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

概率论与数理统计
学习指导及习题解析

主　编　马继丰
副主编　丁正生　伊晓玲
　　　　李　尧　乔宝明

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是《概率论与数理统计简明教程》（丁正生主编，高等教育出版社出版）的配套辅导书。全书共9章：第1～8章均包含知识梳理、重点解析、典型例题、习题全解和补充习题五个部分，这五个部分系统、精练地总结了教材各章中的重点、难点问题，并对教材各章后的习题加以详细解析，能帮助学生更快、更好地掌握教材中的知识，同时增加了一些习题以供学生巩固所学知识；第9章是对历年考研试题的解析，以帮助学生了解研究生入学考试的题型并尽早进行练习。

本书内容全面、体系合理、逻辑性强、结构紧凑、文字简洁，可作为高等院校理工类、经管类专业学生学习概率论与数理统计的辅导用书，也可作为硕士研究生入学考试的复习用书及教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导及习题解析/马继丰主编.
—西安：西安电子科技大学出版社，2013.1
ISBN 978-7-5606-2956-8

Ⅰ. ① 概…　Ⅱ. ① 马…　Ⅲ. ① 概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ① O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 312587 号

策划编辑　王飞
责任编辑　王瑛　王飞
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2013年1月第1版　2013年1月第1次印刷
开　　本　787毫米×960毫米　1/16　印张　15
字　　数　271千字
印　　数　1～3000册
定　　价　26.00元
ISBN 978-7-5606-2956-8/O

XDUP　3248001-1

前　　言

“概率论与数理统计”作为高等院校理工类和经管类专业学生必修的一门重要基础课，具有不可替代性。要想学好“概率论与数理统计”这门课，在深刻领会教材内容和教师的课堂教学内容的基础上，还要辅以一定量的习题训练，而概率论与数理统计的习题虽然计算过程比较简单，但解题思路却灵活多变，不易把握。为了帮助学生更好地学习这门课程，编者编写了本书，以便开阔学生的学习视野，加深学生对教学内容的理解，解答学生在做题过程中产生的疑惑。

根据高等院校理工类、经管类学生的特点，编者对全书的内容进行了严格的选择和合理的安排。第1～8章均包含知识梳理、重点解析、典型例题、习题全解和补充习题五个部分。在“知识梳理”中，将所要掌握的主要内容用树状图详细地罗列出来，可使学生全面、直观地理清全章的内容结构；在“重点解析”中，对教材中的重点内容加以总结、归纳，可帮助学生更快地掌握重点理论知识；在“典型例题”中，对一些比较典型的题型进行了详细的解释与分析，以便学生学习时对题型融会贯通；在“习题全解”中，对教材各章后的习题(习题编号与教材习题编号同步)进行了详细的解析，以解决学生在解答习题过程中遇到的各种问题；在“补充习题”中，将教材中缺少的题型补全，以供学生全面了解各种题型及巩固所学知识。第9章是对历年考研试题的分析与讲解，可加强学生对知识的综合把握，同时也可使学生尽早地接触和了解考研题型。

本书由马继丰(西安科技大学)担任主编，丁正生(西安科技大学)、伊晓玲(西安科技大学高新学院)、李尧(西安科技大学高新学院)、乔宝明(西安科技大学)担任副主编。具体编写分工如下：第1、2、6章由李尧编写；第3、4、7章由马继丰编写；第5章由丁正生编写；第8章由乔宝明编写；第9章由伊晓玲编写。

本书在编写过程中得到了西安电子科技大学出版社王飞和王瑛编辑的大力支持与帮助，在此表示深深的谢意。

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2012年8月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

第一节　知识梳理

- 随机事件与概率
  - 随机事件
    - 随机试验
    - 样本空间
    - 随机事件
    - 事件间的关系与运算
  - 概率的统计定义
    - 频率
    - 概率的统计定义
    - 概率的公理化定义
    - 概率的性质
  - 古典概型
    - 古典概型(等可能概型)
    - 几何概型
  - 条件概率
    - 条件概率
    - 乘法定理
    - 全概率公式
    - 贝叶斯公式
  - 事件的独立性

第二节　重点解析

1. 随机事件

1) 随机试验

定义：在一定条件下，对某随机现象的一次观察或测量称为随机试验(简称试验)，记为 E。

随机试验具有以下三条性质：

(1) 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行。

(2) 可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所

有可能结果。

(3) 不确定性：进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

2) 样本空间

定义：设 E 是一试验，其所有可能出现的结果组成的集合称为试验 E 的样本空间，记为 S。样本空间的元素，也就是随机试验的直接结果，称为样本点。

3) 随机事件

定义：随机试验的若干个结果组成的集合称为随机事件(简称事件)，常用大写字母 A、B、C 等表示。只含一个试验结果的事件称为基本事件。

4) 事件间的关系与运算

(1) 事件的包含：如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，记做 $A\subset B$。

(2) 事件的相等：如果事件 A 包含于事件 B，同时事件 B 也包含于事件 A，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记做 $A=B$。

(3) 事件的和："事件 A 与事件 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A 与事件 B 的和，记做 $A\cup B$，当 A 与 B 不同时发生时，也可记做 $A+B$。

(4) 事件的积："事件 A 与事件 B 同时发生"的事件称为事件 A 与事件 B 的积，记做 $A\cap B$ 或 AB。

(5) 事件的差："事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件称为事件 A 与事件 B 的差，记做 $A-B$。

(6) 互不相容事件：若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容，也称为互斥。

(7) 对立事件："事件 A 不发生"的事件称为事件 A 的对立事件，记做 $\overline{A}$。事件 A 与事件 B 互为对立事件当且仅当 $AB=\varnothing$，$A+B=S$。

(8) 事件运算满足的定律：设 A、B、C 为样本空间 S 中的事件，则有

① 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

② 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A(BC)=(AB)C$；

③ 分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$，$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$；

④ 德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

⑤ 吸收律：$A\cup S=S$，$AS=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

⑥ 重余律：$\overline{\overline{A}}=A$；

⑦ 幂等律：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

⑧ 差化积：$A-B=A\overline{B}=A-AB$。

2. 概率的统计定义

1）频率

定义：设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次，则称比值 $f_n(A)=\frac{m}{n}$ 为事件 A 在 n 次重复试验中发生的频率。

2）概率的统计定义

定义：设有随机试验 E，若当试验的次数 n 充分大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定在某数 p 附近摆动，而且随着试验次数的增加，摆动幅度越来越小，则称数 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)=p$。概率的这种定义，称为概率的统计定义。

3）概率的公理化定义

定义：设随机试验 E 的样本空间为 S，若对于 E 的每一个事件 A 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且 $P(A)$ 满足下列三个条件：

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(S)=1$；

(3) 可列可加性：对于两两互不相容的事件 A_1，A_2，…，A_3，…，有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

概率的这种定义称为概率的公理化定义。

4）概率的性质

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\varnothing)=0$，$P(S)=1$；

(3) 若 $AB=\varnothing$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；

(4) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(5) $P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$；

(6) 对任意两个事件 A、B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

3. 古典概型

1）古典概型（等可能概型）

定义：在古典型试验中，随机事件 A 发生的概率定义为 $P(A)=\frac{m}{n}$。其中，n 为 S 中包含的基本事件总数，m 为事件 A 中包含的基本事件数。由关系式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 计算事件概率的数学模型称为古典概型。

2）几何概型

定义：如果一个随机试验 E 具有以下两个特点：

（1）样本空间 S 是一个大小可以计量的几何区域（如线段、平面、立体）；

（2）向区域 S 内任意投一点，该点落在区域内任意点处都是“等可能的”，那么，随机点落在区域 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的计量}}{S\text{ 的计量}}$$

由上式计算事件概率的数学模型称为几何概型。

4. 条件概率

1）条件概率

定义：设 A 与 B 是两个随机事件，其中 $P(B)>0$，规定 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率。

2）乘法定理

定理：设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

3）全概率公式

定理：设 S 为随机试验 E 的样本空间，B_1，B_2，…，B_n 为一组事件，且满足下列条件：

（1）B_1，B_2，…，B_n 两两互斥，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=S$；

（2）$P(B_i)>0(i=1, 2, \cdots, n)$，则对 S 中的任意一个事件 A 都有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

4）贝叶斯公式

定理：设 S 为随机试验 E 的样本空间，B_1，B_2，…，B_n 为样本空间 S 的一个划分，且 $P(A)>0$，$P(B_i)>0(i=1, 2, \cdots, n)$，则有

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

5. 事件的独立性

定义：设 A、B 是随机试验 E 的两个事件，若满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立。

定理：若事件 A、B 相互独立，且 $P(B)>0$，则 $P(A|B)=P(A)$。

第三节　典型例题

【例 1.1】 一个工人生产了 3 个零件，以事件 A_i 来表示他生产的 i 个零件是合格品($i=1, 2, 3$)，试用 A_i($i=1, 2, 3$)表示下列事件：

(1) 只有第一个零件是合格品(B_1)；

(2) 三个零件中只有一个合格品(B_2)；

(3) 第一个是合格品，后两个零件中至少有一个是次品(B_3)；

(4) 三个零件中最多只有两个合格品(B_4)；

(5) 三个零件都是次品(B_5)；

(6) 三个零件中最多有一个次品(B_6)。

解　(1) B_1 等价于"第一个零件是合格品，同时第二、三个都是次品"，故有

$$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

(2) B_2 等价于"第一个是合格品而第二、三个是次品"或"第二个是合格品而第一、三个是次品"或"第三个是合格品而第一、二个是次品"，故有

$$B_2=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

(3)
$$B_3=A_1(\overline{A}_2\cup\overline{A}_3)$$

(4) 方法一：B_4 的逆事件是"三个零件都是合格品"，故有

$$B_4=\overline{A_1A_2A_3}$$

方法二：与 B_4 等价的事件是"三个零件中至少有一个次品"，故有

$$B_4=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$$

(5) $B_5=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$。也可以利用事件"三个零件中至少有一个合格品"的逆事件与 B_5 等价，得出

$$B_5=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$$

(6) B_6 等价于"三个事件中无次品"或"三个零件中只有一个次品"，故有

$$B_6=A_1A_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3$$

另外，也可以利用 B_6 与事件"三个零件中至少有两个合格品"等价，得出

$$B_6=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$$

【例 1.2】 设随机事件 A、B、C 满足 $C\supset AB$，$\overline{C}\supset\overline{A}\overline{B}$，证明 $AC=AB\cup C\overline{B}$。

证明　由于

$$\overline{C}\supset\overline{A}\overline{B}$$

故

$$C \subset A \cup B$$

从而

$$C\overline{B} \subset (A \cup B)\overline{B} = A\overline{B}$$

$$AC\overline{B} = A\overline{B} \cap C\overline{B} = C\overline{B}$$

$$ACB = AB \cap C = AB$$

故

$$AC = AC(B \cup \overline{B}) = ACB \cup AC\overline{B} = AB \cup C\overline{B}$$

【例 1.3】 假设目标出现在射程之内的概率为 0.7，这时射击命中目标的概率为 0.6，试求两次独立射击至少有一次命中目标的概率。

解 记 $A=\{$目标进入射程$\}$，$B_i=\{$第 i 次射击命中目标$\}$$(i=1, 2)$，故所求概率为事件 $B=B_1 \cup B_2$ 的概率。由于目标不在射程之内是不可能命中目标的，因此可利用全概率公式来求解。

由题意知 $P(A)=0.7$，$P(B_i|A)=0.6$ $(i=1, 2)$，由于 $P(\overline{A}B)=0$（$\overline{A}$ 表示目标不在射程之内），因此由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B) &= P(AB)+P(\overline{A}B)\\ &= P(AB)\\ &= P(A)P(B|A)\\ &= P(A)P(B_1 \cup B_2|A)\end{aligned}$$

由题意知 B_1 与 B_2 相互独立，从而

$$P(B_1B_2|A)=P(B_1|A)P(B_2|A)=0.6\times 0.6=0.36$$

由加法公式得

$$\begin{aligned}P(B_1 \cup B_2|A) &= P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)\\ &= 0.6+0.6-0.36=0.84\end{aligned}$$

故

$$P(B)=P(A)P(B_1 \cup B_2|A)=0.7\times 0.84=0.588$$

【例 1.4】 将 n 个人等可能地分配到 $N(n\leqslant N)$ 间房中去，试求下列事件的概率：

(1) $A=\{$某指定的 n 间房中各有一人$\}$；

(2) $B=\{$恰有 n 间房，其中各有一人$\}$；

(3) $C=\{$某指定的房中恰有 $m(m\leqslant n)$ 个人$\}$。

解 把 n 个人等可能地分配到 N 间房中去，由于并没有限定每间房中的人数，因此这是一个可重复的排列问题，分法共有 N^n 种。

(1) 对于事件 A，今固定某 n 间房，第一个人可分配到 n 间房的任一间，有 n 种分法；第二个人可分配到余下的 $n-1$ 间房中的任一间，有 $n-1$ 种分法。

依次类推，得到 A 共含有 $n!$ 个样本点。故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

（2）对于事件 B，因为 n 间房没有指定，所以可先在 N 间房中任意选出 n 间房（共有 C_N^n 种选法），然后对于选出来的某 n 间房，按照上面的分析，可知 B 共含有 $C_N^n \cdot n!$ 个样本点。故

$$P(B)=\frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}$$

（3）对于事件 C，由于 m 个人可从 n 个人中任意选出，并不是指定的，因此有 C_n^m 种选法，而其余的 $n-m$ 个人可任意地分配到其余的 $N-1$ 间房中，共有 $(N-1)^{n-m}$ 种分法，故 C 中共含有 $C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}$ 个样本点。因此

$$P(C)=\frac{C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}$$

【例 1.5】 从 1～100 的整数中任取一数，已知取出的数是不超过 50 的整数，求它是 2 或 3 的倍数的概率。

解　记 $A=\{$取出的数不超过 50$\}$，$B=\{$取出的数是 2 的倍数$\}$，$C=\{$取出的数是 3 的倍数$\}$，则所求概率为条件概率 $P(B\cup C|A)$，利用条件概率的性质进行计算。

由条件概率的性质知

$$\begin{aligned}P(B\cup C|A)&=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)\\&=\frac{P(BA)}{P(A)}+\frac{P(CA)}{P(A)}-\frac{P(BCA)}{P(A)}\end{aligned}$$

由于

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(BA)=\frac{25}{100},\ P(CA)=\frac{16}{100},\ P(BCA)=\frac{8}{100}$$

故

$$P(B\cup C|A)=2\left(\frac{25}{100}+\frac{16}{100}-\frac{8}{100}\right)=\frac{33}{50}$$

【例 1.6】 设 $P(A)>0$，试证 $P(B|A)\geqslant 1-\frac{P(\bar{B})}{P(A)}$。

证明　由于 $P(A\cup B)\leqslant 1$，即 $P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1$，从而由乘法公式知

$$P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)\leqslant 1$$

故

$$P(A)\cdot P(B|A)\geqslant P(A)-[1-P(B)]$$

因而有

$$P(A)\cdot P(B|A)\geqslant P(A)-P(\bar{B})$$

由于 $P(A)>0$，因此得

$$P(B|A)\geqslant 1-\frac{P(\bar{B})}{P(A)}$$

【例 1.7】 设有甲、乙、丙三门炮，同时独立地向某目标射击，各炮的命中率分别为 0.2、0.3 和 0.5，目标被命中一发而被击毁的概率为 0.2，被命中两发而被击毁的概率为 0.6，被命中三发而被击毁的概率为 0.9，求：

(1) 三门炮在一次射击中击毁目标的概率；

(2) 在目标被击毁的条件下，只由甲炮击中的概率。

解 设事件 A_1、A_2、A_3 分别表示甲、乙、丙炮击中目标，D 表示目标被击毁，H_i 表示由 i 门炮同时击中目标($i=1, 2, 3$)，则由全概率公式有

$$P(D)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(D|H_i)$$

其中 $P(H_i)$ 由题设条件及独立性求出，而第二问可由贝叶斯公式来处理。

由题设知

$$P(A_1)=0.2,\ P(A_2)=0.3,\ P(A_3)=0.5$$

$$P(D|H_1)=0.2,\ P(D|H_2)=0.6,\ P(D|H_3)=0.9$$

由于 A_1、A_2、A_3 相互独立，故

$$\begin{aligned}P(H_1)&=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)\\&\quad+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)\\&=0.2\times 0.7\times 0.5+0.8\times 0.3\times 0.5+0.8\times 0.7\times 0.5\\&=0.47\end{aligned}$$

同理

$$P(H_2)=P(A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3)=0.22$$

$$P(H_3)=P(A_1A_2A_3)=0.03$$

(1) 由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(D)&=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(D\mid H_i)\\&=0.47\times 0.2+0.22\times 0.6+0.03\times 0.9=0.253\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned}P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\mid D)&=\frac{P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3D)}{P(D)}=\frac{P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)P(D|A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)}{P(D)}\\&=0.0553\end{aligned}$$

第四节　习 题 全 解

1.1　简述下列基本概念：

(1) 随机试验具有的三个特点；

(2) 随机事件的定义；

(3) 概率的统计定义。

答　(1) ① 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行；② 可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；③ 不确定性：进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

(2) 随机试验的若干个结果组成的集合称为随机事件(简称事件)，常用大写字母 A、B、C 等表示。

(3) 设有随机试验 E，若当试验的次数 n 充分大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$稳定在某数 p 附近摆动，而且随着试验次数的增加，摆动幅度越来越小，则称数 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)=p$。概率的这种定义，称为概率的统计定义。

1.2　写出下列随机试验的样本空间：

(1) 同时掷三颗骰子，记录三颗骰子点数之和；

(2) 会议室的所有人员是教师、学生或工人，从中随机地喊一个人出来，记录被喊人的职业；

(3) 记录一个班级一次考试的平均分数(以百分制计分)；

(4) 记录某话务员在一个工作日内接听电话的次数；

(5) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数。

解　(1)设第一、二、三颗骰子点数的样本空间分别为 S_1、S_2、S_3，三颗骰子点数之和的样本空间为 S，则

$$S_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S_3=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

故 $S=\{3, 4, \cdots, 18\}$。

(2) 设试验的样本空间为 S，则

$$S=\{\text{教师}, \text{学生}, \text{工人}\}$$

(3) 设试验的样本空间为 S，以 n 表示该班的学生数，因以百分制计分，故该班在一次考试中的总成绩的可能取值为 $0, 1, 2, \cdots, 100n$。该班在一次考试中平均分数的所有可能结果即为该随机试验的样本空间，因而所求的样本空

间为

$$S=\left\{\frac{m}{n}\middle| m=0, 1, 2, \cdots, 100n\right\}$$

(4) 设试验的样本空间为 S，则

$$S=\{0, 1, 2, \cdots\}$$

(5) 设试验的样本空间为 S，由题设可知，若生产的 10 件产品均为正品，则记录的产品总件数为 10；若生产的 10 件产品中有 1 件次品，则需继续生产，且若第 11 件产品恰为正品，则记录的产品总件数为 11。一般假设在生产第 10 件正品前共生产了 k 件不合格品，则记录的产品总件数的所有可能结果，即样本空间为

$$S=\{10+k \mid k=0, 1, 2, \cdots\}$$

或写成
$$S=\{10, 11, 12, 13, 14, 15, \cdots\}$$

1.3　从某班学生中任选一名学生，设 $A=\{$选出的学生是男生$\}$，$B=\{$选出的学生是数学爱好者$\}$，$C=\{$选出的学生是班干部$\}$，试问下列运算结果分别表示什么事件。

(1) ABC；(2) $\overline{A}B\overline{C}$；(3) $\overline{A\cup C}$；(4) $A-(B\cup C)$。

解 (1) A 表示选出的学生是男生，B 表示选出的学生是数学爱好者，C 表示选出的学生是班干部，故 ABC 表示选出的学生是爱好数学的男生班干部。

(2) $\overline{A}$ 表示选出的学生是女生，B 表示选出的学生是数学爱好者，$\overline{C}$ 表示选出的学生不是班干部，故 $\overline{A}B\overline{C}$ 表示选出的学生是爱好数学的女生，且不是班干部。

(3) A 表示选出的学生是男生，C 表示选出的学生是班干部，则 $A\cup C$ 表示选出的学生是男生班干部，故$\overline{A\cup C}$表示选出的学生为不是班干部的女生。

(4) A 表示选出的学生是男生，B 表示选出的学生是数学爱好者，C 表示选出的学生是班干部，则 $B\cup C$ 表示选出的学生是数学爱好者也是班干部，故 $A-(B\cup C)$表示选出的学生是不是数学爱好者也不是班干部的男生。

1.4　设 $S=\{1, 2, \cdots, 10\}$，$A=\{2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5\}$，$C=\{5, 6, 7\}$，具体写出下列各式表示的集合：

(1) $\overline{A}\cup B$；(2) $\overline{A}B$；(3) $\overline{\overline{A}B}$；(4) $\overline{A\,\overline{BC}}$；(5) $\overline{A(B\cup C)}$。

解　(1) 因为$\overline{A}=\{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，$B=\{3, 4, 5\}$，所以

$$\overline{A}\cup B=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

(2) 因为$\overline{A}=\{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，$B=\{3, 4, 5\}$，所以

$$\overline{A}B=\{5\}$$

(3) 方法一：因为$\overline{A}=\{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，$\overline{B}=\{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}$，

所以

$$\overline{A}\,\overline{B}=\{1,6,7,8,9,10\}$$

故

$$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\{2,3,4,5\}$$

方法二：$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\overline{\overline{A\cup B}}=A\cup B=\{2,3,4,5\}$

(4) 方法一：因为 $BC=\{5\}$，所以

$$\overline{BC}=\{1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$$

从而

$$A\overline{BC}=\{2,3,4\}$$

故

$$\overline{A\,\overline{BC}}=\{1,5,6,7,8,9,10\}$$

方法二：因为$\overline{A\,\overline{BC}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{BC}}=\overline{A}\cup BC$，$BC=\{5\}$，所以

$$\overline{A\,\overline{BC}}=\overline{A}\cup BC=\{1,5,6,7,8,9,10\}$$

(5) 方法一：因为 $B\cup C=\{3,4,5,6,7\}$，所以

$$A(B\cup C)=\{3,4\}$$

故

$$\overline{A(B\cup C)}=\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$$

方法二：因为$\overline{A(B\cup C)}=\overline{AB\cup AC}$，$AB=\{3,4\}$，$AC=\varnothing$，所以

$$AB\cup AC=AB=\{3,4\}$$

故

$$\overline{A(B\cup C)}=\overline{AB\cup AC}=\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$$

1.5 随机点 x 在$[a,b]$上这一事件记做$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，设$S=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$，$A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|2<x\leqslant 4\}$，具体写出下列各事件：

(1) $A\cup B$；(2) AB；(3) $\overline{A}$；(4) $A-B$。

解 (1) $$A\cup B=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$$

(2) $$AB=\{x|2<x\leqslant 3\}$$

(3) $$\overline{A}=\{x|0\leqslant x<1 \text{ 或 } 3<x\leqslant 5\}$$

(4) $$A-B=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$$

1.6 试用事件运算公式证明下列各式：

(1) $A-AB=A\cup B-B=A\overline{B}$；

(2) $A\cup B-AB=(A-B)\cup(B-A)=A\overline{B}\cup\overline{A}B$。

证明 (1) 由定义有

$$A-AB=A\,\overline{AB}=A(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}\cup A\overline{B}=\varnothing\cup A\overline{B}=A\overline{B}$$

又因为