




高孝忠 编著

数学分析教程

(下册)

清华大学出版社



高孝忠 编著

数学分析教程

(下册)

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书以极限为工具,研讨了函数的分析性质——连续性、可微性、可积性与可展性,其内容分为5大部分:极限、连续、微分、积分和级数,从一元函数入手,拓展到多元函数.全书分上下两册,共20章(上册10章,下册10章).

本书注重学生对数学分析的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握,以及数学思维能力、逻辑思维能力培养和训练.教材条理清晰,简明易学.

本书可作为综合性大学、师范院校数学系各专业的教材,还可作为高等学校数学系教师以及数学工作者的参考用书.

版权所有,侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程. 下册/高孝忠编著. —北京:清华大学出版社,2012.10

ISBN 978-7-302-29930-1

I. ①数… II. ①高… III. ①数学分析—教材 IV. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第202644号

责任编辑:刘颖

封面设计:常雪影

责任校对:王淑云

责任印制:张雪娇

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市溧源装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm 印 张:17.25 字 数:373千字

版 次:2012年10月第1版 印 次:2012年10月第1次印刷

印 数:1~3000

定 价:38.00元

产品编号:047685-01



数学分析是大学数学专业的一门基础主干课,其思想、内容和方法是学习后续课程的基础.掌握数学分析的思想、内容和方法是开设数学分析课程的基本目标,它教给学生如何用数学的思维方法去处理在社会实践中面临的课题.为此,根据教育部关于高校精品课程教材建设的要求,结合多年来积累的教学经验和对教学改革的积极思考与探索,作者编写了这本《数学分析教程》.

本书有如下特点:

(1) 风格:采用通俗易懂的语言.

林群院士说:“深奥的东西,能说你懂了,以什么为标准呢?那就是看你能否用粗浅的语言去描述.”本书的编写风格恰以此为宗旨,语言通俗易懂,学生喜闻乐见,容易接受.

(2) 题材:采用抽象与应用相结合.

应用体现在理论与实际的联系.知道了抽象的过程,就懂得了应用的方法.书中对每一个抽象的概念,都给出其引入的情境,告知抽象的过程和应用的方法.

(3) 内容:采用严密要求下的解释.

严密的逻辑推理,是数学的基本要求之一.本书注重引导学生从简单的解释达到严密的论证,掌握数学思维方法,培养逻辑推理能力.

(4) 拓展:采用推理中的必然性力量.

梳理出知识中的逻辑线,是学生掌握知识的最佳方案,使学生变机械记忆为理解记忆,从而真正理解和掌握数学分析的基本概念、基本理论和方法.

(5) 形式:采用立体彩图,图文并茂.

本书较之该学科教材一贯采用黑白的立体图有了突破,书中图形皆采用双色印刷,直观且空间感强,立体效果更好.而且图形配合恰当,易于理解,更有利于教与学.

(6) 方法:配备多媒体教学课件.

本书的每一章节都配有多媒体课件(教学光盘).课件中的教学情境设置得当,动画效果生动,在教学实践中已得到同行教师与学生的好评.

本书在内容上有如下亮点(在现行教科书中尚未出现):

(1) 在数的发展论述中来介绍实数.

(2) 给出毕达哥拉斯可公度原理的粗浅解释,说明“无理数”的来由.

(3) 在数集的确界中给出较小的正数 ε , 对函数的单调性定义给出认识过程, 为极限的介绍作准备.

(4) 极限定义由浅入深, 给出芝诺悖论的新解释, 指出芝诺悖论与魏尔斯特拉斯 ε - N 语言的联系, 在教学中学生容易接受.

(5) 引入记号 $o(g(x))$ 表示 $g(x)$ 的所有高阶无穷小构成的集合.

(6) 以实数的连续性为背景, 给出函数连续的两个定义.

(7) 在导数的引入中给出数学推导, 再寻找实际背景.

(8) 在微分介绍中, 先给出数学引入, 再给出实际背景. 并给出其与拉格朗日中值公式、泰勒公式的联系.

(9) 不定积分定义为 $\int f(x)dx = \{F(x): F'(x) = f(x)\}$. $d\int f(x)dx$ 表示对集合 $\{F(x): F'(x) = f(x)\}$ 中的每一个元素取微分.

(10) 在现行教材中, 不定积分 $\int f(x)dx$ 里的 dx 由指示积分变元的概念不明不白地变成了微分, 本书已简单解决了这一问题.

(11) 总练习题中选录了一些近年来的硕士研究生统一入学考试的试题, 以便学生提高.

由于篇幅有限, 不再一一罗列, 读者可参照其他教材识别之. 可以说, 对数学分析教材的改革, 要突出思想方法的介绍. 只有这样, 学生才能真正受益.

本书在编写、修订过程中, 得到了贵州师范大学数学与计算机科学学院的大力支持; 清华大学出版社编辑刘颖、贵州师范大学的游泰杰教授对本书的编写提出了很多宝贵的意见; 贵州大学的郭正林副教授、秦新波副教授对本书作了认真的校对, 在此对他们表示诚挚的感谢.

高孝忠

2012年2月



第 11 章 反常积分	1
11.1 反常积分的概念	1
11.1.1 无穷限积分	1
11.1.2 瑕积分	3
习题 11.1	4
11.2 无穷限积分的性质与收敛判别	4
11.2.1 无穷限积分的性质	4
11.2.2 比较判别法	5
11.2.3 狄利克雷判别法与阿贝尔判别法	7
习题 11.2	9
11.3 瑕积分的性质与收敛判别	10
11.3.1 瑕积分的性质	10
11.3.2 比较判别法	11
习题 11.3	13
总练习题 11	13
第 12 章 数项级数	15
12.1 级数的收敛性	15
12.1.1 级数的基本概念	15
12.1.2 级数的柯西收敛准则	16
12.1.3 收敛级数的性质	17
习题 12.1	18
12.2 正项级数	19
12.2.1 正项级数与比较判别法	19
12.2.2 比式判别法与根式判别法	21
12.2.3 积分判别法	23
12.2.4 拉贝判别法与高斯判别法	24

习题 12.2	26
12.3 一般项级数	28
12.3.1 交错级数	28
12.3.2 绝对收敛与条件收敛	29
12.3.3 绝对收敛与条件收敛的性质	30
12.3.4 阿贝尔判别法与狄利克雷判别法	32
习题 12.3	34
总练习题 12	35
第 13 章 函数列与函数项级数	37
13.1 函数列的一致收敛性	37
13.1.1 函数列及其一致收敛性的概念	37
13.1.2 函数列一致收敛性的等价条件	39
习题 13.1	40
13.2 函数项级数的一致收敛性	41
13.2.1 函数项级数及其一致收敛性的概念	41
13.2.2 函数项级数一致收敛性的判别法	43
习题 13.2	45
13.3 函数列与函数项级数的分析性质	47
13.3.1 连续性	47
13.3.2 可积性	48
13.3.3 可微性	49
习题 13.3	51
13.4 幂级数	52
13.4.1 幂级数的基本概念	52
13.4.2 幂级数的性质	54
习题 13.4	57
13.5 函数的幂级数展开	58
13.5.1 泰勒级数	58
13.5.2 初等函数的幂级数展开	60
习题 13.5	63
总练习题 13	64
第 14 章 傅里叶级数	67
14.1 傅里叶级数	67

14.1.1	傅里叶级数的定义	67
14.1.2	傅里叶级数收敛定理	69
14.1.3	以 2π 为周期的傅里叶级数展开	70
习题 14.1	72
14.2	以 $2l$ 为周期的函数的展开	73
14.2.1	以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数	73
14.2.2	偶函数与奇函数的傅里叶级数	74
习题 14.2	77
14.3	收敛定理的证明	77
14.3.1	贝塞尔不等式	77
14.3.2	收敛性定理的证明	79
习题 14.3	81
总练习题 14	81
第 15 章	多元函数的极限与连续	83
15.1	平面点集与多元函数	83
15.1.1	n 维空间	83
15.1.2	平面点集	83
15.1.3	多元函数	85
15.1.4	二元函数的图像	86
习题 15.1	89
15.2	二元函数的极限	90
15.2.1	\mathbb{R}^2 上的完备性定理	90
15.2.2	二元函数的极限	91
15.2.3	收敛的条件	92
15.2.4	累次极限	93
15.2.5	非正常极限	95
习题 15.2	95
15.3	二元函数的连续性	96
15.3.1	连续的定义	96
15.3.2	点连续的性质	98
15.3.3	闭区域上连续函数的性质	99
15.3.4	一致连续性	100
习题 15.3	101
总练习题 15	101

第 16 章 多元函数微分学	103
16.1 偏导数与全微分	103
16.1.1 偏导数	103
16.1.2 全微分	104
16.1.3 可微的条件	104
16.1.4 可微的几何解释	106
16.1.5 近似计算	106
习题 16.1	107
16.2 复合函数微分法	109
16.2.1 多元复合函数的结构	109
16.2.2 复合函数的求导法则	109
16.2.3 复合函数的全微分	111
16.2.4 方向导数	112
16.2.5 梯度	114
习题 16.2	114
16.3 泰勒公式与极值	116
16.3.1 高阶偏导数	116
16.3.2 复合函数的高阶偏导数	119
16.3.3 二元函数的中值公式与泰勒公式	120
16.3.4 二元函数的极值	121
习题 16.3	123
总练习题 16	125
第 17 章 隐函数定理及其应用	127
17.1 隐函数	127
17.1.1 隐函数的概念	127
17.1.2 隐函数求导举例	129
习题 17.1	131
17.2 隐函数组	132
17.2.1 隐函数组的概念	132
17.2.2 隐函数组存在定理	133
17.2.3 反函数组与坐标变换	135
习题 17.2	136
17.3 几何应用	138



17.3.1	曲线的切线与法平面	138
17.3.2	曲面的切平面与法线	140
习题 17.3		141
17.4	条件极值	142
习题 17.4		146
总练习题 17		146
第 18 章	含参变量积分	149
18.1	含参变量的正常积分	149
18.1.1	概念	149
18.1.2	分析性质	149
18.1.3	实例	152
习题 18.1		153
18.2	含参变量的广义积分	154
18.2.1	一致收敛性及其判别法	154
18.2.2	含参变量无穷限积分的性质	158
18.2.3	拓广	160
习题 18.2		161
18.3	欧拉积分	162
18.3.1	Γ 函数	162
18.3.2	B 函数	165
18.3.3	Γ 函数与 B 函数的关系	166
习题 18.3		166
总练习题 18		167
第 19 章	重积分	169
19.1	二重积分的概念	169
19.1.1	引入与定义	169
19.1.2	可积的条件	170
19.1.3	二重积分的性质	172
习题 19.1		173
19.2	直角坐标系下二重积分的计算	174
19.2.1	基本计算公式	174
19.2.2	平面区域的构型与二重积分的计算	176
习题 19.2		178

19.3	二重积分的变量替换	179
19.3.1	二重积分的替换公式	180
19.3.2	用极坐标计算二重积分	182
	习题 19.3	186
19.4	三重积分	187
19.4.1	三重积分的概念	187
19.4.2	三重积分的计算	188
	习题 19.4	193
19.5	三重积分的变量替换	194
19.5.1	柱面坐标变换	194
19.5.2	球面坐标变换	196
	习题 19.5	198
19.6	曲面的面积	199
19.6.1	曲面的面积的定义	199
19.6.2	曲面面积的计算	199
	习题 19.6	202
19.7	三重积分在物理上的应用	203
19.7.1	质心	203
19.7.2	转动惯量	204
19.7.3	引力	205
	习题 19.7	206
	总练习题 19	207
第 20 章	曲线积分与曲面积分	210
20.1	第一型曲线积分	210
20.1.1	基本概念	210
20.1.2	计算	211
20.1.3	例题	213
	习题 20.1	214
20.2	第二型曲线积分	216
20.2.1	基本概念	216
20.2.2	计算	217
20.2.3	推广	220
20.2.4	两类曲线积分的联系	221
	习题 20.2	222

20.3	格林公式及其应用	223
20.3.1	区域连通性的分类	223
20.3.2	格林公式	223
20.3.3	应用	225
	习题 20.3	228
20.4	曲线积分与路径的无关性	228
20.4.1	与路径无关的定义与条件	228
20.4.2	应用	230
20.4.3	求原函数	231
	习题 20.4	232
20.5	第一型曲面积分	233
20.5.1	概念	233
20.5.2	计算	234
	习题 20.5	237
20.6	第二型曲面积分	238
20.6.1	曲面的侧	238
20.6.2	有向曲面上的正侧面积微元向量	239
20.6.3	第二型曲面积分的概念	239
20.6.4	第二型曲面积分的计算	241
20.6.5	两类曲面积分的联系	244
	习题 20.6	246
20.7	奥高公式与斯托克斯公式	246
20.7.1	奥高公式	246
20.7.2	简单的应用	247
20.7.3	斯托克斯公式	249
20.7.4	应用	250
20.7.5	曲线积分与路径无关的条件	252
	习题 20.7	253
20.8	场论初步	254
20.8.1	场的概念	254
20.8.2	数量场的方向导数与梯度	255
20.8.3	向量场的流量与散度	256
20.8.4	向量场的环流量与旋度	257
	总练习题 20	258
	参考书目	261

11.1 反常积分的概念

定积分的定义有两个要求：(1)积分区间有限；(2)被积函数有界。

如果扩大讨论范围，即得两类反常积分——无穷限积分与瑕积分。

11.1.1 无穷限积分

定义1 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义，且在任意区间 $[a, u]$ 上可积，极限 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx$ 称为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的无穷限积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 。

$$\text{ie: } \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx.$$

如果极限 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx$ 存在，则称无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛；如果 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx$ 不存在，则称无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散。

同理可定义

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^b f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

值得注意的是， $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 的敛散性与 a 无关。但 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛必须 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ ， $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 都收敛。如果 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ ， $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 有一个发散，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 发散。

几何解释 如图 11.1 所示， $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛是指图中阴影区域的面积趋于有限的定值。

例 1 讨论无穷限积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 的敛散性。

解 $\forall u > 1$ ，因为

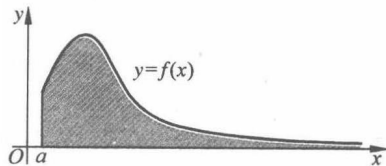


图 11.1

$$\int_1^u \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(u^{1-p} - 1), & p \neq 1, \\ \ln u, & p = 1, \end{cases}$$

所以

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

故无穷限积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 当 $p > 1$ 时收敛, 且收敛于 $\frac{1}{p-1}$, 当 $p \leq 1$ 时发散.

例 2 讨论无穷限积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan u = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} (-\arctan u) = \frac{\pi}{2}.$$

故无穷限积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ 收敛, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$, 参见图 11.2.

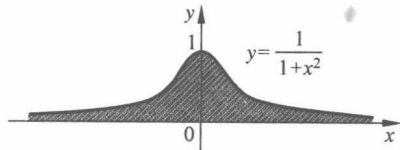


图 11.2

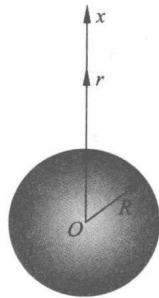


图 11.3

例 3 在地球表面发射火箭, 要使火箭远离地球, 初速度 v_0 应为多大?

解 如图 11.3 所示, 以地心为原点建立坐标系, 设火箭的质量为 m , 则火箭在离地心 x 处的引力为 $F = \frac{mgR^2}{x^2}$, 于是火箭由 $x=R$ 到 $x=r$ 所做的功为

$$W = \int_R^r \frac{mgR^2}{x^2} dx = mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right),$$

从而 $\int_R^{+\infty} \frac{mgR^2}{x^2} dx = mgR$. 故由 $mgR = \frac{1}{2}mv_0^2$ 得 $v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11.2 \text{ km/s}$, 此即所求.

11.1.2 瑕积分

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上有定义, 且在点 a 的任一右邻域内无界, 而在 $[u, b] \subset (a, b]$ 上有界可积, 极限 $\lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x) dx$ 称为 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上的反常积分, 记作 $\int_a^b f(x) dx$.

$$\text{ie: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x) dx.$$

如果 $\lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x) dx$ 存在, 则称 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 否则称其发散. 无界函数的反常积分亦称为瑕积分, 对上式而言 a 称为瑕点. 同理可得 b 为瑕点时,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x) dx.$$

当 $f(x)$ 的瑕点 $c \in (a, b)$ 时, 则定义

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow c^-} \int_a^u f(x) dx + \lim_{u \rightarrow c^+} \int_u^b f(x) dx.$$

若 a, b 都是 $f(x)$ 的瑕点, 则定义

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^c f(x) dx + \lim_{u \rightarrow b^-} \int_c^u f(x) dx.$$

例 4 讨论瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 的敛散性.

解 显然, 1 为瑕点. 而

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{u \rightarrow 1^-} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{u \rightarrow 1^-} \arcsin u = \frac{\pi}{2},$$

故 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 收敛于 $\frac{\pi}{2}$.

例 5 讨论瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx$ 的敛散性.

解 $x=0$ 为瑕点, 由于

$$\int_u^1 \frac{1}{x^q} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-q} (1 - u^{1-q}), & q \neq 1, \\ -\ln u, & q = 1, \end{cases}$$

故当 $0 < q < 1$ 时, $\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx$ 收敛, 且 $\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx = \frac{1}{1-q}$; 当 $q \geq 1$ 时, $\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx$ 发散.

对于 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, 有 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$, 即可分为两部分讨论之.

习 题 11.1

1. 讨论下列无穷积分是否收敛? 若收敛, 则求其值.

(1) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx;$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx;$

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx;$

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)} dx;$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5} dx;$

(6) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx;$

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \sin x dx;$

(8) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

2. 讨论下列瑕积分是否收敛? 若收敛, 则求其值.

(1) $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx (p \in \mathbb{R});$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx;$

(3) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} dx;$

(4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

(5) $\int_0^1 \ln x dx;$

(6) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx;$

(7) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx;$

(8) $\int_0^1 \frac{1}{x(\ln x)^p} dx (p \in \mathbb{R}).$

3. 举例说明: 瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛时, $\int_a^b f^2(x) dx$ 不一定收敛.

4. 举例说明: 瑕积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续时, 不一定有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

5. 证明: 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 存在, 则 $A = 0$.

6. 证明: 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可导, 且 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$ 都收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

11.2 无穷限积分的性质与收敛判别

11.2.1 无穷限积分的性质

由无穷限积分的定义知

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx \text{ 存在};$$

由极限的柯西收敛准则得

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx \text{ 存在} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists G \geq a, \exists "u_1, u_2 > G \Rightarrow \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x) dx \right| < \epsilon".$$

所以有下面的定理.

定理 1 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists G \geq a, \exists "u_1, u_2 > G \Rightarrow \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x) dx \right| < \epsilon".$

由定理 1 可得下面的性质.

性质 1 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x) dx, \int_a^{+\infty} f_2(x) dx$ 都收敛, 则 $\forall k_1, k_2, \int_a^{+\infty} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx$ 也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int_a^{+\infty} f_1(x) dx + k_2 \int_a^{+\infty} f_2(x) dx.$$

性质 2 若 $\forall u > a, f(x)$ 在 $[a, u]$ 上可积, 则 $\forall b > a, \int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ 同时收敛或同时发散, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

性质 3 若 $\forall u > a, f(x)$ 在 $[a, u]$ 上可积, 则

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛},$$

且 $\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx.$

证 因为 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists G \geq a, \exists "u_1, u_2 > G \Rightarrow \int_{u_1}^{u_2} |f(x)| dx < \epsilon".$

而 $\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x) dx \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} |f(x)| dx$, 故 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

又 $\forall u > a, \left| \int_a^u f(x) dx \right| \leq \int_a^u |f(x)| dx$, 于是令 $u \rightarrow +\infty$ 得

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx.$$

定义 1 如果 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛.

由性质 3 知

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛},$$

反之不成立. 如果 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 而 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 条件收敛.

11.2.2 比较判别法

比较判别法仅应用于绝对收敛的判别.