高孝忠 编著

数学分析教程

（下册）

清华大学出版社

高孝忠 编著

数学分析教程

（下册）

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书以极限为工具，研讨了函数的分析性质——连续性、可微性、可积性与可展性，其内容分为 5 大部分：极限、连续、微分、积分和级数，从一元函数入手，拓展到多元函数. 全书分上下两册，共 20 章（上册 10 章，下册 10 章）.

本书注重学生对数学分析的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握，以及数学思维能力、逻辑思维能力的培养和训练. 教材条理清晰，简明易学.

本书可作为综合性大学、师范院校数学系各专业的教材，还可作为高等学校数学系教师以及数学工作者的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

数学分析教程. 下册/高孝忠编著. --北京：清华大学出版社，2012.10
ISBN 978-7-302-29930-1

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①高…　Ⅲ. ①数学分析—教材　Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 202644 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：张雪娇

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：17.25　　**字　　数**：373 千字
版　　次：2012 年 10 月第 1 版　　**印　　次**：2012 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：38.00 元

产品编号：047685-01

前言

FOREWORD

数学分析是大学数学专业的一门基础主干课，其思想、内容和方法是学习后续课程的基础.掌握数学分析的思想、内容和方法是开设数学分析课程的基本目标，它教给学生如何用数学的思维方法去处理在社会实践中面临的课题.为此，根据教育部关于高校精品课程教材建设的要求，结合多年来积累的教学经验和对教学改革的积极思考与探索，作者编写了这本《数学分析教程》.

本书有如下特点：

(1) 风格：采用通俗易懂的语言.

林群院士说："深奥的东西，能说你懂了，以什么为标准呢？那就是看你能否用粗浅的语言去描述."本书的编写风格恰以此为宗旨，语言通俗易懂，学生喜闻乐见，容易接受.

(2) 题材：采用抽象与应用相结合.

应用体现在理论与实际的联系.知道了抽象的过程，就懂得了应用的方法.书中对每一个抽象的概念，都给出其引入的情境，告知抽象的过程和应用的方法.

(3) 内容：采用严密要求下的解释.

严密的逻辑推理，是数学的基本要求之一.本书注重引导学生从简单的解释达到严密的论证，掌握数学思维方法，培养逻辑推理能力.

(4) 拓展：采用推理中的必然性力量.

梳理出知识中的逻辑线，是学生掌握知识的最佳方案，使学生变机械记忆为理解记忆，从而真正理解和掌握数学分析的基本概念、基本理论和方法.

(5) 形式：采用立体彩图，图文并茂.

本书较之该学科教材一贯采用黑白的立体图有了突破，书中图形皆采用双色印刷，直观且空间感强，立体效果更好.而且图形配合恰当，易于理解，更有利于教与学.

(6) 方法：配备多媒体教学课件.

本书的每一章节都配有多媒体课件(教学光盘).课件中的教学情境设置得当，动图效果生动，在教学实践中已得到同行教师与学生的好评.

本书在内容上有如下亮点(在现行教科书中尚未出现)：

(1) 在数的发展论述中来介绍实数.

(2) 给出毕达哥拉斯可公度原理的粗浅解释，说明"无理数"的来由.

(3) 在数集的确界中给出较小的正数 ε,对函数的单调性定义给出认识过程,为极限的介绍作准备.

(4) 极限定义由浅入深,给出芝诺悖论的新解释,指出芝诺悖论与魏尔斯特拉斯 ε-N 语言的联系,在教学中学生容易接受.

(5) 引入记号 $o(g(x))$表示 $g(x)$的所有高阶无穷小构成的集合.

(6) 以实数的连续性为背景,给出函数连续的两个定义.

(7) 在导数的引入中给出数学推导,再寻找实际背景.

(8) 在微分介绍中,先给出数学引入,再给出实际背景.并给出其与拉格朗日中值公式、泰勒公式的联系.

(9) 不定积分定义为 $\int f(x)\mathrm{d}x = \{F(x): F'(x) = f(x)\}$. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示对集合 $\{F(x): F'(x) = f(x)\}$ 中的每一个元素取微分.

(10) 在现行教材中,不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$ 里的 $\mathrm{d}x$ 由指示积分变元的概念不明不白地变成了微分,本书已简单解决了这一问题.

(11) 总练习题中选录了一些近年来的硕士研究生统一入学考试的试题,以便学生提高.

由于篇幅有限,不再一一罗列,读者可参照其他教材识别之.可以说,对数学分析教材的改革,要突出思想方法的介绍.只有这样,学生才能真正受益.

本书在编写、修订过程中,得到了贵州师范大学数学与计算机科学学院的大力支持;清华大学出版社编辑刘颖、贵州师范大学的游泰杰教授对本书的编写提出了很多宝贵的意见;贵州大学的郭正林副教授、秦新波副教授对本书作了认真的校对,在此对他们表示诚挚的感谢.

高孝忠

2012 年 2 月

目 录

CONTENTS

第11章 反常积分

11.1 反常积分的概念

定积分的定义有两个要求：(1)积分区间有限；(2)被积函数有界.

如果扩大讨论范围，即得两类反常积分——无穷限积分与瑕积分.

11.1.1 无穷限积分

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且在任意区间 $[a,u]$ 上可积，极限 $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷限积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

$$\text{ie}:\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$$

如果极限 $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果 $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 不存在，则称无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

同理可定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

值得注意的是，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性与 a 无关. 但 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛必须 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛. 如果 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有一个发散，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

几何解释　如图 11.1 所示，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛是指图中阴影区域的面积趋于有限的定值.

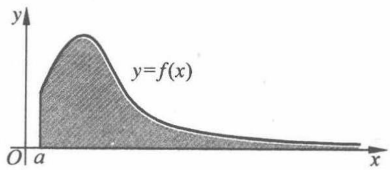

图　11.1

例 1　讨论无穷限积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　$\forall u>1$，因为

$$\int_{1}^{u}\frac{1}{x^{p}}dx=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}(u^{1-p}-1), & p\neq 1,\\ \ln u, & p=1,\end{cases}$$

所以

$$\lim_{u\to\infty}\int_{1}^{u}\frac{1}{x^{p}}dx=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$$

故无穷限积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}}dx$ 当 $p>1$ 时收敛，且收敛于 $\frac{1}{p-1}$，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

例 2　讨论无穷限积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^{2}}dx$ 的敛散性.

解　因为

$$\lim_{u\to+\infty}\int_{0}^{u}\frac{1}{1+x^{2}}dx=\lim_{u\to+\infty}\arctan u=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{0}\frac{1}{1+x^{2}}dx=\lim_{u\to-\infty}(-\arctan u)=\frac{\pi}{2}.$$

故无穷限积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^{2}}dx$ 收敛，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^{2}}dx=\pi$，参见图 11.2.

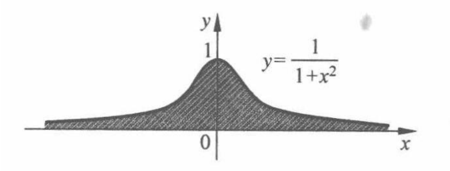

图　11.2

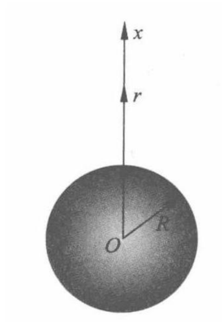

图　11.3

例 3　在地球表面发射火箭，要使火箭远离地球，初速度 v_0 应为多大？

解　如图 11.3 所示，以地心为原点建立坐标系，设火箭的质量为 m，则火箭在离地心 x 处的引力为 $F=\frac{mgR^{2}}{x^{2}}$，于是火箭由 $x=R$ 到 $x=r$ 所做的功为

$$W=\int_{R}^{r}\frac{mgR^{2}}{x^{2}}dx=mgR^{2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right),$$

从而 $\int_{R}^{+\infty}\frac{mgR^{2}}{x^{2}}dx=mgR$. 故由 $mgR=\frac{1}{2}mv_0^2$ 得 $v_0=\sqrt{2gR}\approx 11.2\text{km/s}$，此即所求.

11.1.2 瑕积分

定义 2 设函数 $f(x)$在$(a,b]$上有定义,且在点 a 的任一右邻域内无界,而在$[u,b]\subset(a,b]$上有界可积,极限 $\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$在$(a,b]$上的反常积分,记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

$$\text{ie:}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果 $\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则称其发散. 无界函数的反常积分亦称为瑕积分,对上式而言 a 称为瑕点. 同理可得 b 为瑕点时,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)$的瑕点 $c\in(a,b)$时,则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to c^-}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x+\lim_{u\to c^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若 a,b 都是 $f(x)$的瑕点,则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to a^+}\int_u^c f(x)\mathrm{d}x+\lim_{u\to b^-}\int_c^u f(x)\mathrm{d}x.$$

例 4 讨论瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 显然,1 为瑕点. 而

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{u\to 1^-}\int_0^u\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{u\to 1^-}\arcsin u=\frac{\pi}{2},$$

故 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛于$\frac{\pi}{2}$.

例 5 讨论瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 $x=0$ 为瑕点,由于

$$\int_u^1\frac{1}{x^q}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{1-q}(1-u^{1-q}), & q\neq 1,\\ -\ln u, & q=1,\end{cases}$$

故当 $0<q<1$ 时,$\int_0^1\frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 收敛,且$\int_0^1\frac{1}{x^q}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-q}$;当 $q\geqslant 1$ 时,$\int_0^1\frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

对于 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,有$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,即可分为两部分讨论之.

习 题 11.1

1. 讨论下列无穷积分是否收敛？若收敛，则求其值.

(1) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$；

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}\mathrm{d}x$；

(6) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$；

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{x}\sin x\mathrm{d}x$；

(8) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

2. 讨论下列瑕积分是否收敛？若收敛，则求其值.

(1) $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x\,(p\in\mathbb{R})$；

(2) $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$；

(6) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x$；

(8) $\int_0^1 \frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x\,(p\in\mathbb{R})$.

3. 举例说明：瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 不一定收敛.

4. 举例说明：瑕积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续时，不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

5. 证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 存在，则 $A=0$.

6. 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

11.2 无穷限积分的性质与收敛判别

11.2.1 无穷限积分的性质

由无穷限积分的定义知

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x \text{ 存在};$$

由极限的柯西收敛准则得

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x \text{ 存在} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists G\geqslant a, \ni \text{“}u_1,u_2>G\Rightarrow\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon\text{”}.$$

所以有下面的定理.

定理 1 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists G\geqslant a, \ni$“$u_1,u_2>G\Rightarrow\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$”.

由定理 1 可得下面的性质.

性质 1 若$\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛,则 $\forall k_1,k_2$, $\int_a^{+\infty}[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x$ 也收敛,且

$$\int_a^{+\infty}[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2 若 $\forall u>a$, $f(x)$在$[a,u]$上可积,则 $\forall b>a$, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散,且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 3 若 $\forall u>a$, $f(x)$在$[a,u]$上可积,则

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛},$$

且 $\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$.

证 因为$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\forall\varepsilon>0, \exists G\geqslant a, \ni$“$u_1,u_2>G\Rightarrow\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$”.

而 $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\mathrm{d}x$,故$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

又 $\forall u>a$, $\left|\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^u |f(x)|\mathrm{d}x$, 于是令 $u\to+\infty$得

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

定义 1 如果$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

由性质 3 知

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛},$$

反之不成立.如果$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,而$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散,则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

11.2.2 比较判别法

比较判别法仅应用于绝对收敛的判别.