

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Panorama of Mathematics

数 学 概 览



# 直观几何 (上册)

附季理真代译序

— D. 希尔伯特 S. 康福森 著  
— 王联芳 译 江泽涵 校

· 013931675

Panorama of Mathem

数学概

0182.2

09

V1

ZHIGUAN JIHE



# 直观几何 (上册)

附季理真代译序

— D. 希尔伯特 S. 康福森 著

— 王联芳 译 江泽涵 校



北航

C1639926

0182.2

09

V1



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 图书在版编目(CIP)数据

直观几何. 上册: 附季理真代译序 / (德) 希尔伯特 (Hilbert, D.), (德) 康福森 (Cohnvossen, S.) 著; 王联芳译. -- 北京: 高等教育出版社, 2013. 2

(数学概览)

ISBN 978 - 7 - 04 - 033995 - 6

I. ①直… II. ①希… ②康… ③王… III. ①立体几何 IV. ①O123.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 014068 号

策划编辑 王丽萍  
责任校对 王雨

责任编辑 王丽萍  
责任印制 韩刚

封面设计 王凌波

版式设计 于婕

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
印 刷 高教社(天津)印务有限公司  
开 本 787mm × 1092mm 1/16  
印 张 11  
字 数 200 千字  
购书热线 010 - 58581118

咨询电话 400 - 810 - 0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landrao.com>  
<http://www.landrao.com.cn>  
版 次 2013 年 2 月第 1 版  
印 次 2013 年 2 月第 1 次印刷  
定 价 29.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物 料 号 33995 - 00

## 《数学概览》编委会

---

主编： 严加安    季理真

编委： 丁 玖    李文博

李文林    曲安京

王善平    徐 佩    姚一隼

## 《数学概览》序言

---

当你使用卫星定位系统 (GPS) 引导汽车在城市中行驶, 或对医院的计算机层析成像深信不疑时, 你是否意识到其中用到什么数学? 当你兴致勃勃地在网上购物时, 你是否意识到是数学保证了网上交易的安全性? 数学从来就没有像现在这样与我们日常生活有如此密切的联系。的确, 数学无处不在, 但什么是数学, 一个貌似简单的问题, 却不易回答。伽利略说: “数学是上帝用来描述宇宙的语言。” 伽利略的话并没有解释什么是数学, 但他告诉我们, 解释自然界纷繁复杂的现象就要依赖数学。因此, 数学是人类文化的重要组成部分, 对数学本身以及对数学在人类文明发展中的角色的理解, 是我们每一个人应该接受的基本教育。

到 19 世纪中叶, 数学已经发展成为一门高深的理论。如今数学更是一门大学科, 每门子学科又包括很多分支。例如, 现代几何学就包括解析几何、微分几何、代数几何、射影几何、仿射几何、算术几何、谱几何、非交换几何、双曲几何、辛几何、复几何等众多分支。老的学科融入新学科, 新理论用来解决老问题。例如, 经典的费马大定理就是利用现代伽罗瓦表示论和自守形式得以攻破; 拓扑学领域中著名的庞加莱猜想就是用微分几何和硬分析得以证明。不同学科越来越相互交融, 2010 年国际数学家大会 4 个菲尔兹奖获得者的工作就是明证。

现代数学及其未来是那么神秘, 吸引我们不断地探索。借用希尔伯特的一句话: “有谁不想揭开数学未来的面纱, 探索新世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢? 我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标? 在广阔而丰富的数学思想领域, 新世纪将会带来什么样的新方法和新成就?” 中国有句古话: 老马识途。为了探索这个复杂而又迷人的神秘数学世界, 我们需要数学大师们的经典论著来指点迷津。想象一下, 如果有机会倾听像希尔伯特或克莱因这些大师们的报告是多么激动人心的事情。这样的机会当然不多, 但是我们可以通过阅读数学大师们的高端科普读物来提升自己的数学素养。

作为本丛书的前几卷, 我们精心挑选了一些数学大师写的经典著作。例如,

希尔伯特的《直观几何》成书于他正给数学建立现代公理化系统的时期；克莱因的《数学讲座》是他在 19 世纪末访问美国芝加哥世界博览会时在西北大学所做的系列通俗报告基础上整理而成的，他的报告与当时的数学前沿密切相关，对美国数学的发展起了巨大的作用；李特尔伍德的《数学随笔集》收集了他对数学的精辟见解；拉普拉斯不仅对天体力学有很大的贡献，而且还是分析概率论的奠基人，他的《概率哲学随笔》讲述了他对概率论的哲学思考。这些著作历久弥新，写作风格堪称一流。我们希望这些著作能够传递这样一个重要观点，良好的表述和沟通在数学上如同在人文学科中一样重要。

数学是一个整体，数学的各个领域从来就是不可分割的，我们要以整体的眼光看待数学的各个分支，这样我们才能更好地理解数学的起源、发展和未来。除了大师们的经典的数学著作之外，我们还将有计划地选择在数学重要领域有影响的现代数学专著翻译出版，希望本译丛能够尽可能覆盖数学的各个领域。我们选书的唯一标准就是：该书必须是对一些重要的理论或问题进行深入浅出的讨论，具有历史价值，有趣且易懂，它们应当能够激发读者学习更多的数学。

作为人类文化一部分的数学，它不仅具有科学性，并且也具有艺术性。罗素说：“数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也具有至高无上的美。”数学家维纳认为“数学是一门精美的艺术”。数学的美主要在于它的抽象性、简洁性、对称性和雅致性，数学的美还表现在它内部的和谐和统一。数学美应该而且能够被我们理解和欣赏。最基本的数学美是和谐美、对称美和简洁美，它应该可以而且能够被我们理解和欣赏。怎么来培养数学的美感？阅读数学大师们的经典论著和现代数学精品是一个有效途径。我们希望这套数学概览译丛能够成为在我们学习和欣赏数学的旅途中的良师益友。

严加安、季理真  
2012 年秋于北京

# 代译序

## 大卫·希尔伯特：单纯的数学人

---

1 引言	i
2 谁该读这本《直观几何》?	ii
3 本书有何特色?	iii
4 本书是什么时候写的?	iv
5 合作者斯特凡·康福森简介	v
6 关于希尔伯特的其他著作	vi
7 希尔伯特的主要数学贡献	vii
8 希尔伯特与庞加莱之比较	viii
9 哥廷根的遗产：希尔伯特与克莱因	ix
10 关于保尔·亚历山德罗夫写的拓扑学小册子	x

### 1 引言

大卫·希尔伯特 (David Hilbert), 有史以来最伟大的数学家之一: 他的研究工作, 他的远见卓识和人格魅力, 以及他富有成果的创造力和对数学的广泛兴趣, 给数学带来了多方面的变化——这一切能从以他命名的 30 多个概念和定理中体现出来。

希尔伯特虽然涉足多个数学领域, 但每当研究其中一个领域时, 他总能保持高度专注, 从而发现隐藏在困难的数学问题背后的那些简单而基本的道理。

同为深孚众望的大数学家, 克莱因 (Felix Klein) 如同国王般高高在上, 而希尔伯特与学生和青年数学家们很亲近。他只对数学感兴趣, 毫不在意政治和权力。总之, 他是一个单纯的数学人!

引用著名的俄罗斯作家列夫·托尔斯泰 (Lev N. Tolstoy) 的一段话也许正合适: “任何一个真正做大事的人都很单纯, 因为他没有时间去弄一些无关紧要的事。”

甚至在他去世后，他仍然保持单纯。他的墓碑是一块简单的石板，底部刻写着六个德文词：

WIR MÜSSEN WISSEN WIR WERDEN WISSEN

(我们必须知道，我们终将知道)

这两句话恰当地表达了他的单纯和自信。

他的学生赫尔曼·外尔 (Herman Weyl) 说道：“高斯和黎曼的成就当然不亚于希尔伯特，但他们并没有尽力去激发同时代人的热情，没有在他们的周围形成一群具有献身精神的追随者。而希尔伯特天生充满了生活的热情，他寻求与他人的交往，特别是与青年科学家的交往；他喜欢与别人交流思想，特别是与青年科学家交流；他坚信理性的力量能给简单而清晰的问题找到简单而清晰的答案——他的信念有着无可抗拒的感染力。”

有一次，希尔伯特对哈拉德·玻尔 (Harald Bohr) 说：“我之所以能够取得一些数学成就，实在是因为我觉得数学是如此之难。我在阅读或在谈论数学的时候，总觉得它太难，几乎无法理解它；于是，我禁不住想，它不能变得简单点吗？结果呢，”希尔伯特脸上露出孩子般的笑容，继续说道，“有几次，我终于发现它确实比较简单！”

他的另一位学生库朗 (Richard Courant) 证实道：“在科学上，他并不能立即把握复杂的事物并将之吸收；他并不具有这方面的天赋。他必须对事物刨根问底。”

## 2 谁该读这本《直观几何》？

在希尔伯特所写的全部书中，《直观几何》(Anschauliche Geometrie) 也许是最有名的。

谁该读这本书？答案是：每位数学专业的学生也许都应该读，最好是人手一册。

一个简单而直接的理由：这是基于一位伟大的数学家和数学教育家的讲课，并由另一位伟大的数学家精心写作而成的一部伟大的著作！

如果您想听希尔伯特的讲课，这本书也许是最好的替代！从这里，您不仅可以学到数学，而且能看到数学大师是如何处理数学的。

的确，这本由希尔伯特与康福森 (Cohn-Vossen) 合作的书是最好的数学普及读物之一，适合所有想认真学习数学的学生和数学家。

2012年9月，我乘汽车离开法国斯特拉斯堡大学，途中与瑞士数学家诺伯特·阿康珀 (Norbert A'Campo) 谈起这本书。他说道：“在一个蹩脚数学教师的课堂上，如果一名学生得到希尔伯特写的这本书并读了它，那他就不会被毁掉！”



是的, 这名学生会受鼓舞, 并了解到什么是数学, 如何做数学以及为什么数学是美丽的。

为什么要给这本出版于 1932 年的老书如此高的评价? 它的每一章都是从非常简单和基本的概念开始; 然后向读者们演示, 如何把困难的结果和理论归结为简单的东西, 以及数学的不同部分是如何相互关联的。它强调数学既是简单的又有着丰富的内容。而且, 按现在的标准来看, 此书所讨论的所有主题仍然很有意义、很重要。

此书对数学作了非常系统且较易理解的介绍, 特别适合于那些“不愿意进行分析论证细节”的人。书中演示, 数学的多个领域如何以出人意料的方式与几何关联; 从而, “甚至能使人对数学作为一个整体有大致的了解, 对数学问题的多样性以及其中所包含丰富的概念有正确认识。因此, 可以这样说, 基于直观的处理方法、以粗线条的形式介绍几何, 这可以让更多的人而不只是专家来更准确地欣赏数学。”

一篇发表于 1933 年的书评写道: “此书将吸引相当广泛的人群, 不仅纯数学的所有分支领域的专家会喜欢它, 因为它在迷宫般的数学各分支之间建立了友好的联系; 众多的在校学生或离校后感受到几何对人之心灵的那种令人着迷作用的人们也会喜欢它。”

“几何”在此书中得到非常广泛的解释。例如, 除了平面曲线之解析几何, 曲线和曲面的微分几何之类的一般几何外, 它还包括了共形映射、最小曲面、数的几何及其在数论中令人惊奇的应用、位形空间之几何、多面体与曲面的拓扑等。

这是一本内容丰富的书, 读者不必逐章顺序阅读。的确, 作者“好像在带着读者在几何这个花园里悠闲地散步, 各人可以根据自己所好采摘花束”。的确, 此书充满了清晰和精心解释的数学概念, 并伴之以图形以及——最重要的——深刻的洞察力。

### 3 本书有何特色?

如作者所解释, 本书之目的是“从直观、直觉的方面, 呈现几何学之今貌。在直观想象的帮助下, 我们能阐明几何学的诸多事实和问题; 除此之外, 在许多场合中还可以给出研究和证明方法之几何框架”。本书强调用直觉的方法处理数学。如在其序言中的说明: “在数学中……我们发现目前存在两种倾向: 一方面是‘抽象化’的倾向, 试图从被研究事物的纷乱头绪中整理出‘逻辑’关系, 使得事物按系统、有序的方式联系起来; 另一方面是‘直觉理解’的倾向, 鼓励更直接地把握所研究对象, 与之建立起生动的‘联系’, 也就是说, 强调对象关系的具体意义……一如既往正确的是: ‘直觉理解’在几何中起着主要作用。”

此书的 1953 年一段评论这样写道: “作者具有带着读者只走几步就从基本

原理直入几何核心问题的天赋；他们有能力把隐藏在背后的，联系并揭示表面不同领域的统一性呈现出来，这种能力出自克莱因的优良传统，对于新手来说这种能力越早培养越好。330幅插图使得此书既易读又生动。”

在数学学习和研究中，直觉非常重要。大数学家如克莱因和嘉当 (Élie Cartan) 都强调直觉。例如，嘉当在 1940 年的一份讲义中写道：“数学活动与人类任何其他活动一样，人们应该在其中找到价值的平衡：正确的思考无疑是重要的，但更重要的是提出正确的问题。在这方面，我可以毫无顾忌地讲，法国数学家不仅始终知道他们自己在谈论什么，而且还具有选择最基本问题——这类问题的解决将对推动整个科学的发展产生强烈的影响——的正确直觉。”

克莱因应用直觉的一个具体例子由庞加莱提供：“请看克莱因教授。他在研究函数论中的一个最抽象的问题——确定在一个给定的黎曼面上是否始终存在一个包含给定奇点的函数。这位杰出的德国几何学家是怎样解决问题的呢？他用一个各处导电率按某种变化规律分布的金属面来代替所研究的黎曼面；然后用一个电池的两端连接面上的两点；他说，一定会有电流产生，该电流在金属面上的分布定义了一个函数，该函数的奇点正是问题所要求的。”庞加莱是在谈论克莱因所写的一本小册子，后者在其中解释了黎曼的函数论，这是克莱因最有创造性的工作之一。

#### 4 本书是什么时候写的？

回顾一下希尔伯特当年讲课的时间和形势也很有趣，康福森就是在这些讲课的基础上写成了这本书。

希尔伯特研究过许多数学问题，但他通常不会回过头来研究同一个问题。他在 1920 年期间的一位助手写道：“到了 1920—1921 年冬天，他的兴趣改变了。现在，他的主要目标是要用符号逻辑的方法把数学的基础形式化。”

更准确地说，在 1921 年，希尔伯特提出了关于经典数学基础的新建议，后来被称为“希尔伯特纲领”。此纲领要求把所有的数学以公理的形式进行形式化，然后证明这些公理化的数学是相容的。相容性证明的本身将只能用希尔伯特所说的“有限”方式进行。

这种数学公理化的想法由希尔伯特在 1890 年首先提出。他当时成功地实现了欧几里得几何基础的公理化，并写下了名著《几何基础》。他讲了关于几何抽象基础的一段名言：“我们在任何时候可以说‘桌子、椅子和啤酒杯’，而不必说‘点、直线和平面’。”

关于希尔伯特纲领的研究在 1920 年代取得显著进展，许多重要的逻辑学家为此做出了贡献。但其结局令希尔伯特大大地失望了。希尔伯特纲领也曾对哥德尔 (Kurt Gödel) 产生了很大的影响；他在 1931 年证明的“不完备定理”就是受

其推动, 但该定理表明希尔伯特纲领是行不通的。据《希尔伯特传》所记, 当希尔伯特从贝尔纳斯 (Edward Bernays) 那里得知哥德尔的工作后, “他有点生气”。

瑞德 (Constance Reid) 所著《希尔伯特传》还写道: “虽然希尔伯特自己的研究都在朝最抽象和形式化的数学概念发展, 但他当时却严格按照直观直觉的方式讲授了一系列几何课程, 这些课程是他为向 [第一次世界] 大战后回到大学的年轻人普及数学而专门设计的。”

当时的数学并不像现在这样普及。这些课程是一位伟大的数学家为普及数学而做的成功尝试, 受到广大学生的欢迎。

也许希尔伯特当时需要做一些具体和直觉的事, 使自己能够在紧张的抽象数学研究工作中放松一下。

从某种意义上讲, 希尔伯特从来没有放弃用直觉的方法处理数学。他的学生库朗说: “希尔伯特是最讲究实际和直觉的数学家, 他发明并很自觉地使用这样的原则: 如果你要解决某个问题, 首先把问题的非本质东西去掉; 在不损害其核心的基础上尽量把它简化、特殊化; 问题在不失其趣味性的情况下已经变得尽可能简单了, 然后去解决它。把得到的结果一般化则是一件平凡的事, 你不必去过多关注它。希尔伯特的这一原则对于他本人以及从他身上学得的其他人来说, 都非常有用; 可惜它现在已经被别人遗忘了。”

此书是基于希尔伯特在 1920—1921 年冬季所授每周四次的讲课而写成的; 该课程的名称同现在的书名, 讲课笔记则由希尔伯特的学生罗泽曼 (Walther Rosemann, 1923 年获博士学位) 记录。据希尔伯特说, “此书基本保留了课程的框架和内容, 但康福森重写了许多细节, 并在不少地方补充了新的内容。”

## 5 合作者斯特凡·康福森简介

康福森是一位很好的数学家, 他是著名俄罗斯数学家格里高利·佩雷尔曼 (Grigori Perelman) 的导师的导师; 康福森所创的微分几何方法在佩雷尔曼解决庞加莱猜想的工作中起着重要作用。

康福森年仅 34 岁就英年身亡; 除了与希尔伯特合写的这本书外, 他只发表了 9 篇论文。因此, 包括数学家在内的很多人都不太了解他, 只知道他与希尔伯特合著《直观几何》这本书。趁此机会, 我们以下对他稍作介绍。

康福森于 1902 年出生于德国布雷斯劳 (Breslau, 现在是波兰的 Wroclaw) 的一个犹太人家庭。他于 1924 年在布雷斯劳大学获博士学位, 导师是克尼塞 (Adolf Kneser)。1929 年, 他在哥廷根大学获“讲师资格”; 与希尔伯特合作的这本书也许就是在那时写的 (注意, 此书出版于 1932 年)。1930 年, 他被聘为科隆大学“不支薪讲师” (privatdocent)。1933 年, 德国纳粹上台后, 执行疯狂的反犹政策, 康福森遂被科隆大学除名。

在科隆大学的三年期间,康福森因与希尔伯特合写的这本书而出名。此书影响甚大,这给纳粹当局把康福森名正言顺地赶出大学带来困难。他们于是就贬低他“只起了抄书员的作用”。狂热信奉纳粹思想的著名德国数学家比伯巴赫(Ludwig Bieberbach)则强调,他只引用书中属于希尔伯特的那些内容,而绝不引用属于康福森的东西。

康福森被科隆大学除名后,遂去瑞士。先住在洛迦诺市(Locarno),1934年到苏黎世联邦工学院执教。同年稍晚,他移居苏联。在他的影响之下,在苏联的莫斯科大学和列宁格勒大学形成了“大范围几何”学派;该学派后来对苏联的几何学研究产生很大影响,其中的重要成员 A. D. 亚历山德罗夫(Aleksandr Danilovic Aleksandrov)是康福森的学生(佩雷尔曼则是亚历山德罗夫的学生)。1935年,康福森被聘为列宁格勒大学教授,在苏联科学院斯捷洛夫数学研究所(Steklov Mathematical Institute)工作。第二年,他随同研究所一起搬到莫斯科,并再次被聘为莫斯科大学教授。

在这短短的期间内,康福森发表了数篇有影响的论文。1936年,他因肺病不幸去世。康福森研究“一般凸面是否由其度量唯一确定”的问题。他证明了,具有正高斯曲率的正则 $C^3$ 类的闭曲面是刚性的。他的工作深入发展了柯西(Cauchy)对凸多面体刚性的研究。他去世之后,这方面的研究由亚历山德罗夫继续,然后传给了其学生波戈列洛夫(Aleksei Vasilevich Pogorelov)。

## 6 关于希尔伯特的其他著作

希尔伯特是一位好教师也是一位好作者。他写了数十本重要的著作,其中有许多是基于他所讲授的课程。我们在此要提及其中的一本,因为它相当特别。

《代数域理论》(The Theory of Algebraic Number Fields),这也许是希尔伯特写的第一本书,也是他来到哥廷根大学后所取得的第一个重要学术成就。当时他还是个年轻数学家,与闵科夫斯基一起,接受了德国数学会指派的任务:写一份关于直到19世纪末的代数域理论发展的综述报告。

他们高兴地接受了这项具有挑战性的任务。希尔伯特自1895年来到哥廷根后,就一直在埋头写报告,并于1897年完成。但是闵科夫斯基没有完成他那部分工作。据《希尔伯特传》所述,“刚开始时,希尔伯特很担心会辜负克莱因对自己的信任……他全神贯注地做着德国数学会所布置的数论报告中他那部分的任务,认为做好这件事将为其的未来发展提供必要的基础。”

此书完成之后,希尔伯特跃入代数数论的核心。如《希尔伯特传》所说:“通过写这个数论报告,使他掌握了‘既详尽又全面’的数学知识;他开始小心翼翼地充满信心地前进。”

一位后辈数学家说:“看到在此系列文章中,许多概念和方法如何一步一步

地从特殊发展到一般，它们之间的深刻联系也昭然被揭，令人甚感愉快……”对于后辈数学家来说，希尔伯特（在此书中）好像“卜知”了未来的发展——他对数学的精准直觉在这里表现得最为淋漓尽致。不像他的关于不变量的工作，这标志了一门学科发展的终结；希尔伯特关于代数域的工作则注定成为一门新学科的开始。

此书展现了希尔伯特的远见卓识，并指导了代数数论研究以后数十年的发展。原书出版于 1897 年，直至 1998 年才出现了英文版。美国数学会 (AMS) 对英文版的评论道：“此版无疑将受到广大以英语为工作语言的数学家的欢迎。此书之所以如此重要，当然是因为它对于本世纪的数论发展有着重大影响。而且书中还包含着一些能够立即引起当今学生和研究者兴趣的内容。”

## 7 希尔伯特的主要数学贡献

希尔伯特在好几个数学领域做出了许多重要的贡献。他还指导了 75 名博士生——也许是历史上带学生最多的数学家之一。在他的所有学生中，最好的无疑是赫尔曼·外尔 (Herman Weyl)。希尔伯特于 1943 年逝世后，外尔写了一篇纪念文章“大卫·希尔伯特和他的数学工作” (David Hilbert and His Mathematical Work)，载于《美国数学会公报》 (Bulletin of the American Mathematical Society, 50 (1944) : 612—654)。他在文中写道：“回顾以往，那个打上了希尔伯特思想的印记并正在沉没于地平线下的数学时代，似乎较之前及之后的时代，更完美地取得了在‘把握单个具体问题’和‘形成一般抽象概念’之间的平衡。希尔伯特自己的工作对保持这种令人愉快的平衡做出了不少贡献；而且有很多事例表明，我们迄今的前进方向可以说是由他推动形成的。我们这一代人中，并没有出现能与他相提并论的数学家……他提出的问题、他的观点和他的方法所产生的影响，远远不止在因听了他的教诲而直接受到鼓舞的那一群人中间。”

然后，外尔分五个方面总结了希尔伯特的工作：(1) 不变量理论；(2) 代数域；(3) 公理化；(4) 积分方程；(5) 物理学。

从某种意义上讲，他的第一个重要的数学成果——解决戈当问题——最能体现其典型的研究风格。据《希尔伯特传》评述：“他的关于‘不变量系统存在有限基’的轰动一时的证明之关键在于一条引理（或称‘辅助定理’）：某一模上存在有限基。他通过研究克罗内克 (Kronecker) 的工作获得关于此引理的想法。引理是如此简单，看似不值一提。然而，戈当一般定理却能用它直接证明。这一工作是首个事例，反映了希尔伯特的思维特点——他的一名学生描述为：自然、天真的想法，并非来自权威或过去的经验。”

希尔伯特的另一名出类拔萃的学生是理查德·库朗，他因建立了两座数学研究所大楼而出名：一座建在哥廷大学，这是克莱因多年来的梦想；另一座后来

建在美国纽约大学。希尔伯特非常喜欢数学所的新大楼，赞赏道：“再也不会再有另一个像这样的研究所了！因为要有另一个这样的研究所，就必须有另一位库朗——但不可能有另一位库朗！”

库朗说：“希尔伯特的工作和他的人格魅力对迄今为止的数学科学发展产生了深远的影响。他作为数学思想家而具有的远见卓识、独立思考能力和强大的创造性，他对于数学的无所不能和广泛兴趣，这一切使得他成为多个不同数学领域的先驱。他是如此的独特，完全沉浸在工作中，全身心地献给数学事业，一位最能鼓舞人心、最慷慨、最高层次的教师和领袖，做任何事情都毫无倦怠、坚持到底。”

## 8 希尔伯特与庞加莱之比较

毫无疑问，庞加莱与希尔伯特都是 20 世纪初两位最伟大的数学家。一个似乎自然而幼稚的问题是，如何拿他们做比较？

答案是：他们之间可能无法做比较，因为俩人的差别太大。庞加莱也许更富有创造性。虽然他曾经为非专业读者写过几本科普著作，但他的数学论著看似不太有条理，不容易读懂。而且他也不善于讲课，没有带过任何博士生。庞加莱的一个外甥在写给米塔-列夫勒 (Mittag-Leffler) 的信中说道：“人们经常看到庞加莱在独自思索。与其他一些科学家不同，他并不相信口头交流思想会有助于发现……我舅舅认为，数学发现作为一种观念是完全排除合作可能性的。(数学) 发现来自与灵魂和真理直接交流的直觉，而无需可能的中间环节。”在同一封信中，外甥还描述了庞加莱工作方式：“在巴黎他的安静的研究室中，或在洛泽尔 (Lozere) 其花园的树荫下，庞加莱会每天在一叠画线纸前坐数小时；人们则看到纸上出现极为整齐的，他那带有棱角的漂亮的字。几乎没有涂改之处，也很少有停顿的地方。过了几天，一篇很长的论文完成了，准备付印。从此，舅舅只会把它当作已过去的事提及。当编辑把校样寄来，他几乎不会听从劝说去哪怕把它匆匆看一遍。”

在另一方面，希尔伯特是一位极具远见的数学家，这从他在 1900 年国际数学家大会上提出著名的 23 个问题，就能清楚地看出。他写得如此精彩，吸引和教育了许多杰出的博士生。

希尔伯特的工作方式以及他与别人互动的行为，也均与庞加莱有很大的不同。外尔在悼念希尔伯特的文章中写道：“希尔伯特的特点是天生充满了生活的热情，寻求与他人的交往，并乐于交流科学观点。他形成了不拘一格的学习和教学方式。他的广泛的数学知识大部分是通过与闵科夫斯基和胡维茨 (Hurwitz) 的谈话获得，而非来自于课堂。他在悼念胡维茨时说，‘在日复一日地时不时进行的无数次散步中，经过八年时间，我们考察了数学的每一个角落。’他后来教导自己

的学生也采用了从胡维茨那里学来的方式：穿越哥廷根周围树林的长途散步；或在雨天，在有遮蔽的自家花园里漫游。他的乐观精神，他的超越世俗的激情，以及他对科学价值的毫不动摇的信念，具有无可抗拒的感染力……更具决定性的是，他不仅是位科学家，而且是科学的化身；所以，他不仅教授本门科学的技艺，而且是（科学的）精神领袖。”

外尔在总结了希尔伯特的数学工作之后，末尾写道：“希尔伯特不仅是一位伟大的学者，而且是一位杰出的导师。他的许多学生和助手都能见证：他教授数学研究的技艺，一是通过让他们分享自己的工作及其推广；二是通过讲课，他的许多讲课笔记从哥廷根流向公共和私人的数学图书馆，其中涵盖了极为广泛的范围……仔细看一下收在其《选集》中那列可观的讲课目录（第3卷第430页），无不惊讶其中包含了那么多的一般性主题课程：如‘知识与思考’、‘论无限’、‘自然与数学’。他的演讲很流畅，不像闵科夫斯基那样的迟疑，也绝不单调乏味。他毫不费力地找到适当表达的词，并喜欢通过重复数遍来强调关键的词语。总的来说，他的讲课是其精神的忠实反映——直接而强烈，它们怎么可能会失去鼓动力？”

尽管有上述之明显不同，这两位伟大的数学家也许在一个重要方面具有共同点：他们都是单纯的人，全身心地专注于数学。

## 9 哥廷根的遗产：希尔伯特与克莱因

希尔伯特以多种方式影响了数学和数学家。在数学史上，哥廷根的黄金岁月是极为罕见、极为特殊的。在某种意义上来说，克莱因与希尔伯特的结合堪称天衣无缝：每位都对哥廷根兴起并成为世界数学中心作出了关键的贡献。在许多方面，希尔伯特与克莱因很不相同。

只是在写本篇序言时，作者才注意到：希尔伯特原来是克莱因的学生的学生——希尔伯特的导师是林德曼（C. L. Ferdinand Lindemann），而林德曼的导师是克莱因。

林德曼做出的唯一的重要数学贡献是证明了 $\pi$ 是超越数。不过，林德曼是一位成功的教师，他的另一名出色的学生是闵科夫斯基。

克莱因对于哥廷根大学的未来有很好的设想——具体而言，是要建一幢数学研究所大楼。他的这一梦想直到后来才由希尔伯特的学生库朗实现。所以说，是这一学术家族的三代人（克莱因、希尔伯特、库朗）为把哥廷根建设成为如此重要的数学中心发挥了主要作用。在这一过程中，希尔伯特负责数学研究；而克莱因和库朗则承担了行政管理工作。

很难再会有如此成功的学术家族。

如今，学术讨论会常见于世界上许多大学，很多人认为它们古已有之。但可

能没有多少人知道,是由于以克莱因和希尔伯特为首之哥廷根学派的倡行,使它们成为数学教育的一个重要部分。在哥廷根大学的学术讨论厅的两边墙上,分别挂着克莱因和希尔伯特的画像:他们似乎在注视着演讲者和听众。2011年,我在哥廷根大学做演讲,东道主告诉我,克莱因和希尔伯特的灵魂在听我讲话。

另一件众所周知的事情是,哥廷根大学的数学图书馆被许多别处的图书馆复制,一个有名的例子是在耶路撒冷大学爱因斯坦数学研究所的数学图书馆。

哥廷根对数学最重要的影响也许是,世界上有那么多的年轻人来到这里,被数学迷住,然后将其整个一生投入数学。

## 10 关于保尔·亚历山德罗夫写的拓扑学小册子

现代几何学,特别是整体微分几何学,是与拓扑学交织在一起的。虽然希尔伯特的这本书讲了一些拓扑学的内容,如多面体和曲面,但并没有提到代数拓扑;当时的计划是,让亚历山德罗夫(Paul Alexandroff)写一个关于拓扑学的附录。

但亚历山德罗夫所写的内容后来并没有作为附录收入书中,他解释道:“这本小册子是为此类读者写的:他们想要获得关于拓扑学的至少包含其最重要基本概念的准确知识,但他们并没有条件来系统地学习这门涉及多个方面且不太容易掌握的学科。它本来是计划作为希尔伯特的直观几何讲课的附录,但结果扩展了内容,最后就成了现在的样子。”

“我努力做到,即使在讨论最抽象的问题时也不脱离基本的直觉;与此同时,绝不放弃概念定义的严密性。另一方面,在很多例子中,我几乎都不给出证明,只是满足于指出,所给的例子用于说明什么事情的现状。”

直觉方式的处理是这两本书的一个重要的共同点。希尔伯特在为这本小册子作的序中,很好地解释了拓扑学的重要性和拓扑学中直觉方式的重要性:“近年来,没有多少几何学的分支能像拓扑学那样迅速而成功地发展;更少有分支像拓扑学那样,一开始并不起眼,结果却在那么多完全不同的领域中发挥至关重要的作用……我在我的《直观几何》中试图讨论了空间的观念;而此书将表明,这些观念有多少种推广和改进……生动的直觉一次又一次地成为驱动力量,这一事实形成了直觉与思维之间存在和谐的光辉例子。所以,此书将作为我的《直观几何》关于拓扑学系统知识方面很好的补充而受到欢迎。”

封页上的文字对这个小册子作了很好的描写,此书“精心介绍了(拓扑学的)基本概念,对于没有时间进行广泛研究的数学家和对于初学者都将很有帮助……此书并不是系统教科书的替代品,但它提供了对基本概念非同寻常的、有用的直觉处理。其目的是要以一种清晰、基本而又不失深刻或准确性的方式来呈现这些概念,并说明它们为什么在越来越多的数学领域中是有用的。”

保尔·亚历山德罗夫是一位著名的数学家,在点集拓扑和代数拓扑领域都



做出了重要贡献。本书的其他地方已经介绍了亚历山德罗夫的小册子的特点和他本人的生平,我以下再补充几点。

1915年,21岁的亚历山德罗夫在卢津(Luzin)的指导下,证明了他的第一个研究成果:每个不可数 Borel 集合都包含一个完备子集。卢津被这个聪明弟子的能力印象深刻,就建议他解决第二个问题:证明连续统假设。这是一项注定要失败的工作,因为(直到50年后,才由美国数学家科恩证明)在通常的集合论框架中是无法判定此问题的。亚历山德罗夫当然什么也没有证明。受到挫折的他于是离开数学,来到诺夫哥罗德市的谢威尔斯基镇(Novgorod-Severskii),在一家剧院里做舞台监督。1919年,他曾被逮捕并短暂监禁。因为当时要讲授关于文学和数学的一系列公共课,遂于1919年12月,决定重返莫斯科大学学习数学。他幸运地与乌里松(Pavel Uryson)一起准备硕士生考试,俩人从此建立起深厚的友谊并开始卓有成效的合作。他们的一个主要合作成果是确定了拓扑空间可度量化的必要和充分条件。1923年夏,俩人来到世界数学中心——哥廷根大学,在那里报告了他们的研究成果。他们受到了希尔伯特、克莱因、朗道、诺特和库朗的热情接待。不幸的是,1924年8月,俩人在法国的布列塔尼(Brittany)度假时,乌雷松下海游泳,因天气恶劣而溺死,尽管他是一位非常出色的游泳高手。

在失去了亲密的朋友之后,亚历山德罗夫更加努力地继续研究拓扑学。对于他来说,访问哥廷根大学是非常有成效的。当他于次年夏天再访哥廷根时,希尔伯特请他讲授一般拓扑学课程。1926年,也是在哥廷根,他遇见了霍普夫(Heinz Hopf)。俩人遂于1928年开始,合写被称为“拓扑学圣经”的那本书,该书出版于1935年,培育了几代拓扑学家。容易想象,在亚历山德罗夫某次访问哥廷根期间,希尔伯特请他为自己的《直观几何》写一个简单的拓扑学介绍。(需要指出,当时在哥廷根并没有很好的拓扑学家。)

除了与乌雷松合作,在紧空间、局部紧空间和可度量拓扑空间的研究中获得重要成果外,亚历山德罗夫还奠定了一般拓扑空间的同调论基础。这些一般化的工作与其在《拓扑学的基本概念》这一小册子中对具体空间拓扑的直觉方式处理,形成有趣的对比。他还引进了“正合序列”的概念,这是现代数学中极为基本的概念。亚历山德罗夫也是一位了不起的作者和教师。他写过许多范围广泛的书。他指导了40名博士生,其中包括好几位杰出的数学家,如著名几何学家庞特里亚金(Lev Pontryagin)和吉洪诺夫(Andrei Tikhonov),著名群论专家库洛什(Aleksandr Gennadievich Kurosh)。

1954年起,亚历山德罗夫认识到自己作为数学研究者已过了鼎盛期,遂将大部分时间和精力投入到教育中。据由他的几位朋友为庆祝其80寿辰而写的文章所述:“为了训练这些学生和那些追随他的人,亚历山德罗夫几乎贡献了全部力量。无论是从实际还是从意义上,他对班上听他讲授拓扑学课程的年轻人的影响远不止于纯数学。课程中包括了身体锻炼的内容:或是乘船游玩几天……或是