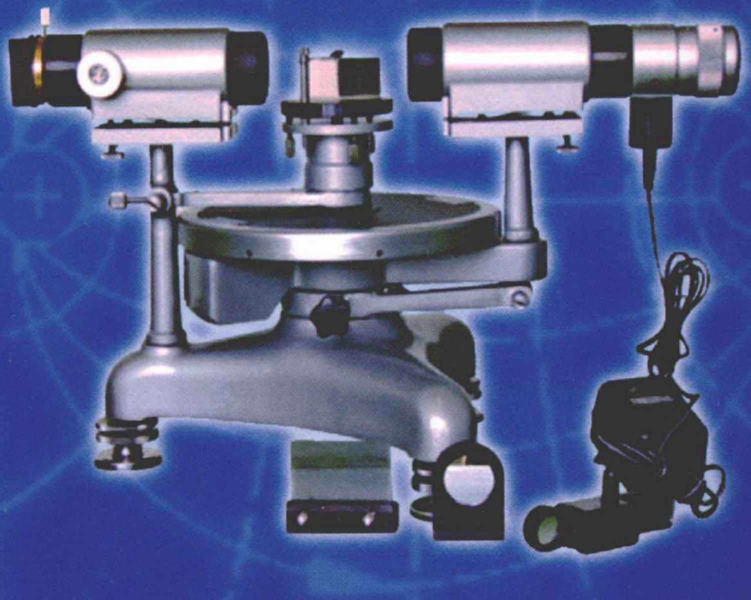
普通高等教育“十二五”规划教材

大学物理实验

主 编 柴丽娜 涂海华



科学出版社

内 容 简 介

本书是为适应普通高等院校非物理专业的大学物理实验课教学而编写的实验教材，精选了力学、热学、电磁学和光学等 30 个实验，并介绍了不确定度与数据处理的基本知识. 书末还附有与实验有关的物理常数和参考材料. 为了便于各院校使用，有的实验介绍了两种或两种以上实验方法及有关的实验仪器和设备.

此外，本书还附有学生实验报告参考模板，使学生更好地明确实验原理，掌握实验方法，完成实验内容，培养学生撰写规范实验报告的习惯. 本书可作为普通高等学校非物理专业大学物理实验课程的教材，也可作为相关人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/柴丽娜，涂海华主编. —北京：科学出版社，2012
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-035343-6

Ⅰ.①大… Ⅱ.①柴…②涂… Ⅲ.①物理学-实验-高等学校-教材
Ⅳ. ①O4-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 192551 号

责任编辑：胡云志 石 悦/责任校对：钟 洋
责任印制：阎 磊/封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http：//www. sciencep. com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012 年 8 月第一次印刷 印张：12 3/4
字数：321 000

定价：23.00 元

《大学物理实验》编委会

主　　编　柴丽娜　北京农学院
涂海华　江西农业大学

副 主 编　周志全　北京电子科技学院
李茂龄　首都经济贸易大学
木明江·依米提　新疆农业大学

参编人员　（按姓氏笔画排序）
王建波　江西农业大学
古丽娜·乌迈尔　新疆农业大学
李　伟　首都经济贸易大学
岳　平　北京电子科技学院
姚　虹　内蒙古农业大学
甄春园　北京电子科技学院
路　阳　北京农学院
熊新农　江西农业大学

前　言

大学物理实验是大学物理课程中的重要组成部分，是培养学生观察能力、实际操作能力的重要手段，也是提高学生整体素质的一个重要环节. 通过物理实验教学，培养学生学习运用理论指导实验，学习分析和解决在实验中所出现问题的方法，从理论和实际的结合上加深对理论知识的理解. 培养学生从事科学实验的初步能力，培养学生实事求是的科学态度，严谨踏实的工作作风，勇于探索、坚忍不拔的钻研精神，以及遵守纪律、团结协作、爱护公物的优良品德.

大学物理实验课是高等院校对学生进行科学实验基本训练的一门必修基础课程，是本科生进入大学以后接受系统实验方法和实验技能训练的开端. 在培养学生的动手能力、分析问题和解决问题的能力以及严谨的科学态度方面起着不可替代的作用.

为了更好地发挥物理实验教学在物理专业中的基础作用，本着以学生为中心的理念，参编人员总结了各自多年讲授大学物理实验的教学经验并综合了各校的实际情况，编写了这本略有特色的教材.

本书精选了力学、热学、电学和光学等 30 个实验，其中基础实验 16 个，近代物理实验、综合性实验和设计性实验 14 个. 书中介绍了不确定度与数据处理的基本知识、基础实验、综合性实验、近代物理和设计实验. 本书的独特之处是实验除配有的思考题供学生预习和总结外，有些实验还在书后附有学生实验报告参考模板. 每个实验都给出了适当数量的预习题和思考题. 预习题一般都紧扣实验的要领，可以促进学生认真准备、积极思考，以保证实验能顺利完成；思考题则可以帮助学生加深对实验的理解，比较深入地进行总结，进而提高学生的综合实验能力. 使学生更好地明确实验原理，掌握实验方法，完成实验内容，避免学生盲目抄写，培养学生撰写规范实验报告的习惯. 有些实验对不确定度与数据处理作了必要的简化，使学生既能掌握不确定度的基本理论，又不至于陷入烦琐的计算之中，真正达到有效的教学. 在保证学生掌握基本实验技能的基础上，增加了实验设计指导的内容，使学生了解实验设计的基本思路和原则，熟悉实验实施的步骤和注意的问题，从而拓展学生的思维，强化和提高学生理论联系实际的能力，进而充分发挥学生的创造性，培养学生的创新能力. 给出的实验设计题目均和所学内容相关，以起到启发思路、抛砖引玉的作用.

为了便于各院校使用，有的实验介绍了两种或两种以上实验方法及有关的实验仪器、设备，既充分利用目前大多数学校的现有设备，又为以后的实验教学提供了参考.

本书由北京农学院、江西农业大学、北京电子科技学院、首都经济贸易大学、新疆农业大学、内蒙古农业大学六所高校教师联合编写. 本书适用于普通高等院校非物理专业的理、工、农、医类各专业的大学物理实验课教学使用，也可作为大学物理实验教学参考用书.

本书在编写过程中，得到了各校有关部门和人员的大力支持和帮助，参阅并借鉴了一些同类教材和相关文献、资料，在此表示衷心的感谢！

由于时间仓促且水平有限，书中难免存在不妥和错误之处，恳请读者批评指正.

编　者

2012 年 6 月

目　　录

第一章　绪　　论

物理学的研究方法通常是在观察和实验的基础上，对物理现象进行分析、抽象和概括，建立物理模型，探索物理规律，进而形成物理学理论. 因此，物理规律是实验事实的总结，而物理学理论的正确与否也需要实验来验证.

物理实验是一门重要的基础课程，也是素质教育的重要环节. 它在培养学生运用实验手段观察、分析、发现、研究和解决问题，进行科学实验基本训练，提高动手能力和科学实验素养等方面都起着重要的作用. 同时，也为学生今后的学习、工作奠定良好的实验基础.

一、物理实验课的目的

通过物理实验教学，可以达到以下三个目的：

（1）通过对物理实验现象的观测和分析，学习运用理论指导实验，学习分析和解决在实验中所出现问题的方法，从理论和实际的结合上加深对物理概念和规律的理解.

（2）培养学生从事科学实验的初步能力. 这些能力是指通过阅读教材或资料，能概括出实验原理和方法的要点；正确使用基本实验仪器，掌握基本物理量的测量方法和实验操作技能；正确记录和处理数据，分析实验结果和撰写实验报告；自行设计和完成某些不太复杂的实验任务等.

（3）培养学生实事求是的科学态度、严谨踏实的工作作风，勇于探索、坚韧不拔的钻研精神以及遵守纪律、团结协作的优良品德.

二、物理实验课的主要教学环节

为达到物理实验课的目的，学生应重视物理实验教学的三个重要环节.

1. 实验预习

课前要仔细阅读实验教材或有关资料，基本弄懂实验所用的原理和方法、主要实验仪器、实验关键点及注意事项；根据实验任务完成预习报告、画好记录数据的表格；有些实验还要求学生课前自拟实验方案，设计线路图或光路图，自拟数据表格等. 因此，实验预习效果的好坏是实验中能否取得主动的关键.

2. 实验操作

学生进入实验室后应遵守实验室规则. 在实验开始前应注意听教师对实验所做的必要讲解，以保证在规定的时间内高质量、安全地完成实验课任务. 实验开始后，学生要井井有条地布置实验仪器，安全操作，注意细心观察实验现象，认真钻研和探索实验中的问题. 在遇到问题时，冷静地分析和处理. 仪器发生故障时，要在教师指导下学习排除故障的方法. 对实验数据要严肃对待，使用钢笔记录原始数据. 实验结束时，将实验数据交教师审阅签字，整理还原仪器后方可离开实验室.

3. 撰写实验报告

实验后要对实验数据及时进行处理. 数据处理过程包括计算、作图、误差分析等，计算要

有计算式，代入的数据都要有根据，便于别人看懂，也便于自己检查；要按作图规则作图，图线要规矩、美观；数据处理后应给出实验结果．最后，要求撰写出一份简洁、明了、工整、有见解的实验报告．实验报告内容主要包括：

（1）实验名称．实验名称明确指出了实验课中需要完成的任务．

（2）实验目的．简要叙述通过实验所达到的对理论知识点的掌握、规律的认识以及实验操作能力的提高等．

（3）实验仪器．简要介绍实验所需主要仪器的名称、规格和型号，列出其他所需材料．

（4）实验原理．简要叙述有关物理内容（包括电路图、光路图或实验装置示意图）及测量中依据的主要公式，公式中各量的物理意义及单位，公式成立所应满足的实验条件等．

（5）实验内容及主要步骤．根据实际的实验过程写明关键步骤和注意事项要点．

（6）实验数据记录与处理．记录中应有完整的实验数据．要完成数据计算、曲线图绘制及误差分析，最后写明实验结果．

（7）实验结论与分析．内容不限，可以是实验现象的分析，对实验关键问题的研究体会，实验的收获和建议，也可解答思考题．

三、实验室规则

（1）学生在课前应完成指定的预习内容，进入实验室需带上预习报告和记录实验数据的表格，经教师检查同意后方可进行实验．

（2）遵守课堂纪律，保持安静的实验环境．

（3）使用电源时，务必经过教师检查线路后才能接通电源．

（4）爱护仪器．进入实验室不能擅自搬弄仪器，实验中应严格按仪器说明书操作，如有损坏，照章赔偿．公用工具用完后应立即归还原处．

（5）做完实验，学生应将仪器整理还原，将桌面和凳子收拾整齐．经教师审查测量数据和仪器还原情况并签字后，方能离开实验室．

（6）要独立完成实验报告，按时交给教师批阅．

第二章　测量误差、不确定度与数据处理

对任何物理量的测量，由于测量仪器、测量方法、测量条件、测量人员等诸多因素的影响，不可避免地存在测量误差. 本章从实验教学的角度出发，主要介绍测量与误差、不确定度评定与测量结果的表示、有效数字及其运算法则、实验数据处理方法等基本知识.

第一节　测量与误差

一、测量及其分类

所谓测量就是将待测物理量与选作计量标准的同类物理量进行比较的全部操作过程. 根据测量方式，测量可分为直接测量和间接测量. **直接测量**是指可直接从仪器或量具上直接读出待测物理量大小的测量. 例如，用米尺测长度，用温度计测温度等都属于直接测量. 有些物理量无法进行直接测量，这样的物理量的量值是由若干个直接测量值经过一定的函数关系运算后才能获得，这样的测量称为**间接测量**. 大多数的物理量都是间接测量值.

根据测量条件是否相同，测量又可分为等精度测量和不等精度测量. 在相同的测量条件下进行的一系列测量是**等精度测量**. 在对某一物理量进行多次测量时，若测量条件完全不同或部分不同，则各次测量结果的可靠程度自然也不同的一系列测量称为**不等精度测量**. 不等精度测量在一般物理实验中很少采用，本书所介绍的误差和数据处理知识都是针对等精度测量的.

二、真值与误差

在一定条件下，任何一个物理量的大小都是客观存在的，都有一个实实在在、不以人的意志为转移的客观量值，称为**真值**. 测量的目的就是要力图得到被测量的真值，但由于受测量方法、仪器、条件以及观测者水平等多种因素的限制，只能获得该物理量的近似值，也就是说，一个被测量值 x 与真值 x_0 之间总是存在着差值 Δx，这种差值称为**测量误差**，即

$$\Delta x = x - x_0 \tag{2-1-1}$$

由测量所得的一切数据，都毫无例外地包含有一定数量的测量误差，没有误差的测量结果是不存在的. 测量误差存在于一切测量之中，贯穿于测量过程的始终. 随着科学技术水平的不断提高，测量误差可以被控制得越来越小，但是却永远不会降低到零.

从式（2-1-1）可以看出，测量误差 Δx 显然有正负之分，因为它是指与真值的差值，常称为**绝对误差**. 一般来讲，真值仅是一个理想的概念，因此绝对误差的概念只有理论上的价值.

测量的**相对误差** E 定义为测量误差的绝对值 $|\Delta x|$ 与真值 x_0 的比值，即

$$E = \frac{|\Delta x|}{x_0} \times 100\% \tag{2-1-2}$$

相对误差常常用百分比来表示.

三、误差的分类

正常测量的误差，按其产生的原因和性质，一般可分为系统误差、随机误差和过失误差三大类.

1. 系统误差

系统误差的特征是在同一条件下多次测量同一量时，误差的大小和方向保持恒定. 它来源于以下几个方面：

（1）由于实验原理和实验方法不完善带来的误差.

（2）由于仪器本身的缺陷或没有按规定条件使用仪器而造成的误差.

（3）由于环境条件变化所引起的误差.

（4）由于观测者生理或心理特点造成的误差.

实验中的系统误差可以通过校准仪器、改进实验装置和实验方法，或对测量结果进行理论上的修正加以消除或尽可能减小. 发现和减小实验中的系统误差是一项复杂的任务，需要对整个实验依据的原理、方法、测量步骤、所用仪器等可能引起误差的因素一一进行分析. 一个实验结果是否正确，往往就在于系统误差是否被发现和尽可能消除，因此，对系统误差不能轻易放过.

2. 随机误差

在极力消除或修正一切明显的系统误差影响之后，在同一条件下多次测量同一物理量时，测量结果仍会出现一些无规律的起伏. 这种在同一量的多次测量过程中，绝对值和符号以不可预知的方式变化着的测量误差分量称为**随机误差**，随机误差有时也称**偶然误差**. 随机误差是由实验中各种因素的微小变动引起的，例如，环境的温度、气压、电场、磁场的微小扰动；读数时，每次对准标志（刻线、指针等）的不一致，以及估读数的不一致；被测对象本身的微小起伏变化等. 这些因素的共同影响使测量结果围绕测量的平均值发生涨落变化，这一变化量就是各次测量的随机误差.

随机误差的出现，就某一次测量而言是没有规律的，但当测量次数足够多时，随机误差服从统计分布规律，可以用统计学方法估算随机误差.

3. 过失误差

实验中，由于实验者操作不当或粗心大意，例如，看错刻度、读错数字、记错数字或计算错误等都会使测量结果明显地被歪曲，这种由于错误引起的误差称为**过失误差**.

过失误差应通过实验者的主观努力予以避免或及时发现并在数据处理时予以剔除. 而系统误差和随机误差是客观的、不可避免的，只能通过实验条件的改善和实验方法的改进予以减小并做出客观的评价.

四、随机误差的分布规律与特性

随机误差的出现，就某一测量值来说是没有规律的，其大小和方向都是不能预知的，但对同一物理量进行多次测量时，则发现随机误差的出现服从某种统计规律. 理论和实践证明，等精度测量中，当测量次数 n 很大时（理论上 n 趋于无穷大），测量值的随机误差多接近于正态分布. 标准化的正态分布曲线如图 2-1-1 所示. 图中横坐标 Δx 表示测量误差，纵坐标表示对应的误差出现的概率密度 $f(\Delta x)$，应用概率论方法可导出

$$f(\Delta x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}} \tag{2-1-3}$$

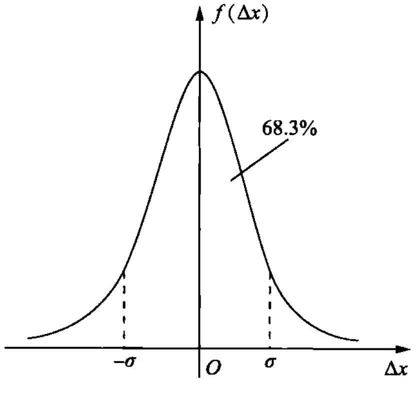


图 2-1-1 随机误差的正态分布

式中，特征量 σ 为**标准误差**.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{n}}\ (n\rightarrow\infty) \tag{2-1-4}$$

式中，n 为测量次数.

服从正态分布的随机误差符合如下特征：

（1）单峰性. 绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大.

（2）对称性. 绝对值相等的正误差和负误差出现的概率接近相等.

（3）有界性. 绝对值很大的误差出现的概率为零，即误差的绝对值不会超过一定的界限.

由概率论可知，概率密度函数 f（Δx）满足下列归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta x)\mathrm{d}(\Delta x)=1 \tag{2-1-5}$$

所以，误差出现在（$-\sigma$，$+\sigma$）区间内的概率 P 就是图 2-1-1 中该区间内 f（Δx）曲线下的面积

$$P(-\sigma<\Delta x<+\sigma)=\int_{-\sigma}^{+\sigma} f(\Delta x)\mathrm{d}(\Delta x)=68.3\% \tag{2-1-6}$$

该积分值可由拉普拉斯积分表查得. 标准误差 σ 与各测量值的随机误差 Δx 有着完全不同的含义. Δx 是实在的误差值，而 σ 并不是一个具体的测量误差值. σ 表示在相同条件下进行一组测量后，随机误差出现的概率分布情况，只具有统计意义，是一个统计特征量，其物理意义为代表测量数据和测量误差分布离散程度的特征数. 图 2-1-2 是不同 σ 值时的 $f(\Delta x)$ 曲线. σ 值小，曲线陡且峰值高，说明测量值的误差集中，小误差占优势，各测量值的分散性小，重复性好. 反之，σ 值大，曲线较平坦，各测量值的分散性大，重复性差.

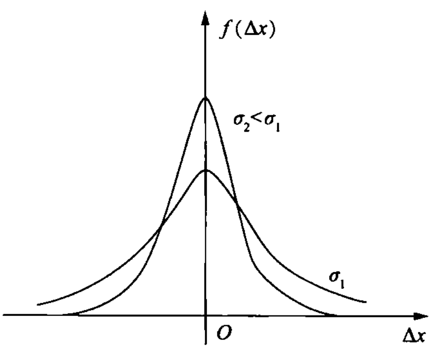


图 2-1-2　不同 σ 的概率密度曲线

式（2-1-6）表明，做任一次测量，随机误差落在（$-\sigma$，$+\sigma$）区间的概率为 68.3%. 区间（$-\sigma$，$+\sigma$）称为**置信区间**，相应的概率称为**置信概率**. 显然，置信区间扩大，则置信概率提高，若置信区间分别取（-2σ，$+2\sigma$）和（-3σ，$+3\sigma$）时，相应的置信概率分别为 $P(2\sigma)=95.4\%$ 和 $P(3\sigma)=99.7\%$. 3σ 的概率含义是在 1000 次测量中只有 3 次测量的误差绝对值会超过 3σ. 由于在一般测量中次数很少超过几十次，因此，可以认为测量误差超出 3σ 范围的概率是很小的，故称 $\delta=3\sigma$ 为**极限误差**. 极限误差一般可作为可疑值取舍的判定标准，也称为剔除坏值标准的 3σ 法则.

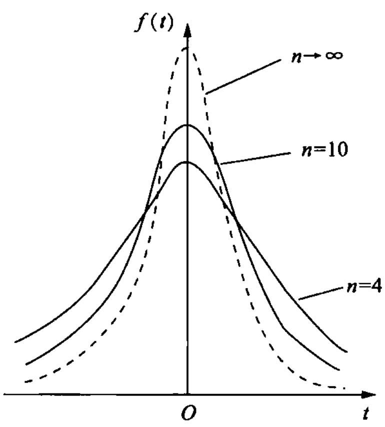


图 2-1-3　t 分布曲线

然而，实际测量总是在有限次内进行，如果测量次数 $n\leqslant 20$，误差分布明显偏离正态分布而呈现 t 分布形式. t 分布函数已算成数表，可在数学手册中查到，t 分布曲线如图 2-1-3 所示. 数理统计中可以证明，当 $n\rightarrow\infty$ 时，t 分布趋近于正态分布（图 2-1-3 中的虚线对应于正态分布曲线）. 由图可见，t 分布比正态分布曲线变低变宽了；n 越小，t 分布越偏离正态分布. 但无论哪一种分布形式，一般都有两个重要的数字特征量，即算术平均值和标准偏差.

五、有限次测量的平均值和标准偏差

设在某一物理量的 n 次等精度测量中，得到测量值为 x_1，x_2，…，x_n. 这 n 个测量值都带有随机误差，首先要解决的问题是从这 n 个测量值的信息中，取怎样的值作为客观真值 x_0 的最佳估计值呢?

解决这个问题是根据最小二乘法原理：一个等精度测量值的最佳估计值是能使各次测量值与该值之差的平方和为最小的那个值. 设这个最佳估计值为 X，则差值平方和 S 可表示成

$$S=\sum_{i=1}^{n}(x_i-X)^2$$

根据最小值存在条件，有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}X}=-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-X)=0$$

从而得到

$$X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x} \tag{2-1-7}$$

所以，测量值的算术平均值 $\bar{x}$ 是真值 x_0 的最佳估计值. 故可以用算术平均值来表示测量结果.

其次，要解决的问题是从这 n 个测量值的信息中，怎样估算随机误差的大小呢? 为此引入残差和标准偏差的概念.

将每一次测量值 x_i 与平均值 $\bar{x}$ 之差 $(x_i-\bar{x})$ 称为**残差或偏差**. 显然，这些残差有正有负，有大有小. 根据误差理论有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

则单次测量的标准偏差 S_x 为

$$S_x=\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{2-1-8}$$

式 (2-1-8) 称为贝塞尔公式. 其意义表示某次测量值的随机误差在 $-\sigma_x$ ～$+\sigma_x$ 之间的概率为 68.3%，也即表示测量值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及其随机误差的离散程度. 标准偏差 S_x（或 σ_x）小表示测量值密集，即测量的精密度高；标准偏差 S_x（或 σ_x）大表示测量值分散，即测量的精密度低. 我们可以用这一标准偏差表示测量的随机误差.

$\bar{x}$ 是被测量的最佳估计值，但它与真值之间仍存在误差. 由随机误差的抵偿性可知，$\bar{x}$ 的误差理应比任何一次单次测量值的误差更小些. 用平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$ 或 $\sigma_{\bar{x}}$ 表示测量算术平均值的随机误差的大小程度，由数理统计可以证明

$$S_{\bar{x}}=\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{2-1-9}$$

由式 (2-1-9) 可知，$S_{\bar{x}}$ 随着测量次数的增加而减小，似乎 n 越大，算术平均值越接近于真值. 实际上，在 $n>10$ 以后，$S_{\bar{x}}$ 的变化相当缓慢. 另外，测量精度主要还取决于仪器的精度、测量方法、环境和测量者等因素，因此在实际测量中，单纯地增加测量次数是没有必要的. 在本书中一般取 n 为 5～10 次.

六、测量的精密度、准确度和精确度

测量的精密度、准确度和精确度，都是评价测量结果的术语，但目前使用时其涵义并不尽一致，以下介绍较为普遍采用的意见.

1. 精密度

精密度是指对同一被测量作多次重复测量时，各次测量值之间彼此接近或分散的程度. 它是对随机误差的描述，反映随机误差对测量的影响程度. 随机误差小，测量的精密度就高.

2. 准确度

准确度是指被测量的总体平均值与其真值接近或偏离的程度. 它是对系统误差的描述，反映系统误差对测量的影响程度. 系统误差小，测量的准确度就高.

3. 精确度

精确度是指各测量值之间的接近程度和其总体平均值对真值的接近程度. 它包括了精密度和准确度两方面的含义，反映随机误差和系统误差对测量的综合影响程度. 只有随机误差和系统误差都非常小，才能说测量的精确度高.

图 2-1-4 所示的打靶情况可较形象地理解精密度、准确度和精确度三者的区别.

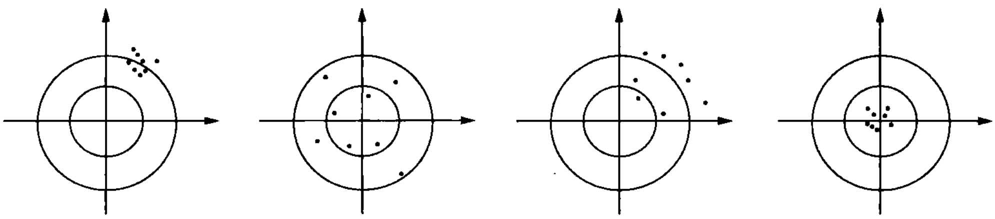


图 2-1-4 精密度、准确度和精确度的区别

第二节 不确定度评定与测量结果的表示

一、测量不确定度的定义

前面我们阐述了误差的概念，了解了什么是系统误差、随机误差和过失误差. 根据误差的定义，由于真值不可能准确地知道，因此测量误差也就不可能确切地用误差来表示. 然而，测量过程中不可避免地存在着各种误差，如何对测量结果的质量和可信度作出科学合理的评定就显得非常重要. 目前，国际上普遍采用不确定度作为测量结果的定量评价指标.

1980 年，国际计量局提出了实验不确定度建议书 INC-1，经过多年努力，1992 年国际计量大会终于制定了具有国际指导性的《测量不确定度表达指南》（以下简称《指南》）. 1993 年，由国际标准化组织（ISO）、国际电工委员会（IEC）、国际法制计量组织（OIML）、国际计量局（BIPM）、国际理论和应用物理联合会（IUPAP）和国际临床化学和实验室医学联盟（IFCC）等国际组织联合发布了《指南》的修订版. 从此，物理实验的不确定度评定有了国际公认的准则.

测量不确定度被定义为被测量的真值以一定概率落在某一量值范围的综合误差指标.

测量值的不确定度由多个分量组成，并且这些分量可用统计方法、概率分布、经验判断等确定. 不确定度反映测量平均值附近的一个范围内，真值以一定概率落在其中. 在相同的置信概率下，不确定度越小，表示测量结果与真值越靠近，测量结果越可靠. 反之，不确定度越大，测量结果与真值的差别越大，它的可靠性越差. 因此，不确定度是测量结果质量好坏的定量评定指标.

例如，某一个被测物理量的不确定度确定后，其测量结果表示为

$$x = \bar{x} \pm u\,(P\text{-置信概率}) \tag{2-2-1}$$

式中，u 为测量值的不确定度，区间 $(\bar{x}-u,\bar{x}+u)$ 为置信区间. 其含义是被测量值的真值以一定的置信概率 P 落在区间 $(\bar{x}-u,\bar{x}+u)$ 内.

二、测量不确定度的分类及评定

测量不确定度分为两类. 一类是用统计分析方法计算的 **A 类不确定度** u_A，如随机误差，可以用标准偏差来表征；另一类是用其他非统计学方法（或经验方法）评定的 **B 类不确定度** u_B，如仪器误差. 各不确定度分量的合成称为**总不确定度**，以 u 表示.

1. 直接测量值不确定度的评定

(1) 多次直接测量值不确定度的评定.

①A 类不确定度评定. 对直接测量来说，如果在相同条件下对某物理量 x 进行了 n 次独立重复测量，其测量值分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 由于多次测量的平均值比一次测量值更准确，随着测量次数的增多，平均值收敛于期望值. 因此，通常以样本的算术平均值 $\bar{x}$ 作为被测量值的最佳值，以平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$ 作为测量结果的 A 类不确定度 u_A. 所以，由式 (2-1-9) 有

$$u_A = S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2} \tag{2-2-2}$$

②B 类不确定度评定. B 类不确定度在测量范围内无法用统计方法评定，一般可根据经验或其他有关信息进行估计. 从物理实验的实际出发，一般只考虑由仪器误差影响引起的 B 类不确定度 u_B. B 类不确定度与仪器误差 $\Delta_{仪}$ 之间的关系可写为

$$u_B = \frac{\Delta_{仪}}{C} \tag{2-2-3}$$

式中，C 为置信概率 $P=0.683$ 时的置信系数. 如果仪器的误差概率分布服从正态分布、均匀分布或三角分布，则对应的 C 分别为 3、$\sqrt{3}$、$\sqrt{6}$. 在缺乏信息的情况下，对大多数普通物理实验测量来说，可以认为一般仪器的误差概率分布函数服从均匀分布，即 $C=\sqrt{3}$，所以一般 B 类不确定度可简化计算为

$$u_B = \frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}} \tag{2-2-4}$$

③总不确定度评定. 被测量总不确定度 u 按"方和根"的原则，为 A 类不确定度和 B 类不确定度的合成，即

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \tag{2-2-5}$$

评价测量结果，也常常给出相对不确定度，相对不确定度 E 常用百分数表示，即

$$E = \frac{u}{\bar{x}} \times 100\% \tag{2-2-6}$$

（2）单次直接测量值不确定度的评定．在物理实验中，由于条件不许可或测量准确度要求不高等原因，对一个物理量只进行了一次直接测量，这时不能用统计方法求标准偏差，则不确定度计算可简化为

$$u_A = 0 ,\quad u = u_B = \frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}} ,$$

严格地说，单次测量中除了仪器本身的不确定度外，测量的不确定度依然存在，有时甚至很大，其影响因素各不相同．如果对实验的要求严格，这时可根据经验或其他有关信息进行估计，计入不确定度中．

2. 间接测量值不确定度的评定

在科学实验和生产实践中，常有许多被测量不能进行直接测量，因而要进行间接测量．这样，由于直接测量结果的不确定度而导致间接测量值也具有不确定度，这种影响称为**不确定度的传递**．因为不确定度是微小量，故可借助微分方法来研究．

设 N 为间接测量值，且有 $N = f(x,y,z,\cdots)$，其中 $x,y,z,\cdots$ 是彼此独立的直接测量值，设 $x,y,z,\cdots$ 的不确定度分别为 $u_x,u_y,u_z,\cdots$ 由于不确定度都是微小的量，相当于“增量”，因此，间接测量值不确定度的计算公式与数学中全微分公式基本相同．考虑到用不确定度代替全微分，以及不确定度合成的统计性质，在物理实验中可以用以下两式简化计算间接测量值 N 的不确定度 u_N 和相对不确定度 E_N．

$$u_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}u_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}u_z\right)^2 + \cdots} \tag{2-2-7}$$

$$E_N = \frac{u_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}u_y\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}u_z\right)^2 + \cdots} \tag{2-2-8}$$

当间接测量所依据的数学公式较为复杂时，计算不确定度的过程也较为烦琐．如果间接测量值 N 是各直接测量值 $x,y,z,\cdots$ 的和差函数，则利用式（2-2-7）来计算 u_N 比较方便；如果间接测量值 N 是各直接测量值 $x,y,z,\cdots$ 的积或商函数，则利用式（2-2-8）先计算 N 的相对不确定度 E_N，然后通过相对不确定度再计算 u_N 比较方便．表 2-2-1 为部分常用函数的不确定度计算公式．

表 2-2-1　部分常用函数的不确定度计算公式

函数式	不确定度计算公式
$N = x \pm y$	$u_N = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
$N = x \cdot y$ 或 $N = x/y$	$E_N = \frac{u_N}{N} = \sqrt{(\frac{u_x}{x})^2 + (\frac{u_y}{y})^2} \times 100\%$
$N = kx$　（k 为常数）	$u_N = k \cdot u_x$，$E_N = \frac{u_N}{N} = \frac{u_x}{x} = E_x$
$N = x^n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$	$E_N = \frac{u_N}{N} = n\frac{u_x}{x} \times 100\%$
$N = \sqrt[n]{x}$	$E_N = \frac{u_N}{N} = \frac{1}{n}\frac{u_x}{x} \times 100\%$
$N = \frac{x^k y^m}{z^n}$	$E_N = \frac{u_N}{N} = \sqrt{k^2(\frac{u_x}{x})^2 + m^2(\frac{u_y}{y})^2 + n^2(\frac{u_z}{z})^2} \times 100\%$
$N = \sin x$	$u_N = \lvert\cos x\rvert u_x$
$N = \ln x$	$u_N = \frac{1}{x}u_x$

例 2.1 采用感量为 0.1g 的物理天平称量某物体的质量，其读数值为 35.41g，求物体质量的测量结果.

解：采用物理天平称物体的质量，重复测量读数值往往相同，故一般只需进行单次测量即可. 单次测量的读数即为近似真实值，$m=35.41\text{g}$.

物理天平的“示值误差”通常取感量的一半，并且作为仪器误差，即

$$u_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=\frac{0.05}{\sqrt{3}}=0.03\ (\text{g})$$

测量结果为：$m=(35.41\pm0.03)\text{g}\quad(P=68.3\%)$.

在本例中，因为是单次测量（$n=1$），总不确定度 $u=\sqrt{u_A^2+u_B^2}$ 中的 $u_A=0$，故 $u=u_B$，即单次测量的总不确定度等于 B 类不确定度. 但是这个结论并不表明单次测量的 u 就小，因为 $n=1$ 时，S_x 发散. 其随机分布特征是客观存在的，测量次数 n 越大，置信概率就越高，因而测量的平均值就越接近真值.

例 2.2 用螺旋测微计测量某圆柱体的直径 D，零点误差为 0.000（mm）. 测量数据见表 2-2-2，求直径 D 的算术平均值、标准偏差和不确定度，并写出测量结果.

表 2-2-2 测量数据记录表

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_i/mm	18.003	18.000	17.998	17.994	18.002	18.005	17.998	18.005	17.999	18.001

解：（1）直径 D 的算术平均值为

$$\overline{D}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}D_i=18.000(\text{mm})$$

（2）螺旋测微计的仪器误差为 $\Delta_{仪}=0.004$（mm），计算 B 类不确定度为

$$u_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=0.002(\text{mm})$$

（3）计算 A 类不确定度为

$$u_A=S_{\overline{D}}=\sqrt{\frac{1}{10(10-1)}\sum_{i=1}^{10}(D_i-\overline{D})^2}=0.001(\text{mm})$$

（4）计算总不确定度为

$$u_D=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=\sqrt{0.001^2+0.002^2}=0.003(\text{mm})$$

所以，测量结果为

$$D=(18.000\pm0.003)\text{mm}\qquad(P=68.3\%)$$
$$E=0.011\%$$

计算结果表明，D 的真值以 68.3%的置信概率落在（17.997mm，18.003mm）区间内.

例 2.3 已知某铜环的外径 $D=(2.995\pm0.006)\text{cm}$，内径 $d=(0.997\pm0.003)\text{cm}$，高度 $H=(0.9516\pm0.0005)\text{cm}$. 试求该铜环的体积及其不确定度，并写出测量结果表达式.

解：$\overline{V}=\frac{\pi}{4}(\overline{D}^2-\overline{d}^2)\overline{H}=\frac{3.1416}{4}(2.995^2-0.997^2)\times0.9516=5.961(\text{cm}^3)$

对 $V=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)H$ 两边取对数，得

$$\ln V = \ln\frac{\pi}{4} + \ln(D^2 - d^2) + \ln H$$

则

$$\frac{\partial \ln V}{\partial D} = \frac{2D}{D^2 - d^2},\ \frac{\partial \ln V}{\partial d} = -\frac{2d}{D^2 - d^2},\ \frac{\partial \ln V}{\partial H} = \frac{1}{H}$$

因此，相对不确定度为

$$E_V = \frac{u_V}{V} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln V}{\partial D}u_D\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln V}{\partial d}u_d\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln V}{\partial H}u_H\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\times 2.995}{2.995^2 - 0.997^2}\times 0.006\right)^2 + \left(\frac{2\times 0.997}{2.995^2 - 0.997^2}\times 0.003\right)^2 + \left(\frac{0.0005}{0.9516}\right)^2}$$

$$= 0.0046 = 0.46\%$$

总不确定度为

$$u_V = E_V \cdot \bar{V} = 0.0046\times 5.961 = 0.03(\mathrm{cm}^3)$$

测量结果为

$$V = (5.96 \pm 0.03)\ \mathrm{cm}^3 \qquad (P = 68.3\%)$$

由于不确定度本身只是一个估计值，因此，在一般情况下，表示最后结果的不确定度只取一位有效数字，最多不超过两位（首位为 1 或 2 时保留两位）. 在本课程实验中，为了方便统一，不确定度只取一位有效数字，尾数采用“只入不舍”的原则，在运算过程中只需取两位数字计算即可，最后结果中测量值的末位数与不确定度的所在位数对齐，且两者的数量级和单位要相同. 相对不确定度取一位或两位有效数字.

三、不确定度与误差的关系

不确定度和误差是两个不同的概念，它们有着根本的区别，但又是相互联系的. 不确定度和误差都是由测量过程的不完善引起的，而且不确定度概念和体系是在现代误差理论的基础上建立和发展起来的. 根据传统误差的定义，误差是一个理想的概念. 而不确定度则是表示由于测量误差的存在而对被测量值不能确定的程度，反映了可能存在的误差分布范围，表征被测量真值所处量值范围的评定，所以不确定度能更准确地用于测量结果的表示.

应当指出，不确定度概念的引入并不意味着“误差”一词需放弃使用. 实际上，误差仍可用于定性描述. 而在具体计算和表示计算结果时，应改用不确定度.

第三节　有效数字及其运算法则

一、有效数字的基本概念

测量值总有不确定度，即对任何一个物理量的测量结果总是有误差，测量值的位数不能任意取舍，要由不确定度来决定，即测量值的末位数要与不确定度的末位数对齐.

在表示测量结果的数字中，一般只保留一位欠准确数，即数字的最后一位为欠准确数，其余均为准确数. 正确而有效地表示测量和实验结果的数字称为**有效数字**，它是由所有准确数字和一位欠准确数字构成的，这些数字的总位数称为**有效位数**. 有效位数的多少，直接反映了测量的准确度. 对同一物理量进行测量时，有效数字位数越多，测量准确度就越高.