

東北人民政府教育部編譯

# 高中三角習題

東北人民出版社

# 高中三角習題

## 目 錄

### 第 一 章

### 三 角 學

§ 1. 角與弧的量的法	( 1 )
§ 2. 隨角的變化而變化的三角函數	( 2 )
§ 3. 同角三角函數間的相互關係	( 6 )
§ 4. 餘角及補角的函數	( 11 )
§ 5. 三角函數真數表	( 12 )
§ 6. 直角三角形解法	( 14 )
§ 7. 斜三角形解法	( 23 )
§ 8. 誘導公式	( 27 )
§ 9. 加法定理	( 30 )
§ 10. 倍角與半角的函數	( 33 )
§ 11. 化三角函數的代數和為乘積的形式・輔助角	( 38 )
§ 12. 利用對數表解三角算式及求角	( 43 )
§ 13. 利用對數解斜三角形	( 47 )
§ 14. 三角方程式	( 50 )
§ 15. 反三角函數	( 55 )

### 第 二 章

### 幾何習題的三角解法

§ 16. 平面幾何學	( 59 )
-------------	--------

§ 16.	直線與平面	( 61 )
§ 17.	二面角與多面角	( 64 )
§ 18.	圖形在平面上射影的面積	( 63 )
§ 19.	平行六面體・角柱・角錐及其面積	( 69 )
§ 20.	圓柱・圓錐・圓錐台及其面積	( 74 )
§ 21.	體積之計算	( 78 )
§ 22.	球及其部分	( 84 )
§ 23.	迴轉體	( 87 )
	三角函數表	( 92 )
	答 案	( 93 )

# 第一章

## 三角學

### § 1. 角與弧的量法.

角與弧的一般概念

✓ 1. 一時鐘走了四小時，問時針、分針各轉若干度？ $(-120^\circ, -1440^\circ)$

2. 一機器輪 2 秒鐘旋轉 6 週，問 1 秒鐘及 10 秒鐘該輪旋轉若干度？

3. 一齒輪有齒 72 個，如果該齒輪旋轉 1, 30, 144, 300 次時，每個齒輪各轉若干度？

4. 試畫出： $+45^\circ, -30^\circ, +225^\circ, -135^\circ, -90^\circ, +450^\circ, -810^\circ, +2070^\circ$  的動徑，又在以上各角中，那些角的動徑相重？

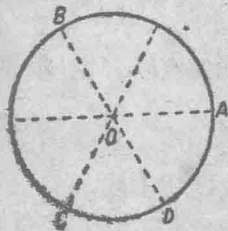


圖 1

5. 將下列各弧之和用度數表示之：

$\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CDA}$  (圖 1).

6. 設動徑為 1)  $OB$ , 2)  $OD$  (圖 1), 試寫出角的一般形式，並求出各角的值。

弧度法

7. 1) 圓的半徑為  $5\text{cm}$ ，試求  $18^\circ$  的弧長。

2) 設圓的半徑為  $R$ ，試求  $\alpha^\circ$  的弧長。

8. 1) 下列各弧用弧度法，以  $\pi$  表示之：

9. 1)  $\approx 85^{\circ}57'$ ,  $\approx 114^{\circ}35'$ ,  $\approx 42^{\circ}58'$ ,  $30^{\circ}$ ,  $120^{\circ}$ ,  $270^{\circ}$ ,

$22^{\circ}30'$ ,  $135^{\circ}$ ,  $216^{\circ}$ .

2)  $40^{\circ}$ ,  $75^{\circ}$ ,  $133^{\circ}$ ,  $57^{\circ}42'$ ,  $218^{\circ}$ ,  $27^{\circ}30'$ ,  $74^{\circ}20'$ ,  $45^{\circ}50'$ .

a)  $30'$ , b)  $45^{\circ}$ , c)  $60^{\circ}$ , d)  $135^{\circ}$ , e)  $15^{\circ}$ , f)

$22^{\circ}30'$ , g)  $36^{\circ}$ , h)  $75^{\circ}$ , i)  $108^{\circ}$ , k)  $150^{\circ}$ , l)  $157^{\circ}30'$ ,  
m)  $162^{\circ}$ .

2) 用弧度表示下列各值: a)  $51^{\circ}$ , b)  $27^{\circ}$ , c)  $76^{\circ}$   
 $30'$ , d)  $12^{\circ}30'$ , e)  $28^{\circ}42'$ , f)  $73^{\circ}21'$ , g)  $117^{\circ}$ , h)  $216^{\circ}$   
 $13'$  ( $\pi \approx 3.14159$ ).

3) 以弧度表示正三角形、正四角形、正五角形、正六角形及正  $n$  角形的內角。( $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3}{5}\pi$ ,  $\frac{2}{3}\pi$ ,  $\frac{\pi(n-2)}{n}$ )

9. 1) 試將  $1.5$ 、 $2$ 、 $0.75$ 、 $\frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{2}{3}\pi$ 、 $1\frac{1}{2}\pi$ 、 $\frac{\pi}{8}$ 、 $\frac{3}{4}\pi$  及  $1\frac{1}{5}\pi$  弧度的角，用度和分表示之 ( $\pi \approx 3.14159$ )。

2) 試將下列以弧度表示之角用度表示之 (利用三角函數表):  $0.6981$ ,  $1.3090$ ,  $0.2356$ ,  $1.0071$ ,  $3.8048$ ,  $0.48$ ,  $1.3$ ,  $0.8$ 。

角速度

10. 設飛輪之半徑為  $1.2$  米，每分鐘旋轉  $300$  次：

1) 試求飛輪每秒之角速度  $\omega$  (角速度以弧度/秒表示之); ( $10\pi \approx 31.4$ )

2) 試求距輪心  $20\text{cm}$  之點的速度; ( $\approx 6.28$  米/秒)

3) 試求輪周上一點的速度; ( $\approx 37.68$  米/秒)

4) 試證距輪心為  $r$  之點的速度為  $r\omega$ 。

11. 一軸的角速度為  $21$  弧度/秒，試求一分鐘旋轉的次數。

## § 2. 隨角的變化而變化的三角函數。

1. 在那一象限內三角函數全是正值? 有沒有三角函數全是負值的象限?

2. 三角形的內角，在什麼情形之下，有那幾種三角函數是負值？

3. 三角形內角的半角函數是什麼符號？

4.  $1 + \sin x$  的和變化之區間如何？

5. 在下列等式中，那個能够成立？

1)  $\sin a = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(a+b)}$ ,    2)  $\cos \beta = a + \frac{1}{a}$ ,

3)  $\sec \alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ .

6.  $\frac{\cos \alpha}{\sec \alpha}$  能不能得負值？

化簡 7—13 各題：

7.  $a \cdot \sin 0^\circ + b \cdot \cos 90^\circ + c \cdot \tan 180^\circ$ .

8.  $a \cdot \tan 0^\circ + b \cdot \cot 90^\circ + c \cdot \sec 0^\circ$ .

9.  $a \cdot \cos 0^\circ + b \cdot \cos 180^\circ + c \cdot \cos 360^\circ$ .

10.  $a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2ab \cdot \sec \pi - b^2 \cdot \sin \frac{3}{2}\pi$ .

11.  $a^2 \cdot \csc 90^\circ - 2ab \cdot \sin 180^\circ + b^2 \cdot \csc 270^\circ$ .

12.  $a^2 \cdot \sin 2\pi + 2ab \cdot \cos \frac{3}{2}\pi + b^2 \cdot \tan 2\pi$ .

13.  $a^3 \cdot \cot 270^\circ + b^3 \cdot \tan 90^\circ$ .

14. 試在半徑為 5cm 的圓內，作出下列各角： $30^\circ$ ， $120^\circ$ ， $225^\circ$ ， $-30^\circ$ ， $-120^\circ$ ， $-560^\circ$ ，並作出這些角的四條函數線（使其誤差小於 1mm），再求下列各函數的值（誤差小於 0.1）：1)  $\tan 30^\circ$ ，2)  $\cos 120^\circ$ ，3)  $\sin 225^\circ$ ，4)  $\cos(-30^\circ)$ ，5)  $\tan(-120^\circ)$ ，6)  $\cot(-560^\circ)$ 。

15. 指出下列各函數差的符號：

✓1)  $\sin 20^\circ - \sin 21^\circ$ ,    ✓2)  $\cos 20^\circ - \cos 21^\circ$ ,

(-)

(+)

- $\checkmark$  3)  $\tan 20^\circ - \tan 21^\circ$ ,  $\checkmark$  4)  $\cot 20^\circ - \cot 21^\circ$ ,  
 5)  $\cos 20^\circ - \cos 120^\circ$ , 6)  $\sin 120^\circ - \sin 240^\circ$ ,  
 7)  $\tan 120^\circ - \tan 40^\circ$ , 8)  $\cot 30^\circ - \cot 130^\circ$ .

16. 求下列每組函數中，那一個函數值大？

- 1)  $\cos 20^\circ$ , 2)  $\sin 50^\circ$ , 3)  $\cot 40^\circ$ , 4)  $\tan 50^\circ$   
 $\checkmark$  1)  $\sin 20^\circ$  或  $\cos 20^\circ$ ,  $\checkmark$  2)  $\sin 50^\circ$  或  $\cos 50^\circ$ ,  
 $\checkmark$  3)  $\tan 40^\circ$  或  $\cot 40^\circ$ ,  $\checkmark$  4)  $\tan 50^\circ$  或  $\cot 50^\circ$ .

角的作圖  
及求法

17. 試作正弦為：1) 0.6, 2)  $-\frac{1}{2}$  之角，並求其值（使誤差小於  $1^\circ$ ）。

18. 試作餘弦為：1)  $\frac{2}{3}$ , 2)  $-0.4$  之角。

19. 試作正切為：1)  $+1.5$ , 2)  $-1$  之角。

20. 試作餘切為：1)  $-2$ , 2)  $+1$  之角。

21. 由下列各角  $x$  的一般形式，寫出小於  $360^\circ$  ( $2\pi$ ) 的正值：

1)  $x = 15^\circ + 120^\circ \cdot n$ , 2)  $x = -60^\circ + 360^\circ \cdot n$ ,

3)  $x = -10^\circ + 60^\circ \cdot n$ , 4)  $x = \pm 120^\circ + 720^\circ \cdot n$ ,

5)  $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n$ , 6)  $x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$ ,

7)  $x = (-1)^n \cdot 45^\circ + 180^\circ \cdot n$ , 8)  $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} \pm \pi \cdot n$ .

22. 試寫出下列各函數式的一般形式，並用作圖及測量的方法求角（誤差小於  $1^\circ$ ）：

1)  $\tan x = 2.6$ , 2)  $\tan x = -0.8$ ,

3)  $\cos x = 0.9$ , 4)  $\cos x = -\frac{2}{3}$ ,

5)  $\sin x = 0.25$ , 6)  $\sin x = -\frac{5}{7}$ .

試求 23—31 各方程式中的三角函數值並作角：

2)  $\sin^{-1}(-1) = 180^\circ$  或  $270^\circ$   
 (或  $\sin x = -1$ )

23.  $\sin^2 x - 3 = 2 \sin x$ .      24.  $\cos^2 x + \cos x = 1$ .

25.  $6 \sin^4 x = 1 - \sin^2 x$ .      26.  $\sin^2 x = 2 \sin x$ .

27.  $\tan^2 x = 2 \tan x$ .      28.  $\sec^2 x = 2 \sec x$ .

29.  $\cot^3 x + 4 \cot x = 0$ . (或  $\cot x = 0$ )      30.  $\frac{2}{1 + \tan x} = 0$ .

31.  $(\cos x - 2)(2 \csc x + 1) = 0$ . (不可解)

反三角函數

32. 以反三角函數表示下列方程式中之  $x$ 。

1)  $\tan x = m$ ,    2)  $\cos x = m$ ,    3)  $\sin x = m$ .

在此三個方程式中， $m$  可以為何數？

33. 用反三角函數表示下列各式：

1)  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ,      2)  $\sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

3)  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,      4)  $\cos 90^\circ = 0$ ,

5)  $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$ ,    6)  $\tan 0^\circ = 0$ ,

7)  $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ ,    8)  $\cot 45^\circ = 1$ ,

9)  $\sin x = 0.23$ ,      10)  $\cos x = 0.5762$ ,

11)  $\tan x = 0.468$ ,    12)  $\cot x = 1.237$ .

34. 試用函數表查出下列各角的度數及弧度：

1)  $\text{arc sin } 0.7314$ ,    2)  $\text{arc cos } 0.3987$ ,

3)  $\text{arc tan } 3.677$ ,    4)  $\text{arc cot } 0.5117$ .

35. 試求方程式中  $x$  的值：

1)  $\text{arc sin } x = \frac{\pi}{4}$ ,    2)  $\text{arc cos } x = \frac{\pi}{6}$ ,

3)  $\text{arc tan } x = \frac{\pi}{3}$ ,    4)  $\text{arc sin } \frac{x}{3} = \alpha$ ,



5)  $\text{arc cos } \frac{x}{a} = \frac{b}{c},$

6)  $\text{arc tan } \frac{1}{x} = a.$

36. 作出下列各角：

1)  $\text{arc sin } 0.8,$

2)  $\text{arc sin } (-\frac{1}{3}),$

3)  $\text{arc cos } \frac{2}{3},$

4)  $\text{arc cos } (-0.75),$

5)  $\text{arc tan } \frac{1}{2},$

6)  $\text{arc tan } (-1.5),$

7)  $\text{arc tan } 1.2,$

8)  $\text{arc cot } (-0.6),$

9)  $\text{arc sec } 1\frac{1}{2},$

10)  $\text{arc csc } (-2).$

§ 3. 同角三角函數間的相互關係。

試用下列之已知函數表示角  $\alpha$  之其餘各函數：

1.  $\sin \alpha.$

2.  $\cos \alpha.$

3.  $\tan \alpha.$

4.  $\cot \alpha.$

試由下列之已知函數求出角  $\alpha$  之其餘各函數：

✓5.  $\sin \alpha = 0.8.$

6.  $\sin \alpha = -0.3.$

✓7.  $\cos \alpha = \frac{2}{3}.$

8.  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}.$

✓9.  $\tan \alpha = \sqrt{5}.$

10.  $\tan \alpha = -\frac{9}{40}.$

✓11.  $\cot \alpha = \frac{8}{15}.$

12.  $\cot \alpha = -3.$

✓13.  $\sec \alpha = 3.$

14.  $\sec \alpha = -1\frac{9}{20}.$

✓15.  $\csc \alpha = 2.6.$

16.  $\csc \alpha = -\sqrt{3}.$

設  $a < b < a$ ，試由下列之角  $\alpha$  的已知函數求其他各函數 (17-19)：

17.  $\sin \alpha = \frac{a-b}{a+b}.$

18.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$

19.  $\tan \alpha = \frac{a}{b}.$

試求出角  $\alpha$  的其他各函數，若：

20.  $\alpha$  爲正銳角，且  $\tan \alpha = 4\frac{19}{20}$ .

21.  $\alpha$  爲三角形的內角，且  $\cos \alpha = -0.28$ .

22.  $\alpha$  爲第三象限內的角，且  $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ .

23.  $\alpha$  爲第四象限內的角，且  $\cot \alpha = -1.05$ .

化簡24—52各題：

24.  $1 - \sin^2 \alpha$ ,

25.  $1 - \cos^2 \alpha$ ,

26.  $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$ ,

27.  $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - 1}$ ,  $(-(1 + \sin \alpha))$

28.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha$ , 29.  $\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .

30. a)  $\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$ , b)  $\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$ .

31. a)  $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$ ,  $(\cot^2 \alpha)$  b)  $\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - 1}$ .  $(\tan^2 \alpha)$

32.  $\sin \alpha \cdot \cot \alpha$ ,

33.  $\cos \alpha \cdot \tan \alpha$ ,

34.  $\tan \alpha \cdot \csc \alpha$ ,

35.  $\sin \alpha \cdot \sec \alpha$ .  $(\tan \alpha)$

36.  $\cos \alpha \cdot \csc \alpha$ ,

37.  $\cot \alpha \cdot \sec \alpha$ .

38.  $\sin \alpha \div \tan \alpha$ ,

39.  $\tan \alpha \div \cot \alpha$ .  $(\tan^2 \alpha)$

40.  $1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ ,

41.  $1 - \sin^2 \alpha + \cot^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$ .

42.  $(1 + \tan^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha$ .

43.  $(\tan \alpha \cdot \cos \alpha)^2 + (\cot \alpha \cdot \sin \alpha)^2$ .  $(1)$

44.  $(\tan \alpha \cdot \csc \alpha)^2 - 1$ .

45.  $\sin^2 \alpha \cdot \sec^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ .

46.  $\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \cdot \tan \alpha \cdot \cot \beta + 1$ .

47.  $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta + 1$ .  $(\csc^2 \beta)$

$$48. \frac{1 - \sin^2 a}{1 - \cos^2 a} + \tan a \cdot \cot a.$$

$$49. \frac{\sin a + \cos a}{\sec a + \csc a}.$$

$$50. \sqrt{\frac{\tan a + \tan \beta}{\cot a + \cot \beta}} \cdot (\tan a \tan \beta)$$

$$51. \sqrt{(\tan a + \cot a)^2 - (\tan a - \cot a)^2}. \quad (4)$$

$$52. \frac{\cos^2 a - \cot^2 a}{\sin^2 a - \tan^2 a}.$$

53. 試用 a)  $\sin a$  及 b)  $\cos a$  表示  $\sin^2 a - \cos^2 a$ .

54. 試用  $\sin a$  及  $\cos a$  表示  $\tan a + \cot a$ .

55. 試用  $\tan a$  表示  $\frac{\cot a + \tan a}{\cot a - \tan a}$ .

56. 試用  $\cot a$  表示  $\frac{\tan a}{1 - \tan^2 a}$ .

57. a) 用  $\tan a$  及 b) 用  $\cot a$  表示  $\frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a}$ .

58. a) 用  $\tan a$  及 b) 用  $\cot a$  表示  $\frac{\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a - \sin^2 a}$ .

59. 設  $a$  為第四象限內的角，試以  $\cot a$  表示  $\sec a$ .

60. 設  $\tan a = \frac{5}{4}$ ，試求  $\frac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a}$  的值。 (9)

61. 設  $\sin a + \cos a = m$ ，試求  $\sin a \cos a$  的值。

62. 設  $\tan a + \cot a = m$ ，試求  $\tan^2 a + \cot^2 a$  及  $\tan^3 a + \cot^3 a$  的值。 ( $m^2 - 2$  及  $m^3 - 3m$ )

試證明下列恒等式 (63-92)：

$$63. \sin^4 a - \cos^4 a = \sin^2 a - \cos^2 a.$$

$$64. \frac{\sin a}{1 - \cos a} = \frac{1 + \cos a}{\sin a}.$$

$$65. \frac{\sec a - 1}{\tan a} = \frac{\tan a}{\sec a + 1}.$$

$$66. \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha.$$

$$67. \tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \csc^2 \alpha.$$

$$68. \frac{\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \cdot \csc^2 \alpha.$$

$$69. \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \cdot \tan \beta.$$

$$70. \sqrt{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \csc \alpha}} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$71. \sqrt{\frac{\sin \alpha + \cot \alpha}{\tan \alpha + \csc \alpha}} = \sin \alpha \cdot \cot \alpha.$$

$$72. \frac{\sec \alpha \cdot \cot \alpha - \csc \alpha \cdot \tan \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sec \alpha \cdot \csc \alpha.$$

$$73. \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sec \alpha + \csc \alpha}{\sec \alpha - \csc \alpha}.$$

$$74. \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \sec \alpha}{1 + \csc \alpha}} = \tan \alpha.$$

$$75. \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \div \frac{1 + \sec \alpha}{1 + \csc \alpha} = \cot^2 \alpha.$$

$$76. \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \frac{\cot^2 \alpha - 1}{\cot \alpha} = 1.$$

$$77. \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = 1.$$

$$78. \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\sec^2 \alpha - 1} + \frac{\cos^2 \alpha}{\csc^2 \alpha - 1}} = 1.$$

$$79. \csc \alpha - \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \cot \alpha.$$

$$80. \tan \alpha + \cot \alpha = \sec \alpha \cdot \csc \alpha.$$

$$81. \sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha = \sec^2 \alpha \cdot \csc^2 \alpha.$$

$$82. \sqrt{\sec^2 \alpha (\csc^2 \alpha - 1)} = \csc^2 \alpha.$$

$$83. 1 + \sin a + \cos a + \tan a = (1 + \cos a)(1 + \tan a).$$

$$84. (\sin a - \csc a)(\cos a - \sec a) = \sin a \cdot \cos a.$$

$$85. (\sin a + \tan a)(\cos a + \cot a) = (1 + \sin a)(1 + \cos a).$$

$$86. \sqrt{\sin a(1 + \tan a) + \cos a(1 + \cot a)} = \sec a + \csc a.$$

$$87. \sin^3 a(1 + \cot a) + \cos^3 a(1 + \tan a) = \sin a + \cos a.$$

$$88. \tan^3 a \csc^2 a - \csc a \sec a + \cot^3 a \sec^2 a = \tan^3 a + \cot^3 a.$$

$$89. \sec^2 a + \csc^2 a = (\tan a + \cot a)^2.$$

$$90. \sqrt{\left(\frac{\sin a + \tan a}{\csc a + \cot a}\right)^2} = \frac{\sin^2 a + \tan^2 a}{\csc^2 a + \cot^2 a}.$$

$$91. \tan^2 a - \sin^2 a = \tan^2 a \cdot \sin^2 a.$$

$$92. \sqrt{\left(\sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} - \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}}\right)^2} = 4 \tan^2 a.$$

解下列各方程式 (93—113)，並按方程式中函數的  
值，用量角器作其對應角 (誤差小於  $1^\circ$ )，然後將角用一  
般形式表示之：

$$93. \sin^2 x = 1 + \cos^2 x.$$

$$94. \sin x \cdot \tan x = \frac{3}{2}.$$

$$95. \sin x = \cot x.$$

$$96. \sqrt{\cos x - 1} + 2 \sin x \cdot \tan x = 0. \quad (360^\circ \pi)$$

$$97. \sin^2 x + \cos x = 0.$$

$$98. \sec x = \tan^2 x.$$

99.  $2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2.$
100.  $\sqrt{\tan x - \cot x} = \frac{3}{2}. (\approx 63^\circ + 180^\circ n \text{ 或 } \approx -27^\circ + 180^\circ n)$
101.  $\cos x = 2 \tan x.$
102.  $\csc x - \sin x = \frac{1}{2} \cot x.$
103.  $2 \tan x = -3 \csc x.$
104.  $2 \sec x = \csc x. (\approx 27^\circ + 180^\circ n)$
105.  $2 \cos^2 x + 4 \sin^2 x = 3.$
106.  $2 (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1.$
107.  $\sin^4 x - \cos^4 x = 0.5. (\pm 60^\circ + 180^\circ n)$
108.  $1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x = 0. (360^\circ n \text{ 或 } 90^\circ + 360^\circ n)$

解下列正弦及餘弦的齊次方程式；或化爲正弦及餘弦的齊次式解之：

109.  $\sin x = \cos x.$       110.  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0.$
111.  $3 \sin^2 x = \cos^2 x.$
112.  $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x.$
113.  $1 - 3 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x.$

#### § 4. 餘角及補角的函數.

1. 將下列各函數化爲小於  $45^\circ$  之角的函數：

- 1)  $\sin 73^\circ,$     2)  $\cos 80^\circ 40',$     3)  $\tan 69^\circ 25' 40'',$   
4)  $\cot 59^\circ 59'.$

2. 化下列各函數爲與原函數同名的銳角函數：

- 1)  $\sin 112^\circ 20',$     2)  $\cos 99^\circ 25' 35'',$   
3)  $\tan 108^\circ 48' 36'',$     4)  $\cot 140^\circ 40'.$

3. 化下列各函數爲小於  $45^\circ$  之角的函數：

- 1)  $\sin 121^\circ 40',$     2)  $\sin 163^\circ 35',$     3)  $\cos 158^\circ 17',$   
4)  $\cos 98^\circ 21',$     5)  $\tan 160^\circ 27' 32'',$     6)  $\tan 106^\circ 32',$   
3. 1)  $\cos 31^\circ 40'$  2)  $\sin 16^\circ 28'$  3)  $-\cos 21^\circ 43'$   
4)  $-\sin 8^\circ 21'$  5)  $-\tan 19^\circ 32' 28''$  — 11 —  
6)  $-\cot 16^\circ 32'$  7)  $-\tan 30^\circ 28' 40''$  8)  $-\cot 39^\circ 18'$

7)  $\cot 120^\circ 28' 40''$ , 8)  $\cot 140^\circ 42'$ .

化簡下列諸式：

$$4. \sqrt{\frac{\tan(180^\circ - a)}{\cot(90^\circ - a)} \cdot (-1)} \quad 5. \frac{\cos^2(90^\circ - a) - 1}{\cos(180^\circ - a)}$$

$$6. \sin(\pi - a) \cot(\pi - a).$$

$$7. \frac{\tan(\pi - a)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}$$

$$8. \sqrt{\sin(90^\circ - a) + \sin(90^\circ + a) + 2 \cos(180^\circ - a)} \quad (0)$$

$$9. \cos(90^\circ - a) + \cos(90^\circ + a).$$

$$10. \tan 43^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 47^\circ.$$

$$11. \cos(180^\circ - a) \cdot \sin(90^\circ + a) \cdot \tan(180^\circ - a) \cdot \cot(90^\circ + a)$$

$$12. \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \cdot \cot(\pi - a) + \cot(\pi - a) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)} \quad (0)$$

$$13. \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \tan(\pi - a)}{\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \sin(\pi - a)}$$

$$14. \sqrt{\frac{\tan(180^\circ - a) \cos(180^\circ - a) \tan(90^\circ - a)}{\sin(90^\circ + a) \cot(90^\circ + a) \tan(90^\circ + a)}} \quad (1)$$

15. 試證：

$$\sin(45^\circ + a) = \cos(45^\circ - a), \cos(45^\circ + a) = \sin(45^\circ - a), \text{ 以及其他。}$$

### § 5. 三角函數真數表.

試由三角函數真數表中查出以下各函數的值：

1. 1)  $\sin 15^\circ$ ,

2)  $\sin 45^\circ$ ,

3)  $\sin 60^\circ$ ,

4)  $\sin 73^\circ$ ,

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| 5) $\sin 38^\circ 30'$ ,  | 6) $\sin 69^\circ 24'$ ,  |
| 7) $\sin 11^\circ 50'$ ,  | 8) $\sin 87^\circ 10'$ .  |
| 2. 1) $\tan 20^\circ$ ,   | 2) $\tan 45^\circ$ ,      |
| 3) $\tan 85^\circ$ ,      | 4) $\tan 72^\circ 30'$ ,  |
| 5) $\tan 17^\circ 42'$ ,  | 6) $\tan 53^\circ 13'$ ,  |
| 7) $\tan 20^\circ 48'$ ,  | 8) $\tan 33^\circ 7'$ ,   |
| 9) $\tan 85^\circ 28'$ ,  | 10) $\tan 88^\circ 30'$ , |
| 11) $\tan 89^\circ 48'$ , | 12) $\tan 89^\circ 59'$ . |
| 3. 1) $\cos 65^\circ$ ,   | 2) $\cos 45^\circ$ ,      |
| 3) $\cos 30^\circ$ ,      | 4) $\cos 73^\circ$ ,      |
| 5) $\cos 38^\circ 30'$ ,  | 6) $\cos 20^\circ 24'$ ,  |
| 7) $\cos 61^\circ 10'$ ,  | 8) $\cos 78^\circ 46'$ ,  |
| 9) $\cos 2^\circ 52'$ ,   | 10) $\cos 1^\circ 20'$ .  |
| 4. 1) $\cot 20^\circ$ ,   | 2) $\cot 45^\circ$ ,      |
| 3) $\cot 37^\circ 30'$ ,  | 4) $\cot 71^\circ 24'$ ,  |
| 5) $\cot 69^\circ 13'$ ,  | 6) $\cot 19^\circ 37'$ ,  |
| 7) $\cot 88^\circ 15'$ ,  | 8) $\cot 5^\circ$ ,       |
| 9) $\cot 2^\circ 27'$ ,   | 10) $\cot 90^\circ$ ,     |
| 11) $\cot 1^\circ 53'$ .  |                           |

試求下列各函數中所含的銳角：

- |                                |                            |
|--------------------------------|----------------------------|
| 5. 1) $\sin \alpha = 0.3420$ , | 2) $\sin \beta = 0.5948$ , |
| 3) $\sin \gamma = 0.842$ ,     | 4) $\sin x = 0.9293$ ,     |
| 5) $\sin y = 1.0024$ ,         | 6) $\sin z = 0.3932$ .     |
| 6. 1) $\tan \alpha = 0.4452$ , | 2) $\tan \beta = 11.43$ ,  |
| 3) $\tan \gamma = 2.675$ ,     | 4) $\tan x = 0.5452$ ,     |
| 5) $\tan y = 5.558$ ,          | 6) $\tan z = 0.5$ ,        |



- 7)  $\tan u=0.42$ ,                      8)  $\tan v=12.9$ ,  
 9)  $\tan w=6.63$ .
7. 1)  $\cos \alpha=0.891$ ,                    2)  $\cos \beta=0.910$ ,  
 3)  $\cos \gamma=0.6361$ ,                    4)  $\cos x=1.0008$ ,  
 5)  $\cos y=0.8189$ ,                    6)  $\cos z=0.4485$ .
8. 1)  $\cot \alpha=2.747$ ,                    2)  $\cot \beta=0.4142$ ,  
 3)  $\cot \gamma=1.768$ ,                    4)  $\cot x=1.4948$ ,  
 5)  $\cot y=0.6946$ ,                    6)  $\cot z=1.6946$ ,  
 7)  $\cot u=7.115$ ,                    8)  $\cot v=10.23$ ,  
 9)  $\cot w=20$ .

由三角函數真數表求下列各鈍角函數的值：

9.  $\sin 105^\circ$ ,  $\sin 172^\circ 8'$ ,  $\sin 140^\circ 15'$ ,  $\sin 115^\circ 22'$ .  
 10.  $\cos 118^\circ$ ,  $\cos 156^\circ 30'$ ,  $\cos 98^\circ 42'$ ,  $\cos 169^\circ 17'$ .  
 11.  $\tan 121^\circ$ ,  $\tan 160^\circ 24'$ ,  $\tan 101^\circ 41'$ ,  $\tan 147^\circ 39'$ .  
 12.  $\cot 175^\circ$ ,  $\cot 124^\circ 30'$ ,  $\cot 171^\circ 13'$ ,  $\cot 111^\circ 11'$ .

### § 6. 直角三角形解法。

規定：在直角三角形  $ABC$  中， $\angle A=\alpha$ ， $\angle B=\beta$ ， $\angle C=90^\circ$ ，直角邊  $BC=a$ ，直角邊  $AC=b$ ，斜邊  $AB=c$ 。

1. 在直角三角形  $ABC$  中，1) 若  $a=48\text{cm}$ ， $c=50\text{cm}$ ，試求  $\sin \alpha$  及  $\tan \alpha$  的值；2) 若  $a=15\text{m}$ ， $b=20\text{m}$ ，試求  $\tan \alpha$  及  $\cos \alpha$ ，3) 若  $b=8.4\text{cm}$  及  $c=8.5\text{cm}$ ，試求  $\tan \beta$  及  $\cos \beta$ 。

2. 已知直角三角形  $ABC$  的二邊  $a=7\frac{1}{5}\text{cm}$ ， $c=17\text{cm}$ ，求角  $\beta$  之所有函數。

3. 在直角三角形  $ABC$  中，1) 已知斜邊  $c=30.6\text{cm}$ ， $\sin \alpha=\frac{2}{3}$ ，求  $a$ ，2) 已知  $a=51\text{cm}$ ， $\sin \alpha=0.75$