线性代数学习指导

谢政 陈挚 编

清华大学出版社

线性代数学习指导

谢政　陈挚　编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是与谢政编著的《线性代数》(高等教育出版社，2012)相配套的辅导教材. 每章包括基本要求、内容综述、疑难辨析、范例精讲、同步练习、单元测验、习题全解等7个部分. 基本要求明确了需要掌握的知识点. 内容综述对基本概念和基本理论进行了系统的梳理. 疑难辨析对疑难问题进行了分析和解答. 范例精讲对主要题型进行了综合分类，引导读者思考，揭示解题规律，归纳解题步骤. 同步练习、单元测验和期末考试则是自我训练、自我检测. 习题全解对主教材中绝大部分习题都提供了较为详细的解答.

本书既可以作为学生学习线性代数课程的辅导教材、考研复习的指导书，也可以供教师上练习课或考研辅导课参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/谢政，陈挚编. --北京：清华大学出版社，2012.10
ISBN 978-7-302-30365-7

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①谢…　②陈…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 242162 号

责任编辑：石　磊
封面设计：常雪影
责任校对：刘玉霞
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　编**：100084
社总机：010-62770175　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市李旗庄少明印装厂
经　销：全国新华书店
开　本：170mm×230mm　**印　张**：20.25　**字　数**：375 千字
版　次：2012 年 10 月第 1 版　**印　次**：2012 年 10 月第1次印刷
印　数：1～3000
定　价：32.00 元

产品编号：049915-01

前 言

线性代数是高等院校的一门重要的数学基础课程，也是许多专业研究生入学考试中数学内容的一部分. 这门课程理论上的抽象性、计算上的复杂性和方法上的灵活性，使得很多初学者感觉到看书抓不住重点，做题不知如何下手. 为了帮助他们把握重点、攻克难点、领会实质，启迪他们发现问题、分析问题和解决问题，更好地巩固基础知识、掌握基本技能，我们编写这本学习指导. 本书是与谢政编著的《线性代数》(高等教育出版社，2012) 相配套的辅导教材，其内容编排考虑了读者使用的方便，既注意与主教材的同步性，又保持与主教材的相对独立性.

本书分为 6 章：线性方程组、矩阵、行列式、向量空间与线性空间、矩阵的相似化简、二次型. 每章包括基本要求、内容综述、疑难辨析、范例精讲、同步练习、单元测验(第 1 章和第 5 章除外)、习题全解等 7 个部分. 书后还给出了期末考试、同步练习参考解答、单元测验参考解答和期末考试解答等内容.

基本要求明确了需要掌握的知识点，并用“理解、了解、知道”或“熟练掌握、掌握、会”的次序表示对基本概念、基本理论或基本方法的不同要求，使读者能心中有数、有的放矢.

内容综述对基本概念和基本理论进行了系统的梳理，突出重点与难点，讲清各知识点之间的联系，帮助读者透视脉络，总揽全局.

疑难辨析针对重点和难点内容，以及读者在学习中的困惑，选编了若干问题予以分析、解答，使读者领悟问题实质，澄清模糊认识，巩固所学知识.

范例精讲对主要题型进行了综合分类，通过剖析解题思路，揭示解题规律，归纳解题步骤，使读者能举一反三、触类旁通.

同步练习是围绕知识点进行自我训练，培养读者综合运用所学知识的能力.

单元测验要求在 120 分钟内独立完成，然后按照参考解答自行评分，以检查学习效果，及时发现存在的问题.

习题全解罗列了主教材中所有习题，除少数特别简单的习题只给出答案外，其他习题都给出较为详细的解答.

期末考试中的四套综合试题应在学完全部内容之后再做，其他要求与单元测验完全相同.

在认真阅读主教材的基础上再阅读本书效果会更好，但是离开主教材也能顺利地阅读本书.对于习题、练习和试题，读者必须先独立思考，自己动手解题，然后与题解对照比较，才有可能达到理解基本概念和基本理论、掌握基本方法、训练数学思维的目的.

刘春林、文军、海昕、苏芳4位青年教师参与了习题全解的编写及全书的校对工作，在此表示衷心的感谢.

我们真诚地希望同行和读者对本书提出宝贵的意见和建议.

编 者

2012年6月

于国防科技大学

目　　录

第1章 线性方程组

基本要求

1. 理解线性方程组的基本概念.
2. 知道线性方程组解的几何意义.
3. 掌握阶梯方程组的回代法,了解线性方程组解的三种情况.
4. 熟练掌握线性方程组的三种初等变换和消元法.

内容综述

一、线性方程组及其解

线性方程就是一次方程.

$m\times n$ 线性方程组是指 m 个含相同的 n 个未知量的线性方程所构成的组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零,则称此方程组为 $m\times n$ 齐次线性方程组；否则称为 $m\times n$ 非齐次线性方程组.

注 “组”不同于“集合”,组中元素有序且允许重复,而集合中元素无序且相异.

用 W 表示线性方程组的解集,有相同解集的两个方程组称为同解方程组；若 $W\neq\varnothing$,则称该方程组是相容的或有解；若 $W=\varnothing$,则称该方程组为不相容的或矛盾的或无解.若 W 只含一个元素,则称该方程组有唯一解.W 中任何一个元素,称为该方程组的一个特解；W 中全部元素的一个通用表达式称为该方程组的通解或一般解.

二、二元和三元线性方程组的几何意义

二元线性方程组表示平面上若干条直线的交点，方程组有唯一解等价于所有直线交于一点；方程组有无穷多解等价于所有直线都重合；方程组无解等价于所有直线既不交于一点也不重合.

三元线性方程组表示空间中若干个平面的交点，方程组有唯一解等价于所有平面交于一点；方程组有无穷多解等价于所有平面重合或交于一条直线；方程组无解等价于所有平面没有公共交点.

三、阶梯方程组及其回代法

阶梯方程组应该满足如下两个条件：

(1) 若某个方程的未知量系数全为零，则它下方的所有方程的未知量系数均为零；

(2) 若某个方程中第一个系数不为零的未知量是 x_i，则它下方的所有方程的前 i 个未知量的系数全为零.

若阶梯方程组出现矛盾方程，则阶梯方程组无解. 否则，删去所有"0＝0"的方程后，可选每个方程的第一个未知量为基本未知量，其余未知量均为自由未知量，即

$$\text{自由未知量个数}=\text{未知量个数}-\text{方程个数},$$
$$\text{基本未知量个数}=\text{方程个数}.$$

从阶梯方程组中最后一个方程开始求解，逐次将所解得的基本未知量的值代入到前一个方程中，使得该方程只含一个基本未知量，从而可以求解，这就是回代法.

当未知量个数等于方程个数时，方程组有唯一解；当未知量个数大于方程个数时，方程组有无穷多解，可用自由未知量表示出其通解.

四、线性方程组的初等变换

(1) 对调变换ⓘ↔ⓙ：对调第 i 个与第 j 个方程的位置；

(2) 倍乘变换 kⓙ：以数 $k\neq 0$ 乘第 j 个方程；

(3) 倍加变换ⓘ+kⓙ：将第 j 个方程的 k 倍加到第 i 个方程上.

三种初等变换的逆变换：

ⓘ↔ⓙ的逆变换是ⓘ↔ⓙ；

kⓙ的逆变换是$\frac{1}{k}$ⓙ；

ⓘ＋kⓙ的逆变换是ⓘ－kⓙ.

初等变换具有如下性质：

(1) 一个线性方程组经有限次初等变换得到的必是同解方程组，即有限次初等变换不改变方程组的解集.

(2) 任何一个线性方程组都可以经过有限次初等变换化成阶梯方程组.

利用初等变换逐次消去一些方程中的未知量，化一般线性方程组为阶梯方程组的过程称为消元.

用消元和回代两个过程求解线性方程组的方法称为消元法.

疑 难 辨 析

问题 1 在线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=1, \\ x_1-4x_2-2x_3=3, \\ 2x_1+7x_2+11x_3=0 \end{cases}$$

中，是否能去掉一个方程而使其解不变(即是否有多余的方程)?

答 在上述方程组中，将第一个方程的(−3)倍、第二个方程都加到第三个方程，得到方程 $0=0$，这说明该方程组的解完全由前两个方程确定，所以第三个方程可以去掉，即第三个方程是多余的.

问题 2 不画图能否确定三个平面

$$\pi_1: x_1+x_2-x_3=2,$$
$$\pi_2: x_1+2x_2+x_3=3,$$
$$\pi_3: -x_1+2x_2+3x_3=1$$

的位置关系?

答 为了考查 π_1 与 π_2 的位置关系，只需将它们对应的两个方程联立成线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \end{cases}$$

做初等变换得阶梯方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ x_2+2x_3=1, \end{cases}$$

即知方程组有无穷多解，故 π_1 与 π_2 相交. 同理 π_1 与 π_3，π_2 与 π_3 都相交.

将 π_1，π_2 和 π_3 对应的三个方程联立成线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \\ -x_1+2x_2+3x_3=1, \end{cases}$$

通过初等变换得到阶梯方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ x_2+2x_3=1, \\ -4x_3=0, \end{cases}$$

方程组有唯一解 $x_1=1, x_2=1, x_3=0$，即三个平面 π_1, π_2 和 π_3 交于点 $(1,1,0)$.

问题 3　设 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 都为常数，$a_{11}\neq 0$，如果 2×2 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

对于 b_1, b_2 的任意取值都是相容的，那么 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 应当满足什么条件？

答　因 $a_{11}\neq 0$，故可对方程组做初等变换 a_{11}②$-a_{21}$①，得阶梯方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}. \end{cases}$$

由条件知，对于任意的 b_1, b_2，阶梯方程组中第二个方程都应当有解，因此必有

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0.$$

问题 4　当 $m<n$ 时，$m\times n$ 线性方程组的解会出现什么情况？

答　经过有限次初等变换可以将 $m\times n$ 线性方程组化成阶梯方程组，如果阶梯方程组中最后一个方程是“$0=d(d\neq 0)$”，则 $m\times n$ 线性方程组无解；如果最后一个方程含有未知量，则方程组有解，此时阶梯方程组中方程个数 $r\leqslant m$，从而 $r<n$，于是至少有一个自由未知量，故 $m\times n$ 线性方程组有无穷多解. 这表明 $m<n$ 时 $m\times n$ 线性方程组不会有唯一解.

范 例 精 讲

题型一　判断非齐次线性方程组是否有解

例 1　判断下列非齐次线性方程组是否有解.

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=10, \\ 4x_1+2x_2-x_3=2, \\ 11x_1+3x_2=8. \end{cases}$$

解　对方程组做初等变换，得

$$\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3=10,\\4x_1+2x_2-x_3=2,\\11x_1+3x_2=8,\end{cases}\xrightarrow[②-①]{③-3②}\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3=10,\\x_1+3x_2-3x_3=-8,\\-x_1-3x_2+3x_3=2,\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{②-3①\\③+①}]{①\leftrightarrow②}\begin{cases}x_1+3x_2-3x_3=-8,\\-10x_2+11x_3=34,\\0=-6.\end{cases}$$

因第三个方程为矛盾方程,故该方程组无解.

题型二　求非齐次线性方程组的通解

例 2　求下列非齐次方程组的通解:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=4,\\3x_1+8x_2-2x_3=13,\\4x_1-x_2+9x_3=-6,\\x_1-2x_2+4x_3=-5.\end{cases}$$

解　对方程组做初等变换,得

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=4,\\3x_1+8x_2-2x_3=13,\\4x_1-x_2+9x_3=-6,\\x_1-2x_2+4x_3=-5,\end{cases}\to\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=-5,\\7x_2-7x_3=14,\\14x_2-14x_3=28,\\7x_2-7x_3=14,\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=-5,\\x_2-x_3=2,\end{cases}\to\begin{cases}x_1+2x_3=-1,\\x_2-x_3=2.\end{cases}$$

取 x_3 为自由未知量,从而求得方程组的通解

$$\begin{cases}x_1=-2x_3-1,\\x_2=x_3+2,\\x_3=x_3,\end{cases}\quad x_3\text{ 为任意数}.$$

注　消元法的一般步骤是:

(a) 将线性方程组做初等变换,化为阶梯方程组.

(b) 如果出现矛盾方程,则原方程组无解.

(c) 当线性方程组有解时,用回代法求出阶梯方程组的解.

题型三　求齐次线性方程组的通解

例 3　求下列齐次方程组的通解:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0,\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0.\end{cases}$$

解 对方程组做初等变换,得

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0,\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0,\end{cases}\to\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\-4x_3=0,\\-4x_3=0,\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}x_1+2x_2-x_4=0,\\x_3=0.\end{cases}$$

取 x_2,x_4 为自由未知量,从而方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=-2x_2+x_4,\\x_2=x_2,\\x_3=0,\\x_4=x_4,\end{cases}\quad x_2,x_4\text{ 为任意数.}$$

注 齐次线性方程组的解有两种情况:一是只有零解,即有唯一解;二是有非零解,从而有无穷多解.

题型四 含参线性方程组的解的讨论

例 4 设有线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4,\\-x_1+kx_2+x_3=k^2,\\x_1-x_2+2x_3=-4.\end{cases}$$

(1) k 取何值时,方程组无解?

(2) k 取何值时,方程组有唯一解?

(3) k 取何值时,方程组有无穷多解?并求方程组的通解.

解 对方程组做初等变换,得

$$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4,\\-x_1+kx_2+x_3=k^2,\\x_1-x_2+2x_3=-4,\end{cases}\to\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4,\\(k+1)x_2+(k+1)x_3=k^2+4,\\-2x_2+(2-k)x_3=-8,\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4,\\2x_2+(k-2)x_3=8,\\\frac{1}{2}(k+1)(4-k)x_3=k(k-4).\end{cases}$$

(1) 当 $k=-1$ 时,方程组无解;

(2) 当 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时,方程组有唯一解.对方程组继续做初等变换,得

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4, \\ 2x_2+(k-2)x_3=8, \\ \frac{1}{2}(k+1)(4-k)x_3=k(k-4), \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k^2+2k}{k+1}, \\ x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1}, \\ x_3=-\frac{2k}{k+1}. \end{cases}$$

因此方程组的唯一解为 $x_1=\frac{k^2+2k}{k+1}, x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1}, x_3=-\frac{2k}{k+1}$.

(3) 当 $k=4$ 时,方程组有无穷多解,此时方程组化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=4, \\ x_2+x_3=4, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1+3x_3=0, \\ x_2+x_3=4, \end{cases}$$

取 x_3 为自由未知量,从而方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1=-3x_3, \\ x_2=-x_3+4, \\ x_3=x_3. \end{cases} \quad x_3 \text{ 为任意数.}$$

注 含参线性方程组解的讨论方法归纳如下:

(a) 对线性方程组做初等变换,将其化为阶梯方程组.

(b) 根据参数的不同取值,讨论方程组是无解、有唯一解还是有无穷多解.

例 5 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2. \end{cases}$$

问当 a,b 取何值时,方程组有解,并求方程组的通解.

解 对方程组做初等变换,得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, \\ 0=b-3a, \\ 0=1-a. \end{cases}$$

当 $a=1$ 且 $b=3$ 时,方程组有无穷多解. 此时方程组等价于

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1-x_3-x_4-5x_5=-2, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=1, \end{cases}$$

取 x_3,x_4,x_5 为自由未知量,从而方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1= x_3+x_4+5x_5-2, \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+1, \\ x_3= x_3, \\ x_4= x_4, \\ x_5= x_5, \end{cases} \quad x_3,x_4,x_5 \text{ 为任意数.}$$

注 4×5 线性方程组不会有唯一解,参见本章问题 4.

例 6 设线性方程组(Ⅰ):

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程(Ⅱ):

$$x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

解 将方程组(Ⅰ)与方程(Ⅱ)合并,得方程组(Ⅲ):

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=a-1, \end{cases}$$

对方程组(Ⅲ)做初等变换化为阶梯方程组:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=a-1, \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_2+(a-1)x_3=0, \\ (1-a)x_3=a-1, \\ (a-1)(a-2)x_3=0. \end{cases}$$

当 $a\neq 1, a\neq 2$ 时,方程组(Ⅲ)可化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_2+(a-1)x_3=0, \\ x_3=-1, \\ x_3=0, \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_2+(a-1)x_3=0, \\ x_3=-1, \\ 0=1 \end{cases}$$

因第四个方程为矛盾方程,故方程组(Ⅰ)与方程(Ⅱ)无公共解.

当 $a=1$ 时,方程组(Ⅲ)可化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_2 \qquad =0, \end{cases} \to \begin{cases} x_1 \quad +x_3=0, \\ x_2 \qquad =0, \end{cases}$$

则方程组(Ⅰ)与方程(Ⅱ)的公共解为 $x_1=-x_3, x_2=0, x_3=x_3$,其中 x_3 为任意数.

当 $a=2$ 时,方程组可化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_2+x_3=0, \\ -x_3=1, \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3=-1, \end{cases}$$

则方程组(Ⅰ)与方程(Ⅱ)有唯一公共解 $x_1=0, x_2=1, x_3=-1$.

注 讨论两个线性方程组是否有公共解的一般方法是:将两个线性方程组合并成一个新的方程组.如果新方程组无解,则两方程组无公共解;否则新方程组的解都是两方程组的公共解.

同 步 练 习

1. 填空题

(1) 线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-5x_2-3x_3=10, \\ 4x_1+8x_2+2x_3=4 \end{cases}$ 的解为__________.

(2) 齐次方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \end{cases}$ 的通解中含自由未知量的个数为______.

(3) 设方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2=0, \\ 2x_1+kx_2=0 \end{cases}$ 有非零解,则 $k=$______.

(4) 设方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_3=2, \\ 5x_1+3x_2+(a+8)x_3=8, \end{cases}$ 当 $a=$______时,方程组无解.

(5) 若方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=\lambda, \\ x_1+x_2-3x_3+5x_4=5, \\ x_2+2x_3-2x_4=2\lambda \end{cases}$ 有解,则 $\lambda=$______.

2. 已知平面上三条不同的直线方程分别为

$$l_1: x_1-2x_2=0,\quad l_2: x_1+2x_2=4,\quad l_3: x_1-x_2=a,$$

问 a 取何值时三条直线交于一点?

3. 求下列非齐次方程组的通解:

(1) $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=4, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=11, \\ 2x_1+x_2+x_3=3, \\ -2x_1+x_2+3x_3=-7. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4=2, \\ 6x_1-9x_2+3x_3-3x_4=6, \\ x_1+x_2-2x_3+x_4=4, \\ 3x_1+6x_2-9x_3+7x_4=9. \end{cases}$

4. 求解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-x_4=0, \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$

5. 讨论当 a,b 取何值时,齐次方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+bx_2+x_3=0, \\ x_1+2bx_2+x_3=0 \end{cases}$$

有非零解? 并求出该方程组的所有解.

6. 讨论当 a,b 取何值时,非齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ x_2+(3-a)x_3+2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解、无解、无穷多解? 在方程组有解时,求出该方程组的所有解.

7. 已知线性方程组(Ⅰ)$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$和(Ⅱ)$\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$同解,求 a,b,c 的值.

8. 在光合作用下,植物利用太阳光的辐射能量把二氧化碳(CO_2)和水(H_2O)转化成葡萄糖($C_6H_{12}O_6$)和氧气(O_2),其化学反应方程式为

$$x_1\,CO_2+x_2\,H_2O\longrightarrow x_3\,C_6H_{12}O_6+x_4\,O_2,$$

试确定 x_1,x_2,x_3 和 x_4,将方程式配平.