国家自然科学基金项目（71071071）
教育部人文社会科学研究规划项目（09YJA790100）
江苏高校优势学科建设工程资助项目（PAPD）
南京财经大学学术著作出版资助基金（NUFEPF2008）

动态证券投资决策的模型和方法

Dynamic Portfolio Investment Decision Model and Method

郭文旌 著

中国金融出版社

国家自然科学基金项目（71071071）
教育部人文社会科学研究规划项目（09YJA790100）
江苏高校优势学科建设工程资助项目（PAPD）
南京财经大学学术著作出版资助基金（NUFEPF2008）

动态证券投资决策的模型和方法

Dynamic Portfolio Investment Decision Model and Method

郭文旌 著

中国金融出版社

责任编辑：王　君
责任校对：张志文
责任印制：陈晓川

图书在版编目（CIP）数据

动态证券投资决策的模型和方法（Dongtai Zhengquan Touzi Juece de Moxing he Fangfa）：郭文旌著. —北京：中国金融出版社，2012.12
ISBN 978-7-5049-6575-2

Ⅰ.①动…　Ⅱ.①郭…　Ⅲ.①证券投资—研究　Ⅳ.①F830.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 237562 号

出版发行　中国金融出版社
社址　北京市丰台区益泽路 2 号
市场开发部　(010)63266347，63805472，63439533（传真）
网上书店　http://www.chinafph.com
(010)63286832，63365686（传真）
读者服务部　(010)66070833，62568380
邮编　100071
经销　新华书店
印刷　北京市松源印刷有限公司
尺寸　169 毫米×239 毫米
印张　13.25
字数　231 千
版次　2012 年 12 月第 1 版
印次　2012 年 12 月第 1 次印刷
定价　33.00 元
ISBN 978-7-5049-6575-2/F.6135

前 言

自2000年起，在我的博士导师胡奇英教授的引导下，我开始进入现代投资理论的研究工作。在研究过程中，动态投资理论引起我很大的兴趣，我先后对多期的投资组合理论、连续时间的投资组合理论结合中国的实际进行了拓展性研究，比如考虑了不确定投资退出时间、考虑投资对象中含有衍生品以及特定消费等情况。后发现带跳市场跟现实市场具有更好的拟合优度，于是专注于研究带跳市场的投资组合模型。2006年偶遇加拿大滑铁卢大学精算和统计系的蔡军教授，蔡军教授是国际精算领域的知名专家，蔡军教授对我的研究很有兴趣，有意与我合作从事保险投资问题的研究。在蔡军教授的帮助下，我获得了加拿大IQFI项目的资助，同年赴加拿大滑铁卢大学金融与保险数量研究所从事博士后研究，在滑铁卢大学一年的博士后研究中，我把前期的一些研究模型应用到保险资产的组合投资问题研究中。回国以后，我将更多的兴趣放在中国市场的跳跃性特征、信用风险管理以及存款定价等方向的研究上。所以我想把近十年的前期研究成果整理出来，供同行参考。当然，由于本人学识有限，书中错误在所难免，敬请同仁批评指正。

本书研究成果，历时十年，得到了我博士导师胡奇英教授、博士后导师蔡军教授以及李心丹教授的悉心指导和帮助，在此对他们表示深深的谢意。在加拿大做博士后期间还得到了中山大学李仲飞教授和滑铁卢大学Kenseng Tan教授的指点和帮助，同时本书的出版得到了南京财经大学金融学院闫海峰教授等领导的关心和支持，在此一并表示感谢。还要感谢我的妻子和我的儿子，他们在我背后默默支持，是我精神的动力，使我的研究得以顺利进行。

适逢整理书稿期间，突闻敬爱的母亲去世的噩耗，强忍悲痛完

成书稿的最后整理工作，最后谨以此书献给我已故的母亲。

本书由南京财经大学学术著作出版基金资助，同时得到国家自然科学基金项目（71071071）、教育部人文社会科学研究规划项目(09YJA790100)、江苏高校优势学科建设工程资助项目以及南京财经大学院所属科研机构专项项目（2010JG015）的资助，作者在此表示由衷的感谢。

郭文旌

二〇一二年二月一日

记号和符号的说明

R^n	n 维欧氏空间
$R^{m\times n}$	m 行 n 列实矩阵空间
$R^{n\times n}$	n 阶实方阵空间
R^+	正实数集
Ω	样本空间
F	Ω 上的 σ －代数
$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$	滤波
P	概率测度
$W(t)$	布朗运动
$N(t)$	Possion 过程
E	期望算子
Var	方差算子
$a.s.$	几乎处处
$\exists$	存在
I_n	n －阶单位矩阵
1_n	分量全为 1 的 n －维列向量
上标 “ T ”	表示转置
$\Vert \bullet \Vert_S$	Banach 空间 S 上的范数
$\Vert X \Vert_{R^n}$	$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$（其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$）
$L^k([0,T];R^n)$	$\left\{f(t)\,\middle\vert\, E\left(\int_0^T \Vert f(t)\Vert_{R^n}^k \mathrm{d}t\right)<\infty, f(t)\in R^n\right\}$
$\wedge$	二者中取最小者
C^k	k 阶连续可微函数集
C^0	连续函数集
$D_x(V)$	对函数 V 关于 x 求一阶微分
$D_x^k(V)$	对函数 V 关于 x 求 k 阶微分
argmax（min）（$\bullet$）	使式（$\bullet$）取到最大（最小）值的所有变量的集合
$f'(x)$	对函数 f 关于变量 x 求导数

目 录

1

引 言

1952 年，Markowitz 发表了一篇题为《投资组合选择》的文章。这篇文章的发表揭开了现代金融理论发展的序幕。在短短半个世纪，现代金融理论已经经历了从简单的定量分析到系统化、工程化的发展过程。在这个发展进程中，形成了组合投资、资产定价、风险管理等一系列的分支理论。单从组合投资来看，根据最优投资组合选择准则的不同，可以分为两种思想：

一种沿用 Markowitz 的均值—方差思想（简称 M—V 方法），即用期望衡量投资收益，方差测度投资风险，然后投资者根据自己的风险偏好，在二者之间进行权衡，选出自己最优的投资组合。M—V 方法经历了从静态到动态的发展过程。M—V 方法的优点是直观、容易被接受，因而在实际应用中非常广泛。M—V 方法的不足就是假设的市场比较简单，不能细微地反映出实际市场的复杂变化情况。另外，M—V 方法单纯地考虑投资者的投资行为，没有考虑到投资者的消费以及消费对投资可能的影响。

另一种是经济学领域常用的效用思想，亦称效用函数法。效用函数法可以将与投资者息息相关的两种行为投资和消费结合起来考虑。这种准则最大化投资者投资期内的消费期望效用和最终财富的期望效用。效用函数法的应用使得一系列现代数学理论，如鞅理论、随机控制理论、倒向随机方程理论、随机微分对策理论的最新成果可以应用到现代金融理论，处理一些复杂的实际情形，弥补了 M—V 方法的不足。因此效用函数法是均值—方差方法的推广和发展。实际上，当效用函数为二次函数时，不考虑消费，效用函数法就等价于均值—方差方法（见文 [81] [91] [205]）。①

---

① 文 [81] [91] [205] 指书后参考文献中的第 [81]、[91]、第 [205] 项，本书其他处依以类推。

下面我们分别针对 M—V 组合投资理论与效用投资理论作简要综述。

1.1 均值—方差组合投资理论

设金融市场上有 n 种可供交易的资产，期望收益率分别为 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ ，σ_{ij} 为第 i 种资产与第 j 种资产的协方差。令

$$R = (R_1, R_2, \cdots, R_n)^T, \ \Omega = (\sigma_{ij})_{n\times n}$$

若假定

（1）投资者以期望收益率来衡量未来的收益水平，以收益率方差作为风险的测度；

（2）投资者是不知足和厌恶风险的，即总是希望期望收益率越高越好，而方差越小越好。

则可建立 Markowitz 模型为

$$\begin{cases} \min f(\Pi) = \Pi^T \Omega \Pi \\ \max g(\Pi) = R^T \Pi \\ s.t.\ \Pi^T 1_n = 1 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中，$\Pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n)^T$ ，而 π_i 表示投资者在第 i 个资产上的投资比例。称 Π 为一个投资组合。因为模型（1.1.1）考虑的仅是投资者一个周期的投资，所以模型（1.1.1）常称为单阶段 M—V 模型。

在 Ω 非奇异条件下，Merton（1972）给出了模型（1.1.1）不含无风险资产情形的最优投资组合与有效前沿的解析表达式，Szego（1980）给出了模型（1.1.1）含无风险资产情形的最优投资组合与有效前沿的解析表达式。模型（1.1.1）称为允许卖空情形，若再增加一个约束条件：$\Pi \geqslant 0$ ，则称不允许卖空情形。对不允许卖空情形，一般很难得到它的解析解，在实际应用中，可以通过算法来实现。这方面的算法很多：Markowitz（1991）提出临界线算法，曾勇与唐小我（1994，1997）提出参数树形算法和单纯形法，杨德权、杨德礼、史克禄、胡运权（2001）提出区间搜索法，郭文旌（2002）提出神经网络算法。李仲飞（2000）在假定资产互不相关，即协方差矩阵 Ω 是个对角矩阵时，得到了不允许卖空模型的解析解。

对单阶段模型的改进性研究很多，Soner（1991），李仲飞（2000），刘海龙、樊治平、潘德惠（1999）在模型中考虑交易费；陈收等（2000，2001），

郭文旌与胡奇英（2006）在模型中考虑资本结构；郭文旌、周幼英与胡奇英（2003）在模型中考虑初始风险证券并用最大最小绝对离差作为风险测度；Ouderri 与 Sulliran（1991），吕锋与倪志红（1995），Ogryczak 与 Ruszynsk（1999），张喜彬、荣喜民、张世英（2000）提出 E—sh 风险来替代方差风险；Konno 与 Yamazaki（1991），Simaan（1997）提出平均绝对离差取代方差；Cai、Teo、Yang 与 Zhou（2000）提出最大最小化绝对离差作为风险测度。

多阶段模型是对单阶段模型的自然推广，但是在求解上两者差异很大。单阶段问题一般采用单目标、多目标规划方法来求解，而多阶段问题需要应用动态规划原理来求解。多阶段投资者的目的与单阶段一样，即在给定期末预期收益的条件下力求方差最小或在给定方差水平的条件下力求期末期望收益最大。投资者对每个阶段都要构建一个投资组合，所以他的投资策略是由每个阶段的投资组合构成的投资组合组。

设 r_t^i（$i=0, 1, 2, \cdots, n$）为第 i 个资产在 t 阶段的随机收益率，π_t^i（$i=1, 2, \cdots, n$）表示投资者在 t 阶段投资到第 i 个资产的投资比例，X_t 表示投资者在 t 阶段投资结束时的财富量，投资者进行 T 个阶段的投资。令

$$r_t = (r_t^1,\cdots,r_t^n)^T, \Pi_t = (\pi_t^1,\cdots,\pi_t^n)^T, t = 1,2,\cdots,T$$

则多阶段的一般模型表述如下

$$\begin{cases} \min\limits_{\Pi} Var(X_T) \\ s.t.\ \ E(X_T) \geqslant \mu \\ X_t = X_{t-1}[r_t{}^T\Pi_t + (1 - \Pi_t{}^T 1_n) r_t^0] \\ t = 1,2,\cdots,T \end{cases} \tag{1.1.2}$$

其中，μ 为给定的期末期望收益。

虽然多阶段模型产生已久，但在很长时间内，不能像单阶段那样得到模型的解析解和有效前沿的显式表达，原因是多阶段的目标函数中含有动态规划意义下的不可分离项 $(EX_T)^2$。Li、Chan 与 Ng（1998），Li 与 Ng（2000），李仲飞（2000）通过引进一个近似问题使这一难题得到解决。对多阶段的拓展性研究目前不多，Li 与 Ng（2000）研究了安全第一准则下的多阶段模型，李仲飞（2000）研究了以财富倍数最大增长为目标的多阶段模型，宿洁、刘家壮（2001）研究了有交易费的多阶段模型，郭文旌（2005）研究了退出时间不确定情况下的多阶段模型。

连续时间模型是多阶段的进一步延伸。它假定市场是一个随时间连续变化

的体系，一般用一个完备的概率滤波空间 $(\Omega,F,\{F_t\}_{t\geq 0},P)$ 来描述，在这个空间上有一个 n 一维的标准布朗运动 $B(t)=(B_1(t),\cdots,B_n(t))^T$，$\{F_t\}_{t\geq 0}$ 是 $B(t)$ 的自然滤波。设市场上可供交易的资产为 $n+1$，其中一个为无风险资产，价格 $P_0(t)$ 满足方程

$$\mathrm{d}P_0(t)=P_0(t)r(t)\mathrm{d}t$$

$r(t)$ 为无风险利率，其余 n 个为风险资产，第 i 个资产的价格 $P_i(t)$ 满足下面随机微分方程

$$\mathrm{d}P_i(t)=P_i(t)\left[b_i(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}B_j(t)\right],\ i=1,2,\cdots,n$$

其中，$b_i(t)$、$\sigma_i=(\sigma_{i1}(t),\sigma_{i2}(t),\cdots,\sigma_{in}(t))^T$ 分别为第 i 个资产的瞬时收益率和发散率。

设投资者的初始财富为 x，假定投资者进入市场后在有限时域 $[0,T]$ 内连续地进行交易，那么由 Itô 公式，他的财富过程 $x(t)$ 满足如下随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=\left[r(t)x(t)+\sum_{i=1}^{n}(b_i(t)-r(t))\pi_i(t)\right]\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t)\pi_i(t)\mathrm{d}B_j(t)\\ x(0)=x\end{cases}\tag{1.1.3}$$

其中，$\pi_i(t)$ 表示投资者在 t 时刻在资产 i 上的投资量。令

$$\pi(t)=(\pi_1(t),\cdots,\pi_n(t))^T$$

称 $\pi(t)$ 为一个投资组合，而且 $(\pi(t),x(t))$ 满足（1.1.3）。若 $\pi(t)$ 关于 F_t 一适应，$\pi(t)\in L^2([0,T];R^n)$，则称 $\pi(t)$ 为允许的。所有允许投资组合的集合记为 $\Pi(x)$。投资者的目的是在允许投资组合集合 $\Pi(x)$ 中选择最优投资组合使得最终财富的期望最大与方差最小之间实现合理的权衡。

一般连续时间 M—V 模型可建立为

$$\begin{cases}\min\limits_{\pi}(-Ex(T),Var(x(T)))\\ s.t.\ \pi\in\Pi(x)\end{cases}\tag{1.1.4}$$

由多目标最优化原理，（1.1.4）等价于下面单目标模型：

$$\begin{cases}\min\limits_{\pi}-Ex(T)+\omega Var(x(T))\\ s.t.\ \pi\in\Pi(x)\end{cases}\tag{1.1.5}$$

为处理之便，本书后面涉及的连续时间 M—V 模型都是以（1.1.5）形式给出的。Zhou 与 Li（2000）利用 Li 与 Ng（2000）的求解技巧以及二次线性随机控制方法解决了模型（1.1.5）的求解问题，得到了最优投资策略和有效前沿的

解析形式。对连续时间 M—V 模型的进一步研究有：Li、Zhou 与 Lim（2002）应用近来发展起来的粘解理论［见 Crandall 与 Lions（1983）、Fleming 与 Sheu（2000）］研究了模型（1.1.5）不允许卖空的情形；Lim 与 Zhou（2002），郭文旌等（2003，2007）研究了模型（1.1.5）随机市场系数的情形，Guo 和 Xu（2004，2007）研究了跳跃扩散市场的情形，Akian、Sequier 与 Sulem（1995）研究了有交易费的情形。

1.2 效用投资理论

所谓最大效用投资问题，确切地说就是投资者选择最优投资组合使自己的财富增加，并通过消费这些财富使自己的效用最大。它采用效用函数法将投资者的投资和消费行为结合起来考虑。投资者的目的是追求消费效用与最终财富的期望效用最大。这方面最早的研究要归功于 Samuelson 与 Fama，他们分别于 1969 年和 1970 年研究了离散时间的投资消费问题。随后，Merton（1969，1971，1990）对连续时间情形作了大量研究。Merton 应用随机动态规划原理来研究，提出了类似资本资产定价理论中的基金分离定理，并证明了投资消费模型有解析解的充分必要条件：效用函数为 HARA（双曲线绝对风险厌恶）函数。Merton 一系列的工作为后续进一步的研究奠定了基石，所以习惯于把连续时间的投资消费问题称为 Merton 问题。

设投资者的消费率（单位时间的消费量）过程为 $c(t)$，这是一个非负随机变量，$\pi(t)$ 为投资组合，财富过程 $x(t)$ 满足（1.1.3）。则对有限时域 $[0, T]$，连续时间的最优投资消费问题的一般模型可建立为

$$\max_{\pi,c\geqslant 0} E\left[\int_0^T e^{-\rho t} U_1(t,c)\,dt + e^{-\rho T} U_2(T,x)\right] \tag{1.2.1}$$

如果是对无限时域，模型又可建立为

$$\max_{\pi,c\geqslant 0} E\left[\int_0^T e^{-\rho t} U_1(t,c)\,dt\right] \tag{1.2.2}$$

其中，ρ 为折扣因子。在模型（1.2.1）中，若不考虑投资者的消费，只考虑最终财富 $x(T)$ 的效用，并且取 $U_2(t,x)$ 为二次函数，则根据 Tobin（1958），Zhao 与 Ziamba（2002）的结论，该模型等价于 M—V 模型，因此投资消费模型可以看成是 M—V 模型的推广。

对模型（1.2.1）与（1.2.2）的求解，根据 Merton 的结论，如果效用函

数取 HARA 函数，可以根据随机动态规划原理将问题转化为求解一个 HJB 方程。如果 $U_1(t,x)$ 为一般效用函数，求解 HJB 方程就会非常困难，一般只能通过数值方法来实现。Lehoczky、Sethi 与 Shreve（1983），Lehoczky、Sethi 与 Shreve（1985），Karatzas、Lehoczky、Sethi 与 Shreve（1986），Karatzas、Lehoczky 与 Shreve（1987），Cox 与 Hang（1989）应用鞅方法求解模型得到一般效用函数下的最优投资消费策略的解析表达。

运用效用函数方法研究投资问题的优点有：一方面可以考虑跟实际更为接近的复杂市场，另一方面可使用的数学工具非常广泛。因此，关于投资消费问题的研究很多：He 与 Pages（1991），Koo（1996，1998），Viceira（2001）研究了有外来收入流的情形；Eastham Hastings（1988），Zariphopoulou（1992），Ksendal 与 Sulem（2002），Akian、Menaldi 与 Sulem（1996），Akian 与 Sulem（2001），Framstad、Phiksendal 与 Sulem（2001），Shreve、Soner 与 Xu（1991），Shreve 与 Soner（1994）研究了有交易费的情形；Cadenillas 与 Sethi（1997），Presman 与 Sethi（1991，1996），Lehoczky、Sethi 与 Shreve（1983），Sethi、Taksar（1988，1992），Sethi、Taksar 与 Presman（1992），Sethi（1997）研究了考虑破产的情形；Cuoco 与 Liu（2000），Crossman 与 Loroque（1990）研究了消费品为可存品的情形；明宗峰、郭文旌与胡奇英（2004）研究了消费品为可存品与非可存品的组合的情形；Hauson 与 Westman（2002），Bardhan 与 Chao（1995），Jeanblance - Picque 与 Pontier（1990），Framstad、Phiksendal 与 Sulem（2001），Goll 与 Kallsen（2000）研究了风险资产价格过程为半鞅的情形；Benth、Karlson 与 Reikvam（2001），Bardhan（1994），Browne（1995），Zariphopoulou（1994），Fleming 与 Zariphopoulou（1991）研究了不允许卖空或者不允许财富为零等有限制的情形；Gennote（1986），Miao（2009），Peter（1995，1998），杨昭军、李致中与邹捷中（2001），杨昭军与师义民（1994）研究了市场信息不完全的情形，郭文旌与雷鸣（2006）进一步研究了市场信息不完全而且股价跳跃的情形；Karatzas、Lehoczky 与 Shreve（1990）研究了多人投资消费的情形；Karatzas 与 Shreve（1998），Karatzas 与 Wang（2000）研究了市场不完全的情形；Hakansson（1969），Karatzas 与 Wang（2000）研究了终止时间不确定的情形；Xu 与 Chen（1998），明宗峰、郭文旌与胡奇英（2004）研究了借贷利率与存款利率不等的情形；郭文旌等（2005，2010）研究了投资对象中含衍生证券的情形；刘海龙与吴冲锋（2002）研究了随机方差的情形。

本书主要应用均值—方差分析方法和最大化效用方法研究动态证券组合投

资决策以及在保险资产组合投资的应用问题。本书的内容分为以下几个部分：

第2章介绍本书涉及的相关数学知识和相关概念。

第3章针对我国市场不允许卖空的限制，探讨了在一般情形以及负债投资情形下的单期投资策略选择问题。

第4章研究了终止时间T不确定的M—V最优投资组合选择问题。首先假定T是个一般的随机变量，得到了多阶段和连续时间状态下的最优投资组合与有效前沿。再进一步假定T是个随机过程，得到跳跃扩散市场下的最优投资策略与有效前沿。

第5章研究了两类特殊消费的投资消费决策问题：一类是消费为固定模式，另一类是消费品为可存品与非可存品的组合。运用随机控制方法分别得到HARA函数以及等弹性效用函数情形下的最优投资消费策略，并对固定消费模式的影响进行了分析。

第6章研究了当市场系数是随机时的投资决策问题。这里考虑了股票价格为连续和有跳的两种情形。

第7章探讨了市场信息不完全的情形下的投资决策问题。

第8章将期权纳入投资对象，研究投资消费问题。将期权定价理论与投资消费理论结合起来，研究了标的资产服从扩散过程、跳跃扩散过程两种情形下的投资消费问题。前者用随机动态规划原理得到HARA函数情形下的最优投资消费策略，后者用鞅方法得到了一般效用函数情形的最优投资消费策略。最后还研究了期权买卖价格不同、风险资产不一定为期权标的资产的投资消费问题，也得到了HARA函数情形下的最优投资消费策略的解析形式。

第9章探讨了投资决策理论的一个应用，即保险公司的投资决策问题。与一般投资者不同，保险公司在投资过程中，同时征收保费和有不确定的赔付，所以对保险公司的投资决策问题涉及两个风险：一是承保风险，二是投资风险。在本章我们应用均值—方差以及均值—CaR模型成功解决了保险公司的投资决策问题。