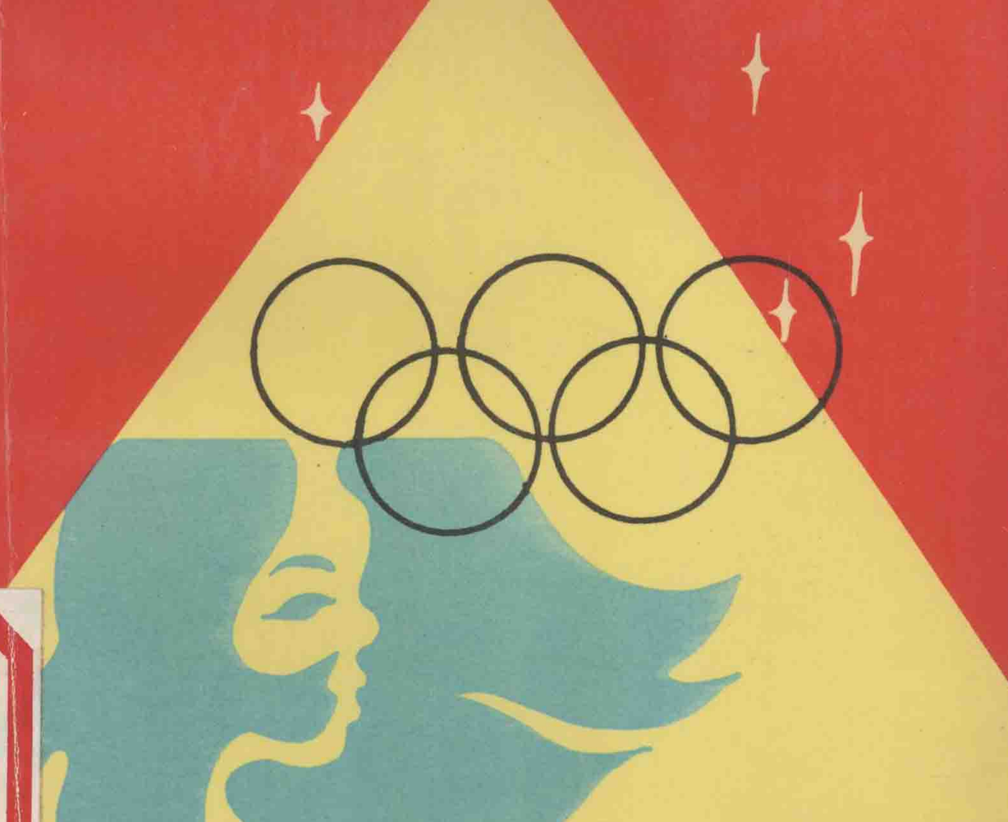
首届全国数学奥林匹克命题比赛精选

《中学数学》杂志编辑部 编



四川大学出版社

首届全国数学奥林匹克命题比赛精选

《中等数学》杂志编辑部　编

四川大学出版社

1992・8

（川）新登字 014 号

责任编辑： 谭同余
封面设计： 冯先洁

首届全国数学奥林匹克命题比赛精选

《中等数学》杂志编辑部编

四川大学出版社出版发行（成都四川大学内）
四川省新华书店经销　　郫县犀浦印刷厂印刷
850×1168mm　1/32　6.875印张　140千字
1992年8月第一版　　1992年8月第一次印刷
印数：10000 册
ISBN 7-5614-0525-1/O·68　　定价：3.50元

序

你面前的这本书，是首届全国数学竞赛命题比赛的一个总结，也是展示八十年代我国竞赛命题研究成果的一个窗口。书中收入了73个题目及3篇竞赛命题研究方面的文章。

大家知道，到八十年代末期，我国数学竞赛界面临的形势，一方面是国内竞赛经过近10年的顽强生长，立足已稳，走上轨道，另一方面是自1985年起，我国竞赛走向世界，在IMO赛事中成绩突出，进入国际数学奥林匹克强国行列。在这种情况下，如何进一步提高我国数学竞赛的水平，并在国际上继续保持领先地位，就成为我国数学竞赛界的一个重大课题。其中，竞赛命题研究的展开、深化、突破和创新，就是这个大课题中的一个重要的关键性的子课题。因为说到底，

竞赛的水平如何，要看试题的质量，而试题的质量又取决于命题研究的水平。

竞赛命题研究，是竞赛界一项开创性的学术工作，也是一种艰苦的创造性劳动。一道高质量的赛题，不仅象一件珍贵的艺术品，闪耀着创造者智慧的火花，而且在启迪青少年的思维、培养人才方面有着不可估量的社会效益。希望数学竞赛界诸同仁都来加入命题研究的行列，把竞赛命题研究工作大大向前推进一步。

随着这本书的出版，首届数学竞赛命题比赛似乎可以划上句号了。这本书的是非功过、成败得失留待读者去评论吧。然而，数学竞赛这项事业要继续发展，命题研究工作也要继续发展。希望下届比赛能有新的突破和进展，也希望今后一届比一届办得更好。

侯国荣

1992年4月于天津师大

目　　录

关于全国数学竞赛命题有奖比赛的报告

《中等数学》编辑部

由中国数学会奥林匹克委员会、中国数学会普及工作委员会、《中等数学》杂志编辑部联合举办的全国数学竞赛命题有奖比赛，在广大读者和作者的热情关切和支持下，经过近一年的努力，已圆满结束。

举办这次比赛的目的，一是为迎接1990年在北京举行的第31届国际数学奥林匹克竞赛（IMO），二是为活跃和推动国内数学竞赛命题研究工作。

1988年10月，本刊发出举办这次命题有奖比赛的通知，立即引起广大读者和作者的强烈反响。在征稿的半年里，有近千人踊跃参赛，征得试题及解答1200余套，许多来稿还附有命题思想和题目背景、考察范围等项说明。应征稿件不仅表明了作者认真、严肃的科学精神和创作态度，而且反映了他们在数学竞赛命题研究方面的水平和成果。在应征者中，有大、中学生，研究生，大、中学校教师，教研人员，还有数学教育战线上的老专家。有的作者，数次来稿，供题多道，精神实在感人。

为搞好评审工作，设立了评审委员会（名单另发）。评委会下设初评组，复评组，秘书组。全部评审工作分如下三个阶段进

行。第一，准备阶段。将全部来稿按收到时间顺序编号，重新抄清（略去作者姓名和单位），复印，发到评委手中。第二，评审阶段。分初评、复评、评委会终审三步进行。初评组成员在认真审阅来稿的基础上，于1989年6月初进行了初评工作，筛选出70个题目进入复评。1989年8月下旬完成复评和终审工作，最终审定得奖题目共21题，评定得奖题目的基本标准是：自编，有创新，科学性准确无误，达到全国数学竞赛的命题水平。第三，整理阶段。将获奖题目，对照编号，核实作者姓名和单位，排出名单（获奖名单另发）。在这一阶段，还要对获奖题目及解答，再作一次细致核查工作，以备发表或他用。整个评审工作严密、细致、认真、公平，结果也是可信的。

应当说，全部应征题目都具有一定水平，都是作者劳动和心血的结晶。但是，获奖的毕竟是很少数。在此，我们向关注和支持这次比赛的读者、作者，表示由衷的感谢！也预祝大家在数学竞赛命题研究工作方面取得更大的成绩，并欢迎各位同本刊保持密切联系，支持我们把刊物办得更好，为推动我国数学竞赛这项事业共同努力。

由于我们初次举办这项比赛，经验不足，考虑不周，特别是宣传工作做得不够，因而发动得还不够广泛深入，肯定有许多成果未能发掘和反映出来。当然，在评审中我们也发现有个别题目创新性、科学性、周密性还有这样那样一些不足。这是需要我们今后共同努力加以改进的。

这次比赛，是一次尝试。我们感到，要进一步提高我国的数学竞赛水平，除了有关部门重视、支持，以及有关政策保证外，关键在于提高竞赛辅导员的水平。数学竞赛中的新鲜东西是层出不穷的，我们要不懈努力，不断进取，要接触新材料，研究新问题。其中，命题研究的不断深化、突破和创新，是重要的环节。用适当的方式把这支数学竞赛热心者队伍组织起来，调动起来，

把他们的研究成果集中起来，反映出来，实属必要。这不仅利于数学竞赛本身，而且对于数学教学改革，对于初等数学的研究工作，都有着重要的意义。

这次数学竞赛命题有奖比赛工作，得到天津师范大学、中国数学会和天津数学会的指导和帮助，在此我们表示衷心感谢！

评审委员会名单

主任：侯国荣　《中等数学》主编，天津师范大学副校长，教授，天津市数学会副理事长

委员：（以姓氏笔划为序）

王连笑　《中等数学》编委，特级教师

刘玉翘　《中等数学》副主编，天津市教研室数学教研室副主任，高级教师，中国数学会普委会副主任，天津市数学会副理事长

刘鸿坤　《中等数学》编委，华东师范大学副教授，中国数学会普委会常委

李成章　《中等数学》编委，南开大学副教授，中国数学会奥林匹克委员会委员

许以超　中国科学院数学所研究员，中国数学会奥林匹克委员会委员

杜锡录　山东大学副教授，中国数学会普委会副主任

单　墫　南京师范大学教授

杨亦君　《中等数学》编辑部主任，编辑

庞宗昱　《中等数学》副主编，副编审

常庚哲　中国科技大学教授

裘宗沪　《中等数学》编委，中国科学院系统科学所副研究员，中国数学会普委会主任，中国数学会奥林匹克委员会副主席

获奖名单

荣誉奖	吕学礼	人民教育出版社
一等奖	张筑生	北京大学数学系
二等奖	阿家斌	云南南涧一中
	陈胜利	福建南安五星中学
	江焕新	江苏海安县中学高二
	胡安礼	安徽芜湖市十二中
	李学武	天津师范大学数学系
三等奖	黄全福	安徽怀宁江镇中学
	张迎春	吉林镇赉劳改总队一中
	杨学枝	福建福州二十四中
	孟庆良	辽宁沈阳市三十一中
	吴伟朝	河南师范大学数学系
	齐家晖	湖北随州市职业技术教育中心
	马茂年	浙江东阳中学
	陶平生	江西南昌职业技术师范学院数学系
	陈炳堂	江苏宿迁中学
	肖振纲	湖南岳阳师范专科学校
	梁孔群	广西玉林市三中
	谢　峰	湖南娄底资江煤矿子弟学校
	刘凯年	四川重庆二十三中
	苏化明	合肥工业大学数力系
	王梦阳	广东茂名市一中高一

命题精选

命题人：张筑生

单　　位：北京大学数学系

邮政编码：100871

题目*：空间中有 1989 个点，其中任何三点不共线。把它们分成点数互不相同的30组，在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形。要使这种三角形的总数最大，各组的点数应为多少？

解　当把这1989个点分成 30 组，每组点数分别为 $n_1<n_2<\cdots<n_{30}$时，顶点分别在三个组的三角形的总数为

$$S=\sum_{1<i<j<k<30} n_i n_j n_k. \tag{1}$$

1．$n_{i+1}-n_i\leqslant 2$，$i=1, 2, \cdots, 29$．若不然，设有i_0使$n_{i_0+1}-n_{i_0}\geqslant 3$，不妨设 $i_0=1$．我们将（1）改写为

$$S=n_1 n_2\sum_{i=3}^{30} n_i+(n_1+n_2)\sum_{3<j<k<30} n_j n_k+\sum_{3<i<j<k<30} n_i n_j n_k \tag{2}$$

令$n_1'=n_1+1$，$n_2'=n_2-1$，则$n_1'+n_2'=n_1+n_2$，$n_1' n_2'>n_1 n_2$．当用n_1'，n_2'代替n_1、n_2而n_3，…，n_{30}不动时，S值变大，矛盾。

2．使 $n_{i+1}-n_i=2$的 i 值不多于 1 个。若有$1\leqslant i_0<j_0\leqslant 29$，使$n_{i_0+1}-n_{i_0}=2$，$n_{j_0+1}-n_{j_0}=2$，则当用$n_{i_0}'=n_{i_0+1}+1$，$n_{j_0+1}'=n_{j_0+1}-1$代替$n_{i_0}$，$n_{j_0+1}$而其余$n_k$不动时，容易看出$S$值变大，此不可能。

注：标*者为获奖题目。

3. 使$n_{i+1}-n_i=2$的i值恰有一个。若对所有$1\leqslant i\leqslant 29$，均有$n_{i+1}-n_i=1$，则30组的点数可分别为$m-14$，$m-13$，…，m，$m+1$，…，$m+15$。这时

$$(m-14)+\cdots+m+(m+1)+\cdots+(m+15)=30m+15,$$

即点的总数是5的倍数，不可能是1989。

4. 设第i_0个差$n_{i_0+1}-n_{i_0}=2$而其余的差均为1，于是可设

$$n_j=m+j-1,\quad j=1,\ \cdots,\ i_0;$$

$$n_j=m+j,\quad j=i_0+1,\ \cdots,\ 30。$$

因而有

$$\sum_{j=1}^{i_0}(m+j-1)+\sum_{j=i_0+1}^{30}(m+j)=1989,$$

$$30m+\sum_{j=1}^{30}j-i_0=1989,$$

$$30m-i_0=1524,$$

可见，$m=51$，$i_0=6$，即30组点的数目分别为

$$51,\ 52,\ \cdots,\ 56,\ 58,\ 59,\ \cdots,\ 82。$$

命题人：张迎春

单　　位：吉林省镇赉劳改总队第一中学

邮政编码：137308

题目*：已知$f_1(x)=x-2$，$f_2(x)=2x^2-5x+2$，$f_n(x)=\dfrac{f_{n-1}^2(x)+f_1(x)f_{n-2}(x)}{f_{n-2}(x)+f_1(x)}$（$n\geqslant3$）。试求方程$f_n(x)+f_1(x)+4=0$的根。

解　由递推公式可以求得

$$f_3(x)=2x^3-6x^2+5x-2,$$

$$f_4(x)=2x^4-8x^3+12x^2-9x+2.$$

通过观察有

$$f_2(x)=(x-1)f_1(x)+xf_1(x),$$

$$f_3(x)=(x-1)f_2(x)+xf_1(x),$$

$$f_4(x)=(x-1)f_3(x)+xf_1(x),$$

$$\cdots\cdots$$

一般地，

$$f_n(x)=(x-1)f_{n-1}(x)+xf_1(x)(n\geqslant2). \qquad (1)$$

用数学归纳法证明。

当$n=2$时，（1）式显然成立。

假设当$n=k$时，（1）式成立，即有

$$f_k(x)=(x-1)f_{k-1}(x)+xf_1(x).$$

那么，当$n=k+1$时，根据递推公式

$$f_{k+1}(x)=\frac{f_k^2(x)+f_1(x)f_{k-1}(x)}{f_{k-1}(x)+f_1(x)}$$

$$=\frac{f_k(x)[(x-1)f_{k-1}(x)+xf_1(x)]+f_1(x)f_{k-1}(x)}{f_{k-1}(x)+f_1(x)}$$

$$=\frac{f_k(x)[(x-1)f_{k-1}(x)+(x-1)f_1(x)]}{f_{k-1}(x)+f_1(x)}$$

$$+\frac{f_k(x)f_1(x)+f_1(x)f_{k-1}(x)}{f_{k-1}(x)+f_1(x)}$$

$$=\frac{[(x-1)f_k(x)+xf_1(x)][f_{k-1}(x)+f_1(x)]}{f_{k-1}(x)+f_1(x)}$$

$$=(x-1)f_k(x)+xf_1(x).$$

可知，当$n=k+1$时，（1）式也成立。因此，对任意的自然数$n\geqslant 2$，（1）式都成立。

由（1）式可知，

$$f_n(x)=(x-1)f_{n-1}(x)+x(x-2).$$

故
$$\begin{aligned}f_n(x)+x&=(x-1)[f_{n-1}(x)+x]\\&=(x-1)^2[f_{n-2}(x)+x]\\&=(x-1)^3[f_{n-3}(x)+x]\\&\cdots\cdots\\&=(x-1)^{n-1}[f_1(x)+x]\\&=2(x-1)^n.\end{aligned}$$

所以，$f_n(x)=2(x-1)^n-x$。代入原方程则有

$$2(x-1)^n-x+x-2+4=0,$$

即 $(x-1)^n=-1$。

从而， $x-1=\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$。

注：此题容易从$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$的解析式中观察出$f_n(x)$的通项公式：$f_n(x)=2(x-1)^n-x$。可用第二数学归纳法予以证明。

命题人：高书宽

单　　位：河南师大数学系

邮政编码：453002

题目：对任意自然数对(k,h)，定义函数$f(k,h)$如下：

（i）$f(1,1)=1$；

（ii）$f(i+1,j)=f(i,j)+2(i+j)$，

$f(i,j+1)=f(i,j)+2(i+j-1)$。

若$f(k,h)=1989$，求所有的自然数对(k,h)。

解　由（i），（ii）递推得

$$f(2,1)=f(1,1)+2(1+1)=1+2\cdot 2,$$

$$f(3,1)=f(2,1)+2(2+1)=1+2\cdot 2+2\cdot 3,$$

……

$$\begin{aligned}f(k,1)&=f(k-1,1)+2[(k-1)+1]=f(k-1,1)+2k\\&=f(k-2,1),+2(k-1)+2k\\&=\cdots\\&=1+2\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+2k\\&=1+(k-1)(k+2),\end{aligned}\tag{1}$$

其中k为自然数。应用数学归纳法易证（1）式的正确性。同样，应用递推和数学归纳法易得

$$f(k,2)=f(k,1)+2(k+1-1)=f(k,1)+2k,$$

$$f(k,3)=f(k,2)+2(k+2-1)=f(k,1)+2k+2(k+1),$$

……

$$f(k,h)=f(k,h-1)+2(k+h-1-1)$$