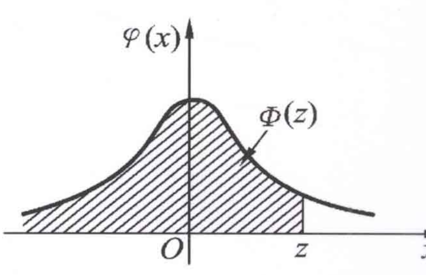


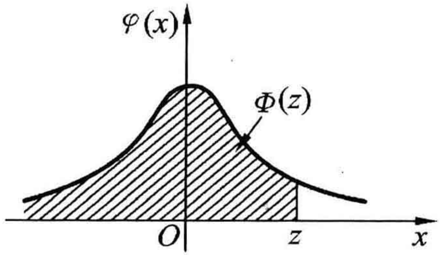
高等学校应用型本科经管类基础课“十二五”规划教材

概率论与数理统计

GAILVLUN TONGJI

▶ 主编　吴小霞　许芳　朱家砚

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com



高等学校应用型本科经管类基础课“十二五”规划教材

概率论与数理统计

GAILVLUN ... TONGJI

▶ **主编** 吴

▶ **编委** （按姓氏笔画排序）

马建新　朱家砚　许　芳　孙新蕾
吴小霞　何友鸣　邹顺华　陈玉蓉
孟晓华　贾启禹　强静仁

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/吴小霞　许芳　朱家砚　主编.—武汉：华中科技大学出版社，2013.2
ISBN 978-7-5609-8411-7

Ⅰ.概…　Ⅱ.①吴…　②许…　③朱…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教材　②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 230569 号

概率论与数理统计　　吴小霞　许芳　朱家砚　主编

责任编辑：史永霞
封面设计：龙文装帧
责任校对：朱　玢
责任监印：张正林
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　　排：武汉市兴明图文信息有限公司
印　　刷：武汉科源印刷设计有限公司
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：16.5
字　　数：340 千字
版　　次：2013 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：33.00 元

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118　竭诚为您服务

序

课本乃一课之“本”.虽然高校的教材一般不会被称为“课本”,其分量也没有中小学课本那么重,但教材建设实为高校的基本建设之一,这大概是多数人都接受或认可的.

无论是教还是学,教材都是不可或缺的.一本好的教材,既是学生的良师益友,亦是教师之善事利器.应该说,这些年来,我国的高校教材建设工作取得了很大的成绩.其中,举全国之力而编写的“统编教材”和“规划教材”,为千百万人的成才作出了突出的贡献.这些“统编教材”和“规划教材”无疑具有权威性;但客观地说,随着我国社会改革的深入发展,随着高校的扩招和办学层次的增多,以往编写的各种“统编教材”和“规划教材”,就日益显露出其弊端和不尽如人意之处.其中最为突出的表现在于两个方面.一是内容过于庞杂.无论是“统编教材”还是“规划教材”,由于过分强调系统性与全面性,以至于每本教材都是章节越编越长,内容越写越多,不少教材在成书时接近百万字,甚至超过百万字,其结果既不利于学,也不便于教,还增加了学生的经济负担.二是重理论轻技能.几乎所有的“统编教材”和“规划教材”都有一个通病,即理论知识的分量相当重甚至太重,技能训练较少涉及.这样的教材,不要说“二本”、“三本”的学生不宜使用,就是一些“一本”的学生也未必适合.

现代高等教育背景下的本专科合格毕业生应该同时具备知识素质和技能素质.改革开放以后,人们都很重视素质教育;毫无疑问,素质教育中少不了知识素质的培养,但是仅注重学生知识素质的培养而轻视实际技能的获得肯定是不对的.我们都知道,在任何国家和任何社会,高端的研究型人才毕竟是少数,应用型、操作型的人才正是社会所需的人才.因此,对于“二本”尤其是“三本”及高职高专的学生来说,在大学阶段的学习中,其知识素质与技能素质的培养具有同等的重要性.从一定意义上说,为了使其动手能力和实践能力明显强于少数日后从事高端研究的人才,这类学生技能素质的培养甚至比知识素质的培养还要重要.

学生技能素质的培养涉及方方面面,教材的选择与使用便是其中重要的一环.正是基于上述考虑,在贯彻落实科学发展观的活动中,我们结合“二本”尤其是“三本”及高职高专学生培养的实际,组织编写了这一套系列教材.这一套教材与以往的“统编教材”和“规划教材”有很大的不同.不同在哪里?其一,体例与内容有所不同.每本教材一般不超过 40 万字.这样,既利于学,亦便于教.其二,理论与技能并重.在确保基本理论与基本知识不能少的前提下,注重专业技能的训练,增加专业技能训练的内容,让“二本”、“三本”及高职高专的学生通过本专科阶段的学习,在动手能力上明显强于研究生和“一本”的学生.当然,我们的这些努力无疑也是一种摸索.既然是一种摸索,其中的不足和疏漏甚至谬误就在所难免.

中南财经政法大学武汉学院在本套教材的组织编写活动中，为了确保质量，成立了以主管教学的副院长徐仁璋教授为主任的教材建设委员会，并动员校内外上百名专家学者参加教材的编写工作. 在这些学者中，既有曾经担任国家“规划教材”、“统编教材”的主编或撰写人的老专家，也有教学经验丰富、参与过多部教材编写的年富力强的中年学者，还有很多博士、博士后及硕士等青年才俊. 他们之中不少人都已硕果累累，因而仅就个人的名利而言，编写这样的教材对他们并无多大意义. 但为了教育事业，他们都能不计个人得失，甘愿牺牲大量的宝贵时间来编写这套教材，精神实为可嘉. 在教材的编写和出版过程中，我们还得到了众多前辈、同仁及方方面面的关心、支持和帮助. 在此，对为本套教材的面世而付出辛勤劳动的所有单位和个人表示衷心的感谢.

最后，恳请学界同仁和读者对本套教材提出宝贵的批评和建议.

中南财经政法大学武汉学院院长

2011.7.16

前　言

21 世纪以来，随着我国经济建设与科学技术的迅速发展，高等教育已由“精英式”教育模式转向“大众化”教育模式，教学观念不断更新，教学改革不断深入，办学规模不断扩大．作为高等院校经管类专业三大基础数学课程之一的“概率论与数理统计”，其开设专业的覆盖面也不断扩大，为适应这一发展需要，我们编写了本教材.

本教材根据高等院校经管类本科专业概率论与数理统计课程的教学大纲及考研大纲要求编写而成，沿袭传统理论体系，注重基本概念和概率思想，强调实际应用，力求做到难易适当，易教好学，其主要特点如下.

・理论与实际应用有机结合．大量的实际应用贯穿于理论之中，体现了概率论与数理统计在各个领域中的广泛应用.

・紧密结合统计软件 R．最后一章介绍了专业统计软件——R 在各种概率与数理统计问题中的应用，加强了对学生分析问题和解决问题能力的培养.

・习题安排合理．每一节后面给出简单易算的习题，各章后面给出综合性的总习题，使学生的学习由浅入深，循序渐进.

・数学名言和数学名家．每章前附有一句数学名言，每章后介绍一位数学名家，以增强读者的学习兴趣.

本教材可以作为普通高等学校非数学专业“概率论与数理统计”课程的教材或教学参考书，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员学习使用.

本教材由吴小霞、许芳、朱家砚担任主编．在编写过程中，我们得到了许多同行的支持和帮助，在此表示感谢.

教材中难免存在错漏或不妥之处，希望广大读者批评指正.

编　者

2012 年 10 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

在数学的领域中，提出问题的艺术比解答问题的艺术更为重要.

——康托尔

在一定条件下，必然发生的自然现象和社会现象称为**确定性现象**. 例如：早晨太阳必然从东方升起；一枚硬币向上抛后必然下落；同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引. 在一定条件下，可能出现也可能不出现的自然现象和社会现象称为**随机现象**. 例如：抛掷一枚硬币可能出现正面，也可能出现反面；下周三某公司的股票可能会上涨，也可能会下跌；某人射击一次，可能会命中 0 环，1 环，…，10 环.

虽然随机现象具有不确定性，但在进行大量重复试验或观察时，出现的结果会呈现出某种规律性. 例如，在相同条件下，多次抛掷一枚均匀硬币，得到正面朝上的次数与抛掷的总次数的比值随着次数的增多会越来越接近 0.5；又如，同一门炮向同一目标发射多发同种炮弹，弹着点不一样，但是弹着点是按一定规律分布的. 随机现象在大量重复试验中呈现出来的固有规律性称为**统计规律性**.

概率论正是为研究随机现象中的数量关系而形成的一个数学分支，它在自然科学和社会科学中所体现的作用使其成为当今世界发展最为迅速的学科之一.

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验

要对随机现象的统计规律性进行研究，就需要对随机现象进行重复观察. 这种对随机现象的观察称为**随机试验**，简称**试验**，用字母 E 表示. 下面是一些试验的例子.

E_1：抛掷一枚硬币，观察出现正面 H、反面 T 的情况.

E_2：抛掷一颗骰子，观察出现的点数.

E_3：在一大批灯泡中任取一只，测试其寿命.

E_4:记录一天内进入某大型超市的顾客人数.

上述试验具有以下共同特征.

(1)**可重复性**:试验可以在相同条件下重复进行.

(2)**可观察性**:每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果.

(3)**不确定性**:每次试验出现的结果事先不能准确预知,但肯定会出现所有可能结果中的一个.

1.1.2 样本空间与随机事件

对于一个随机试验 E,通常用 Ω 来表示它的所有不同的可能结果构成的集合,称 Ω 为 E 的**样本空间**. 样本空间里的元素,即 E 的每个可能结果,称为**样本点**,记为 ω 或 ω_i.

1.1.1 节中提到的试验 E_1,E_2,E_3,E_4 所对应的样本空间 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ 分别是:

$\Omega_1=\{H,T\}$;

$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$\Omega_3=\{t\mid 0\leqslant t<+\infty\}$;

$\Omega_4=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

进行随机试验时,人们往往关心满足某种条件的样本点所组成的集合. 例如,若规定某种灯泡的寿命超过 10 000 h 为合格品,则在试验 E_3 中人们关心灯泡寿命是否大于 10 000 h. 满足这一条件的样本点组成 Ω_3 的一个子集 $A=\{t\mid t>10\,000\}$. 称 A 为试验 E_3 的一个随机事件.

一般地,称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**,简称**事件**,通常用大写英文字母 $A,B,\cdots$来表示. 设 A 是一个事件,当且仅当试验中出现的样本点 $\omega\in A$ 时,称**事件 A 在该次试验中发生**.

特别地,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**. 例如:试验 E_1 有 2 个基本事件$\{H\}$和$\{T\}$;试验 E_2 有 6 个基本事件$\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$.

样本空间 Ω 有两个特殊的子集:一个子集是 Ω 本身,由于它包含了试验的所有可能的结果,所以在每次试验中它总是发生,Ω 称为**必然事件**;另一个子集是空集$\varnothing$,它不包含任何样本点,因此在每次试验中都不发生,$\varnothing$称为**不可能事件**.

1.1.3 事件间的关系与事件的运算

事件是一个集合,因而事件间的关系和事件的运算可以按照集合之间的关系和集合运算来规定.

设试验 E 的样本空间为 Ω，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 都是随机事件.

(1)若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称 B 包含 A，或称 A 是 B 的**子事件**，记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

(2)若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$.

(3)"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"称为事件 A 与事件 B 的**和(并)事件**，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$，即 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

类似地，$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生"，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 表示"可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生".

(4)"事件 A 与事件 B 同时发生"称为事件 A 与事件 B 的**积(交)事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB，即 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

类似地，$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"，$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 表示"可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生".

(5)若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容(或互斥)**.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容$\Leftrightarrow$事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容.

可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 互不相容$\Leftrightarrow$事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 两两互不相容.

(6)"事件 A 发生而事件 B 不发生"称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记为 $A-B$，即 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$.

(7)"事件 A 不发生"称为事件 A 的**对立事件(或逆事件)**，记为 $\overline{A}$.

对任一事件 A，有 $A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$. 因此，在每次试验中，事件 A 与 $\overline{A}$ 中必有且仅有一个发生，又 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，所以 A 与 $\overline{A}$ 互逆.

事件间的关系和运算可用维恩图形象表示，如图 1-1 所示.

事件的运算满足下列运算律. 设 A,B,C 为事件，则：

(1)**交换律**　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2)**结合律**　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3)**分配律**　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4)**对偶律**　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1　一批产品有合格品也有废品，从中有放回地抽取三件产品，以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示"第 i 次抽到废品"，则可用 $A_i(i=1,2,3)$ 的运算来分别表示下列各事件.

(1)第一次和第二次抽取至少抽到一件废品：$A_1\cup A_2$.

(2)只有第一次抽到废品：$A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$.

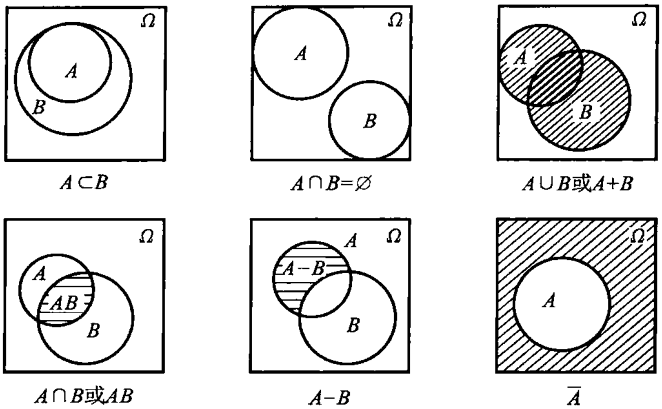


图 1-1

(3)三次都抽到废品：$A_1\cap A_2\cap A_3$.

(4)至少有一次抽到废品：$A_1\cup A_2\cup A_3$.

(5)只有两次抽到废品：$\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}$.

例 2　一名射手连续向某个目标射击三次，事件 $A_i(i=1,2,3)$表示"该射手第 i 次射击时击中目标"，试用文字叙述下列事件：

$A_1\cup A_2\cup A_3$，　$A_1A_2A_3$，　A_2-A_1，　$\overline{A_2A_3}$，　$A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$.

解　$A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示"三次射击中至少有一次击中目标"；

$A_1A_2A_3$ 表示"三次射击都击中了目标"；

A_2-A_1 表示"第二次击中了目标而第一次没有击中目标"；

$\overline{A_2A_3}=\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$表示"后两次射击中至少有一次未击中目标"；

$A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$ 表示"三次射击中至少有两次击中目标".

例 3　某城市的供水系统由甲、乙两个水源与 1，2，3 三部分管道组成（见图 1-2），每个水源都足以供应城市的用水，设事件 $A_i(i=1,2,3)$表示"第 i 部分管道正常工作". 试用 $A_i(i=1,2,3)$表示下列事件：

(1)城市能正常供水；

(2)城市断水.

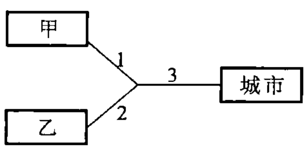


图 1-2

解　(1)"城市能正常供水"这一事件可表示为

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = A_1A_3 \cup A_2A_3;$$

(2)“城市断水”这一事件可表示为

$$\overline{(A_1 \cup A_2) \cap A_3} = (\overline{A_1 \cup A_2}) \cup \overline{A_3} = (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \cup \overline{A_3}.$$

习题 1.1

1. 写出下列随机事件的样本空间：
   (1)一口袋中装有编号分别为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个球，从中任取一个球，记录其编号；
   (2)对 20 粒种子进行发芽试验，记录发芽种子的粒数；
   (3)投掷一枚硬币直到出现 10 次正面为止，记录投掷的总次数；
   (4)将长为 1 的棒任意折成 3 段，观察各段的长度.
2. 设某工厂连续生产了 4 个零件，$A_i(i=1,2,3,4)$表示“该工厂生产的第 i 个零件是合格品”，试用 $A_i(i=1,2,3,4)$表示下列各事件：
   (1)没有一个是次品；
   (2)至少有一个是次品；
   (3)至少有三个不是次品；
   (4)只有一个是次品.
3. 设 A 表示事件“甲产品滞销，乙产品畅销”，那么对立事件 $\overline{A}$ 表示的意义是什么？
4. 设 A,B 为两个事件，若 $AB=\overline{A}\cap\overline{B}$，问 A 和 B 有什么关系？
5. 化简 $\overline{(\overline{AB}\cup C)(\overline{AC})}$.
6. 证明：$(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}=A-B$.

1.2　随机事件的概率

对于一个事件 A，在一次随机试验中可能发生，也可能不发生. 人们希望找到一个合适的数来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小. 为此，先引入频率的概念，频率描述了事件发生的频繁程度，进而引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1　频率与概率

定义 1.2.1　设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次，则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

易见，频率具有下述基本性质：

(1)**非负性** 对于任一随机事件 A，有 $f_n(A)\geqslant 0$；

(2)**规范性** 对于必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega)=1$；

(3)**有限可加性** 对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，有 $f_n(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i)$.

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数的比值，其大小表示事件 A 发生的频繁程度. 频率越大，则事件 A 发生得越频繁，这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就越大. 反之亦然. 那么，能否用频率来近似表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小呢？先看下面的例子.

例 1 抛掷硬币试验.

法国数学家蒲丰等曾先后进行过大量抛掷一枚硬币的试验，试验结果如表1-1所示.

表 1-1

试验者	抛掷次数(n)	出现正面次数(n_A)	频率($f_n(A)$)
德·摩尔根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

表 1-1 中事件 A 表示“出现正面”. 其数据表明，当试验次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 总是在 0.5 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5.

例 2 英文字母使用试验.

Dewey G. 统计了约 438 023 个英语单词中各字母出现的频率，发现各字母出现的频率不同：

A:0.078 8	B:0.015 6	C:0.026 8	D:0.038 9	E:0.126 8
F:0.025 6	G:0.018 7	H:0.057 3	I:0.070 7	J:0.001 0
K:0.006 0	L:0.039 4	M:0.024 4	N:0.070 6	O:0.077 6
P:0.018 6	Q:0.000 9	R:0.059 4	S:0.063 4	T:0.098 7
U:0.028 0	V:0.010 2	W:0.021 4	X:0.001 6	Y:0.020 2
Z:0.000 6				

数据表明：字母 E 出现的频率最高，而字母 Z 出现的频率最低. 可以认为，在英语单词中字母 E 出现的可能性最大，而字母 Z 出现的可能性最小。

大量的随机试验证实，当试验次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于某

个常数 p，即呈现出所谓的"稳定性". 下面给出概率的统计定义.

定义 1.2.2　在大量重复试验中，随机事件 A 发生的频率具有稳定性，即当试验次数 n 充分大时，频率 $f_n(A)$ 在某个固定的值 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 附近摆动，则称 p 为事件 A 发生的**概率**，记为 $P(A)=p$.

定义 1.2.2 客观地描述了事件在一次试验中发生的可能性大小，并且在许多实际问题中具有重要意义. 人们常用试验次数足够大时的频率来估计概率，且随着试验次数的增加，估计的精度会越来越高.

在实际中，人们不可能对每一个事件都做大量的试验来计算概率. 为了理论研究的需要，苏联数学家柯尔莫哥洛夫在 1933 年提出了概率的公理化定义，并以此为基础构造了概率公理化的完整结构.

1.2.2　概率的公理化定义

定义 1.2.3　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于 E 的每一个事件 A，将其对应于一个实数，记为 $P(A)$，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1)**非负性**　对于任一随机事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2)**规范性**　对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

(3)**可列可加性**　对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

1.2.3　概率的性质

由概率的公理化定义可推出概率的一些重要性质.

性质 1　$P(\varnothing)=0,P(\Omega)=1$.

性质 2(有限可加性)　设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质 3　对于任意两个事件 A,B，有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

推论　若事件 A,B 满足 $A\subset B$，有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(A)\leqslant P(B)$.

性质 4(对立事件概率)　对于任意事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 5　对于任意事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$.

性质 6(加法公式)　对于任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明　因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$，$AB\subset B$，故由性质 2 与性质 3，得