师专试用教材

高等代数

利广才 夏应祥 编

湖南教育出版社

师专试用教材

高等代数

利广才　夏应祥　编

湖南教育出版社

师 专 试 用 教 材

高 等 代 数

利广才 夏应祥 编

责任编辑：李章书

湖南教育出版社出版发行（长沙展览馆路3号）

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷一厂印刷

850×1168毫米 32开 印张：12.875 字数：327,000

1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷

印数：1——400

ISBN7—5355—1129—5/G·599

定价：5.40 元

前　言

本书是于1985年春，根据1984年 4 月教育部颁发的中学教师进修高等师范专科数学专业《高等代数教学大纲》的精神，为数学专科的函授学员编写的函授教材。后来又根据在几届函授中的试教情况，进行修改而成的。

全书内容分为三部分：多项式论、线性代数、代数基本概念。多项式论以数域上一元多项式的因式分解理论为中心内容；线性代数主要讲线性方程组的理论、向量空间和线性变换；代数基本概念，只简单介绍了代数运算、群、环和域。使读者通过这部分内容的学习，对抽象代数有较粗浅的了解。

在编排的顺序上遵循了由易到难，由简到繁；在编排的内容上遵循了由具体到抽象，由特殊到一般的原则。例如，把读者最易接受的行列式编在第一章，矩阵则集中在第二章讲授，从第四章开始，才安排较抽象的多项式论、向量空间等。对较难理解的概念，尽量做到从实例引入。对较难证明的定理，在推理过程中，做到文字流畅，叙述详细，在不影响理论严谨性的前提下，删去了一些繁琐的证明。作为数学中的基本概念——集合与映射，由于在现行中学数学教材中已作较详细的介绍，本书只在讨论向量空间时作了简要复习。

高等代数是大学数学专业的一门重要基础课程，是中学代数的继续和提高。但是，它与中学代数有很大不同。这种不同不仅表现在内容的深度上，更重要的是表现在严格的逻辑推理方法上。在学习本课程时，除了要掌握系统的代数知识，以便能够居高临下地处理中学数学教材外，还要认真领会并逐步掌握严格的逻辑推理方法，使自己的数学素质不断提高。

在本书的编写过程中，徐行教授进行了审定，谭祖林、黄根民副教授，樊启毅、徐敏讲师等对本书提出了许多宝贵意见，在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中定有不少缺点和错误，希望读者多加指正。

编　者

目　　录

第一章　行列式

§1　数环和数域……………………………………(1)

§2　排列……………………………………………(5)

§3　n 阶行列式的定义……………………………(10)

§4　行列式的性质…………………………………(16)

§5　行列式按行(列)展开…………………………(24)

§6　克莱姆法则……………………………………(39)

小结……………………………………………(43)

习题……………………………………………(44)

第二章　矩阵

§1　矩阵的概念……………………………………(50)

§2　矩阵的运算……………………………………(54)

§3　矩阵的分块……………………………………(64)

§4　矩阵的初等变换　初等矩阵…………………(68)

§5　矩阵的秩………………………………………(81)

§6　可逆矩阵………………………………………(88)

小结……………………………………………(99)

习题……………………………………………(102)

第三章　线性方程组

§1　消元法…………………………………………(108)

§2　线性方程组的公式解…………………………(120)

§3　线性方程组的解的结构………………………(126)

小结……………………………………………(132)

习题……………………………………………(136)

第四章 多项式

§1 一元多项式的定义和运算……………………………(140)
§2 多项式的整除性……………………………………(144)
§3 多项式的最大公因式………………………………(149)
§4 多项式的因式分解…………………………………(159)
§5 重因式………………………………………………(163)
§6 多项式函数与多项式的根…………………………(168)
§7 复数域和实数域上的多项式………………………(174)
§8 有理数域上的多项式………………………………(182)
小结………………………………………………(190)
习题………………………………………………(192)

第五章 向量空间

§1 集合与映射…………………………………………(195)
§2 向量空间的定义与简单性质………………………(201)
§3 向量的线性相关性…………………………………(206)
§4 维数、基与坐标……………………………………(213)
§5 基变换与坐标变换…………………………………(216)
§6 子空间………………………………………………(222)
§7 向量空间的同构……………………………………(229)
§8 齐次线性方程组的解空间…………………………(233)
小结………………………………………………(242)
习题………………………………………………(244)

第六章 线性变换

§1 线性变换的定义……………………………………(250)
§2 线性变换的运算……………………………………(254)
§3 线性变换和矩阵……………………………………(259)
§4 不变子空间…………………………………………(269)
§5 特征根和特征向量…………………………………(273)
§6 矩阵的对角化………………………………………(282)

小结……(287)
习题……(290)
第七章　欧氏空间
§1　向量的内积……(298)
§2　标准正交基……(305)
§3　正交变换……(313)
§4　子空间正交……(316)
§5　对称变换……(320)
小结……(329)
习题……(332)
第八章　对称内积和二次型
§1　对称内积……(338)
§2　二次型……(355)
§3　实数域上的二次型……(364)
§4　正定二次型……(370)
小结……(376)
习题……(381)
第九章　代数基本概念
§1　代数运算……(384)
§2　群……(386)
§3　环……(393)
§4　域……(397)
小结……(401)
习题……(402)

第一章 行列式

数是数学中的一个最基本的概念．本章的讨论就从数开始，然后再着重研究在讨论线性方程组时要用到的一个有力工具——行列式．在中学代数中曾学习过用二阶、三阶行列式解含有两个未知量和三个未知量的线性方程组；本章要建立 n 阶行列式的概念，并讨论 n 阶行列式的基本性质及计算方法，从而研究运用 n 阶行列式解含有 n 个未知量的线性方程组．

§1 数环和数域

在中学，我们从整数学到了复数，并且学过了它们的加、减、乘、除以及适合它们的运算律．这些，我们都要沿用下去．现在，我们要从代数系统，即带有运算的集合的角度来认识数．为此，我们要介绍两种集合——数环和数域．

在中学代数中介绍集合时，数集是集合的重要例子，下列符号所代表的数集，是我们熟知的数集：

N ——全体自然数组成的集合；

Z ——全体整数组成的集合；

Q ——全体有理数组成的集合；

R ——全体实数组成的集合；

C ——全体复数组成的集合．

显然，自然数集 N 中的任意两个数 a、b 的和 $a+b$ 仍是自然数，但是 $a-b$ 不一定是自然数．这一情况，我们说：自然数集 N 对加

法是封闭的，但是，N 对减法不是封闭的。沿此去理解，如下的判断是正确的：

整数集合Z对于加法、减法和乘法都是封闭的，但是数集Z对于除法就不是封闭的(例如$3\div 2\notin Z$)；复数集合 C 对于加法、减法、乘法和除法(除数不能为零)都是封闭的。

由此看来，数集Z和数集 C 不仅组成它们的元素不同，而且在这两个数集内可施行的运算也是不同的.为了反映后一种差别，我们把数集Z叫做一个数环，把数集C叫做一个数域。

数环和数域的确切定义如下：

定义 1 设S是数集C的一个非空子集，如果对于S中任意两个数a，b来说，$a+b$，$a-b$，ab都属于S，那么就称 S 是一个数环。

定义 2 设F是数集C的一个包含有非零数的子集，如果对于F中任意两个数a，b来说，$a+b$，$a-b$，ab，$a\div b(b\neq 0)$都属于F，那么就称F是一个数域。

由定义 1 和 2 可知，一个数域一定是一个数环。依定义 2，我们熟知的数集Q和R显然都是一个数域。

我们再来看一些例子和反例。

例 1 设a是任意取定的一个整数。令

$$S=\{na\mid n\in Z\}$$

那么S是一个数环。

证 设n_1，$n_2\in Z$，那么$n_1a\in S$，$n_2a\in S$，

所以 $n_1\pm n_2\in Z$，$n_1n_2a\in Z$

从而 $n_1a\pm n_2a=(n_1\pm n_2)a\in S$，

$$(n_1a)(n_2a)=(n_1n_2a)a\in S$$

所以S是一个数环。

在例 1 中，取a为每一个整数都可得到相应的一个数环，可见数环有无限多个。例如当$a=1$时，S就是整数集Z；当$a=2$时，S是由全体偶数组成的集合；当$a=0$时，$S=\{0\}$，…。这些数

集都是数环。

读者请注意，全体偶数组成的数集是一个数环，但是，全体奇数组成的数集却不是一个数环.（为什么？） 另一点，数环 $S=\{0\}$ 含有且只含有一个元素零，除 $S=\{0\}$ 外，其余所有数环都含有无限多个元素.（为什么？）

例 2 数集 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$ 是一个数域.

证 首先要说明 F 是 C 的含有非零数的子集.

事实上，取 $a=1$，$b=0$，

那么 $a+b\sqrt{2}=1\in F$.

再说明 F 对于加法、减法、乘法和除法都是封闭的.

任取 $a_1+b_1\sqrt{2}$，$a_2+b_2\sqrt{2}\in F$，这里，a_1，a_2，b_1，$b_2\in Q$，

因而 $(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})$

$$=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}\in F,$$

$$(a_1+b_1\sqrt{2})\cdot(a_2+b_2\sqrt{2})$$

$$=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in F.$$

如果 $a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$，那么 $a_2-b_2\sqrt{2}\neq 0$. 否则，在 $b_2=0$ 的情况下，将有 $a_2=0$，这与 $a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$ 的假设矛盾；在 $b_2\neq 0$ 的情况下，$\sqrt{2}=\dfrac{a_2}{b_2}$，这与 $\sqrt{2}$ 是无理数的事实矛盾. 现在看

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}\in F$$

所以 F 是一个数域.

例3 数集 $K=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,\ b\in Q\}$ 既不是一个数域，也不是

一个数环。

我们只要说明K不满足定义 1 和 2 中的某一要求就行了。例如，取a_1，a_2，b_1，$b_2 \in Q$，且b_1，$b_2 \neq 0$，那么

$$a_1 + b_1\sqrt[3]{2}，a_2 + b_2\sqrt[3]{2} \in K，$$

注意到$(a_1 + b_1\sqrt[3]{2})(a_2 + b_2\sqrt[3]{2})$

$$= (a_1a_2 + b_1b_2\sqrt[3]{2^2}) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt[3]{2} \notin K$$

便知K不是一个数环，更不是一个数域。（K是否满足定义中其它要求不必去管）

仿照例 2 可以说明：当N为正整数而$\sqrt{N}$是无理数时，数集$F = \{a + b\sqrt{N} \mid a，b \in Q\}$是一个数域。由此可知，数域也有无数个。其中，有理数域是最小的。

定理 1 任何数域都包含有理数域Q。

证 设F是一个数域，那么，F含有一个非零数a。因为数域F对于加、减、乘、除都是封闭的。所以

$$\frac{a}{a} = 1 \in F，$$

$$a - a = 0 \in F。$$

F 中 的数1和自己重复相加，可得到全体正整数，所以全体正整数都属于F。用零依次减去F中的所有正整数，得到全体负整数，所以F 也含有全体负整数。这样，F 就含有全体整数。因此，F 也含有任意两个整数的商（除数不为0），因而F含有全体有理数.〔证完〕

我们在这一节定义数环和数域的概念后，使高等代数能够把许多问题统一起来讨论。例如，“任意两个有理系数多项式一定有最大公因式”、“任意两个实系数多项式一定有最大公因式”、“任意两个复系数多项式一定有最大公因式”这三个论断是需要分别论证的。现在，我们可以统一起来论证“任意两个系数为数域F中的数的多项式一定有最大公因式”这一论断。

§2 排　　列

在中学代数里，我们讨论过二阶和三阶行列式。依它们的定义，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

在这一章里，我们要把二阶和三阶行列式推广为由 n 行和 n 列（n 为任意自然数）数作成的 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为了作这一推广，我们要对中学代数中已经引进的排列概念作进一步讨论。

定义 1　由 n 个数码 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序组叫做一个 n 级排列。

两个相同的 n 级排列是两个相同的有序数码组，就是说，这两个数组不仅有相同的数码，而且数码出现的顺序也相同。

中学代数中已经说明，从 n 个事物中取出 m 个事物来作成的排列共有 $P_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$ 个．n 级排列是由 n 个数码中取出 n 个数码作成的排列。因此，n 级排列共有 $P_n^n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$

个，这个乘积记作$n!$，读作n的阶乘。

例如，3级排列共有$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$个，它们是：

123，132，231，213，312，321。

下面来说明n级排列的奇偶性。

让我们来看上面的6个3级排列。排列123的3个数码是按照自然顺序排列着的，其余各个排列中，都有较大的数码排在较小的数码前面。例如，在排列132里，3比2大，但是3排在2的前面。我们说，在这个排列中，2和3构成一个反序。一般，在一个n级排列里，如果某一个较大的数码j排在某一个较小的数码i的前面，就说数码i和j构成一个反序。在一个n级排列里，出现的反序总数叫做这个排列的反序数。例如排列312的反序数是2.

n级排列$j_1j_2\cdots j_n$的反序数记作$\pi(j_1j_2\cdots j_n)$。因为n级排列$j_1j_2\cdots j_n$的反序数是1，2，…，n各数码分别与其余数码构成的反序数的和，所以我们可以按照以下方法计算$\pi(j_1j_2\cdots j_n)$：先数排在1前面的数码个数，设为m_1个，那么就有m_1个数码与1构成反序；然后把1划去，再数排在2前面未被划去的数码的个数，设为m_2，那么有m_2个数码与2构成反序；如此下去，最后看n前面有多少个未被划去的数码(显然$m_n=0$)。于是得到：

$$\pi(j_1j_2\cdots j_n) = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

例1　计算$\pi(451362)$。

解　$m_1 = 2$，$m_2 = 4$，$m_3 = 2$，$m_4 = m_5 = m_6 = 0$

所以，$\pi(451362) = 8$。

例2　计算$\pi(n(n-1)\cdots 321)$。

解　$m_1 = n-1$，$m_2 = n-2$，…，$m_{n-1} = 1$，$m_n = 0$

所以，$\pi(n(n-1)\cdots 321) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 + 0$

$$= \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

例3　设$\pi(i_1i_2\cdots i_n) = s$，求$\pi(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)$。

解　设

$$\pi(i_1 i_2 \cdots i_n) = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = s,$$

$$\pi(i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1) = m_1' + m_2' + \cdots + m_n',$$

这里m_r是在排列$i_1 i_2 \cdots i_n$中，数码r前面的较r大的数码的个数，m_r'是在排列$i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$中数码$r$前面的较$r$大的数码的个数．因而$m_r'$是在排列$i_1 i_2 \cdots i_n$中，数码$r$后面的较$r$大的数码的个数。以上$r=1, 2, \cdots, n$。我们知道，在$n$级排列中较$r$大的数码共有$n-r$个，所以

$$m_r + m_r' = n - r$$

$$m_r' = n - r - m_r \qquad r = 1, 2, \cdots, n$$

所以

$$\begin{aligned}
&\pi(i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1) = m_1' + m_2' + \cdots + m_n' \\
&= (n-1-m_1) + (n-2-m_2) + \cdots + (n-n-m_n) \\
&= n \cdot n - (1+2+\cdots+n) - (m_1+m_2+\cdots+m_n) \\
&= n^2 - \frac{(n+1)n}{2} - s = \frac{(n-1)n}{2} - s.
\end{aligned}$$

定义 2 反序数为奇数的排列叫奇排列，反序数为偶数的排列叫偶排列。

例如，416352是6级的偶排列，321是3级的奇排列。

下面讨论排列的对换。

定义 3 把一个排列中的两个数码i和j交换位置，而其余数码的位置不改变，叫做对这个排列施行一个对换并用符号(i, j)来表示。

对一个n级排列$i_1 \cdots i_j \cdots i_k \cdots i_n$施行一个对换$(i_j, i_k)$将得到另一个$n$级排列$i_1 \cdots i_k \cdots i_j \cdots i_n$。这一情形可表示为

$$i_1 \cdots i_j \cdots i_k \cdots i_n \xrightarrow{(i_j,\, i_k)} i_1 \cdots i_k \cdots i_j \cdots i_n.$$

排列的对换具有下列性质：

(1) 如果对一个n级排列A施行对换(i, j)得到另一个n级排列B，那么对排列B施行同一个对换(i, j)就会得到排列A。这是

明显的。

例如 $3421 \xrightarrow{(2,3)} 2431 \xrightarrow{(2,3)} 3421$。

(2) 任意一个n级排列$i_1 i_2 \cdots i_n$都可以通过一系列对换变成n级排列$12\cdots n$。

事实上，对$i_1 i_2 \cdots i_n$先施行对换(n, i_n)，便得到$i_1' \cdots i_{n-1}' n$，继而施行对换$(n-1, i_{n-1}')$，便得到$i_1'' \cdots (n-1)n$，继续下去，便可得到$12\cdots(n-1)n$。

(3) 任意一个n级排列$i_1 i_2 \cdots i_n$都可以通过一系列对换变成指定的另一n级排列$j_1 j_2 \cdots j_n$。

事实上，由性质(2)可知，通过一系列对换T_1可以把$i_1 i_2 \cdots i_n$变成$12\cdots n$，又可以通过另一系列对换T_2把$j_1 j_2 \cdots j_n$变成$12\cdots n$，即

$$i_1 i_2 \cdots i_n \xrightarrow{\text{对换系列}T_1} 12\cdots n$$

$$j_1 j_2 \cdots j_n \xrightarrow{\text{对换系列}T_2} 12\cdots n$$

由性质(1)，我们有

$$12\cdots n \xrightarrow{\text{对换系列}T_2} j_1 j_2 \cdots j_n$$

综上可得

$$i_1 i_2 \cdots i_n \xrightarrow{\text{对换系列}T_1} 12\cdots n \xrightarrow{\text{对换系列}T_2} j_1 j_2 \cdots j_n.$$

上式表示，对n级排列$i_1 i_2 \cdots i_n$先施行对换系列T_1，再施行对换系列T_2，便得到n级排列$j_1 j_2 \cdots j_n$。

(4) 对任意一个n级排列逐步施行一个对换，可以得到全体n级排列。($n!$个)

这一性质可用数学归纳法证明。这里，我们只验证对4级排列3124逐步施行一个对换得出全体4级排列($4!=24$个)：

$$3142 \xrightarrow{(2,4)} 3124 \xrightarrow{(1,4)} 3421 \xrightarrow{(1,2)} 3412 \xrightarrow{(2,4)}$$

$$3214 \xrightarrow{(1,4)} 3241 \xrightarrow{(1,3)} 1243 \xrightarrow{(4,3)} 1234 \xrightarrow{(2,4)}$$

$$1432 \xrightarrow{(2,3)} 1423 \xrightarrow{(3,4)} 1324 \xrightarrow{(2,4)} 1342 \xrightarrow{(1,2)}$$

$$2341 \xrightarrow{(1,4)} 2314 \xrightarrow{(3,4)} 2413 \xrightarrow{(1,3)} 2431 \xrightarrow{(1,4)}$$

$$2134 \xrightarrow{(3,4)} 2143 \xrightarrow{(2,4)} 4123 \xrightarrow{(2,3)} 4132 \xrightarrow{(1,2)}$$

$$4231 \xrightarrow{(1,3)} 4213 \xrightarrow{(2,3)} 4312 \xrightarrow{(1,2)} 4321$$

现在看一看,对一个排列施行一个对换,排列的奇偶性有什么变化，我们看 3 级排列132。$\pi(132)=1$，它是一个奇排列. 对它施行一个对换 (1,2)，得到 3 级排列231。$\pi(231)=2$，得到的是一个偶排列. 这一现象具有一般性.

定理 1　每一个对换都改变排列的奇偶性.

证　1°　被对换的两个数码是相邻两个数码的情形，论断是正确的。

事实上，设给定的排列为

$$\overbrace{\cdots}^{A},\ i,\ j,\ \overbrace{\cdots}^{B},$$

其中A与B 分别代表各有若干数码的固定排列.施行对换 $(i,\ j)$，得

$$\overbrace{\cdots}^{A},\ j,\ i,\ \overbrace{\cdots}^{B}.$$

比较这两个排列的反序数，显然，经过这个对换，属于 A或B 的数码的位置没有改变，因此这些数码所构成的反序数没有改变. 同时i，j与A或B中的数码所构成的反序数也没有改变. 但是，如果在所给排列中有$i<j$，那末经过对换 $(i,\ j)$ 后，i与j就构成一个反序.因而所得排列的反序数比原来的排列的反序数增多一个. 反之，若所给排列中有$i>j$，那么所得排列的反序数会减少一个。总之，排列的奇偶性一定会改变。