"十二五"重点图书

研究生系列教材

应用泛函分析

胡国恩　朱月萍　刘宏奎　刘占卫　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

"十二五"重点图书 ★研究生系列教材

应用泛函分析

胡国恩 朱月萍
刘宏奎 刘占卫 编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是为工科研究生学习"应用泛函分析"课程而编写的．全书共七章，主要内容包括预备知识、度量空间、赋范线性空间与线性算子、Hilbert空间、谱理论简介、广义函数简介以及Fourier变换．全书表述通俗，论证严谨，概念有解释，定理有说明，主要结论后均有例题，适合初学者使用．

本书可作为高等学校工科相关专业研究生或高年级本科生的教材或教学参考书，也可供数学物理和工程技术领域的科研人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/胡国恩等编著．一西安：西安电子科技大学出版社，2012．5
(研究生系列教材)
ISBN 978-7-5606-2784-7

Ⅰ．①应… Ⅱ．①胡… Ⅲ．①泛函分析—研究生—教材
Ⅳ．①O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第054503号

策　　划　李惠萍
责任编辑　王　瑛　李惠萍
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　西安文化彩印厂
版　　次　2012年5月第1版　2012年5月第1次印刷
开　　本　787毫米×960毫米　1/16　印张14.5
字　　数　284千字
印　　数　1～2000册
定　　价　27.00元

ISBN 978-7-5606-2784-7/O·0131

XDUP　3076001-1

序

泛函分析作为现代分析学的一部分，主要研究Banach空间与Hilbert空间以及这些空间上的映射，相关的理论分别于1922年、1909年建立. 作为大学课程，“泛函分析”也已有超过半个世纪的历史了. 随着科学技术的进步，数学自身及其在理论物理、工程技术等领域的应用要求越来越高，将数学模型一般化，进而阐明一些普遍规律便显得特别重要. 泛函分析最重要的特点之一是综合运用分析、拓扑与代数的方法，研究无穷维空间及这些空间上的映射的重要问题. 工科研究生和高年级本科生自然需要一本基本的教材，能够让初学者从学习和训练中加深对数学的理解和认识，领略泛函分析的基本思想以及泛函分析在工程技术领域的应用，太多太深的内容并不适合他们的数学基础和实际需要.

这本《应用泛函分析》教材，强调泛函分析的基础知识与实际应用两个方面，它介绍了度量空间、Banach空间、Hilbert空间的基本概念及其特性，并对谱理论、广义函数作了初步论述. 应该说，这些内容已经基本满足了工科研究生的需要. 为了做好必要的准备，本书扼要介绍了Lebesgue测度与积分. 最后所介绍的Fourier变换的基本知识和主要结论可进一步展示泛函分析的应用.

本书是编者在长期从事“应用泛函分析”的教学实践基础上完成的. 全书内容基础，论述简明，例题、习题丰富，对应用上重要的内容如Lebesgue控制收敛定理、Banach压缩映射原理、线性算子的有界性定理、Hilbert空间的标准正交基、紧算子的谱理论、Fourier变换的$L^2(\mathbf{R}^n)$理论都做了严格论证，对重要概念和定理都尽量用通俗的语言加以解释，有利于初学者理解和领会泛函分析的思想. 本书对于工程技术中常用的一些数学基础和重要结论、方法也适当涉及，又兼篇幅不长，可谓工科泛函分析的一本好教材，特为之序.

郑维行

2011年12月于南京大学

“十二五”重点图书　　研究生系列教材

编审委员会名单

前　　言

众所周知，刺激数学发展的动力，或者说数学家们孜孜不倦地追求的目标，是数学理论的完美性和数学应用的广泛性．在理论的完美性和应用的广泛性这两点结合上，泛函分析是表现得最和谐的数学分支之一．一方面，随着自然科学和工程技术的快速发展，学科之间相互交叉融合越来越普遍，作为现代数学的核心内容之一，泛函分析的思想、方法和工具已经越来越多地渗透到数学的各个分支；另一方面，在通信、信号与信息处理、自动控制等诸多工程领域，泛函分析也起着日益重要的作用．对于工科有关专业高年级的本科生和研究生来说，学习泛函分析，不仅可以掌握现代分析理论中某些重要的思想方法和理论工具，更重要的是有助于提高数学素养，加深对数学的认识和理解．

编者长期从事工科“应用泛函分析”的教学工作．在教学实践中，编者发现：对于工科研究生来说，由于此前基本上没有接触过实变函数理论，因而对许多基本的分析思想尚且感觉不易接受，期望读者在没有实分析基础的情况下经过一个学期(每周 3 学时)的学习就能全面系统地掌握泛函分析的内容是不现实的．例如，对一个初学游泳者来说，最重要的是能够在水上先漂起来，至于姿势好看与否暂且可以不管．基于这样的教学指导思想，编者在总结、梳理近年来的教学实践的基础上编写了本书，其初衷就是让初学者尽快切入泛函分析的核心内容．在基础知识这个环节上，本书没有过于深入讲解，只是做最基本的介绍，以便读者能够尽快地进入泛函分析这个领域；在语言组织和内容编排上，本书融入编者对有关知识的理解，力求直观、朴素，将基本问题理清楚，把主要思想说明白，以求在规定的教学时间内让读者对泛函分析有基本的理解，接受泛函分析的基本思想并掌握泛函分析的主要工具．

全书分为七章：第一章“预备知识”其实是实变函数的简缩版，目的是以简单、朴素的语言大致介绍一维 Lebesgue 测度和积分，为初涉泛函分析的读者做一些必要的铺垫；第二章“度量空间”介绍泛函分析中最基本也是最有用的空

间——度量空间，主要讨论度量空间可分性、完备性、紧性等概念以及Banach压缩映射原理等重要结论；第三章“赋范线性空间与线性算子”主要介绍一类既有拓扑结构又有代数结构的空间——赋范线性空间的性质，并研究赋范线性空间上线性算子的有界性；第四章“Hilbert空间”主要介绍Hilbert空间中最基本、最重要的性质——标准正交基、投影定理、有界线性泛函的表示定理以及Riesz基；第五章“谱理论简介”主要介绍有界线性算子的谱的概念和基本性质，并讨论了两类特殊算子——紧算子和对称算子的谱；第六章“广义函数简介”主要介绍广义函数的基本概念和基本运算，对工程技术上常见的某些运算，尤其是涉及Dirac函数的运算，给出严格的定义和严谨的证明；第七章“Fourier变换”主要包括L^p空间中的Fourier变换和广义函数的Fourier变换，介绍了Fourier变换的基本理论和信号分析中常用的一些重要结论.

本书可作为高等学校通信、计算机、自动控制、信号与信息处理等专业研究生或高年级本科生的教材或教学参考书，也可供相关领域的科研人员参考.

在本书出版之际，编者衷心感谢我国数学界的老前辈陆善镇教授和郑维行教授，他们在百忙中审阅了本书的初稿，并结合自己长期的教学实践和科研经验提出了一些宝贵建议；也要感谢长期支持和帮助编者的各位老师和同行，特别是苏维宜教授、许跃生教授、陈杰诚教授、刘和平教授、杨大春教授和颜立新教授；还要感谢西安电子科技大学出版社的李惠萍同志和王瑛同志，她们为本书的出版付出了辛勤的劳动，本书能有现在的形式，与她们提出的建设性意见是分不开的. 本书的编写和出版得到了国家863计划(项目编号：2010AA064901)和国家科技支撑计划(项目编号：2006BAJ02A11)的资助；刘九芬博士、王鑫博士、石金娥博士和张启慧同志校对了本书的部分章节，在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏和差错，恳请读者批评指正.

编　者

2011年12月

常 用 符 号

本书使用的符号是标准的，对于大多数符号，在第一次出现的时候，我们都给出了其明确的意义. 没有明确说明的，我们均沿用通常的表示，例如：

• $\mathbf{C}$：复数域；$\mathbf{R}^n$：n 维欧氏空间，特别地，$\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$.

• $\mathbf{N}$：全体正整数集；$\mathbf{Z}_+$：集合 $\mathbf{N}\cup\{0\}$，$\mathbf{Z}_+^n=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):\alpha_k\in\mathbf{Z}_+,k=1,\cdots,n\}$.

• $A\cap B$：集合 A 和集合 B 的交集；$A\cup B$：集合 A 和集合 B 的并集；$A\backslash B$：集合 A 和集合 B 的差集，即属于集合 A 但是不属于集合 B 的点组成的集合；$A\subset B$：集合 A 包含于集合 B；$A\supset B$：集合 A 包含集合 B.

• $\bar{a}$：复数 a 的复共轭；$|a|$：复数 a 的模.

• $\varnothing$：空集.

• C：不依赖于主要参数的常数，在不同的地方其值可能不同；C_x：常数 C 依赖于参数 x.

• $\delta_{\lambda_1,\lambda_2}$：$\delta_{\lambda_1,\lambda_2}$ 依赖于两个给定的指标 λ_1，λ_2. 当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，$\delta_{\lambda_1,\lambda_2}=1$；当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，$\delta_{\lambda_1,\lambda_2}=0$.

• $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$：数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 的上极限；$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$：数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 的下极限.

• $\lfloor a\rfloor$：不超过 a 的最大整数.

• θ：线性空间中的零元素.

• 对于 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbf{Z}_+^n$，$|\alpha|$ 表示 $\sum\limits_{k=1}^n\alpha_k$，$\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$，$\alpha!=\prod\limits_{k=1}^n\alpha_k!$，$x^\alpha=\prod\limits_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}$，$D^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$.

目　　录

第一章 预备知识

本章介绍与泛函分析内容密切相关的实分析基础——测度和积分. 由于篇幅所限，我们只介绍 **R** 上的测度和积分，但其实几乎所有的主要结论在 $\mathbf{R}^n$ 情形都是成立的.

1.1 实数集的下确界与上确界

对于一个给定的有下界的实数集，知道它的最小值能带来很多便利. 但是很多有下界的实数集并没有最小值，我们自然想寻找一个量：它是最小值这个概念的推广，且对于最小值存在的集合与其最小值吻合. 这就是下面引入的下确界.

定义 1.1.1 设 A 是一个实数集，a 是实数. 假如

(1) a 是 A 的一个下界，即对于任意的 $b\in A$，$b\geqslant a$；

(2) a 是 A 的下界中最大的，即若 c 是 A 的一个下界，则必有 $a\geqslant c$，

则称 a 是 A 的下确界，记为 $\inf A=a$ 或 $\inf\limits_{x\in A}\{x\}=a$. 假如 A 无下界，我们就称 A 的下确界是 $-\infty$，记为 $\inf A=-\infty$.

与下确界对应，我们可以定义实数集的上确界.

定义 1.1.2 设 A 是一个实数集，a 是实数. 假如

(1) a 是 A 的一个上界，即对于任意的 $b\in A$，$b\leqslant a$；

(2) a 是 A 的上界中最小的，即若 c 是 A 的一个上界，则必有 $a\leqslant c$，

则称 a 是 A 的上确界，记为 $\sup A=a$ 或 $\sup\limits_{x\in A}\{x\}=a$. 假如 A 无上界，我们就称 A 的上确界是 ∞，记为 $\sup A=\infty$.

定义了实数集的上、下确界后，我们自然关心：对于一个给定的实数集，其上、下确界的存在性如何？下面的公理回答了这个问题.

公理 1.1.1 有上界的实数集必有上确界，有下界的实数集必有下确界.

公理 1.1.1 和 Cauchy 收敛原理、单调收敛定理、闭区间套定理、有限覆盖定理、Bolzano-Weierstrass 定理等结论等价，它们统称为实数系的基本定理.

我们给出实数集的下确界的等价定义，它不仅看起来简单，有时用起来也很方便.

引理 1.1.1 设 A 是一个实数集，a 是一个实数，则 a 是 A 的下确界的充分必要条件是下面两个条件同时成立.

(1) 对于任意的 $b\in A$，$b\geqslant a$；

(2) 任给 $\varepsilon>0$，存在 $b\in A$，使得 $b<a+\varepsilon$.

证明 先证明充分性. 由(1)成立，明显地 a 是 A 的一个下界；另一方面，如 c 是 A 的另一下界，则由(2)可知：对于任意的 $\varepsilon>0$，$c<a+\varepsilon$，令 $\varepsilon\to 0$ 得到 $c\leqslant a$. 这表明 a 是 A 的下界中最大的，即 a 是下确界.

再证明必要性. 若 a 是 A 的下确界，(1)成立是明显的；若(2)不成立，则存在 $\varepsilon>0$，使得对于任意的 $b\in A$，$b\geqslant a+\varepsilon$，于是 $a+\varepsilon$ 是 A 的一个下界，由下确界的定义可知：$a\geqslant a+\varepsilon$，这显然是不可能的. □

类似于引理 1.1.1，我们有如下结论：

引理 1.1.2 设 A 是一个实数集，a 是一个实数，则 a 是 A 的上确界的充分必要条件是下面两个条件同时成立.

(1) 对于任意的 $b\in A$，$b\leqslant a$；

(2) 任给 $\varepsilon>0$，存在 $b\in A$，使得 $b>a-\varepsilon$.

下面的命题是明显的，它表明：实数集越大，其上确界越大，而下确界越小.

命题 1.1.1 设 A、B 是两个有界实数集，$A\subset B$，则

$$\sup A\leqslant \sup B,\ \inf A\geqslant \inf B$$

例 1.1.1 设 A、B 是两个有界实数集，令 $A+B=\{a+b: a\in A,\ b\in B\}$，则

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B,\ \inf(A+B)=\inf A+\inf B$$

证明 先证明前一个式子. 明显地，我们有

$$\sup(A+B)\leqslant \sup A+\sup B$$

另一方面，由引理 1.1.2 可得：任给 $\varepsilon>0$，存在 $a\in A$，$b\in B$，使得 $a>\sup A-\varepsilon/2$，$b>\sup B-\varepsilon/2$，因此

$$\sup(A+B)>a+b>\sup A+\sup B-\varepsilon$$

结合上述估计即得到第一个等式，同理可以证明另外一个等式. □

习　题

1. 求数集$\{\sin x+\cos x: x\in\mathbf{R}\}$的上、下确界，并给予证明.

2. 设 $A\subset\mathbf{R}$ 且 $\sup A\in(0,\infty)$，$\varepsilon\in(0,1)$. 证明：存在 $a\in A$，使得对于任意的 $b\in A$，都有 $a\geqslant(1-\varepsilon)b$.

3. 从定义出发证明下确界的唯一性.

4. 设 A、B 是两个实数集且对于任意的 $x\in A$，$y\in B$，都有 $x\leqslant y$. 证明：$\sup A\leqslant\inf B$.

5. 设 A、B 是两个非负实数集，定义 $AB=\{xy: x\in A, y\in B\}$. 证明：$\inf AB=\inf A\cdot\inf B$，$\sup AB=\sup A\cdot\sup B$.

6. 设 $A\subset(0,\infty)$. 证明：当 $\inf A=0$ 时，$\sup\left\{\dfrac{1}{x}: x\in A\right\}=\infty$；当 $\inf A>0$ 时，$\sup\left\{\dfrac{1}{x}: x\in A\right\}=(\inf A)^{-1}$.

1.2　集合的基数与可数集

我们知道：集合 $A=[0,1]$和集合 $B=\{[0,1]$中的所有有理点$\}$都是无限集合(其中元素的个数无穷)，但是明显地，这两个集合中的元素“不一样多”，集合 A 中的元素要比集合 B 中的元素多，但是，到底多多少呢？集合的基数(或者说集合的势)这个概念可以帮我们解决这个问题. 引入集合的基数这个概念的目的之一是为了对无限集合的元素的多少进行比较.

定义 1.2.1　给定集合 A、B 以及这两个集合之间的一个对应关系 $\Phi: A\to B$，假如按照这个对应关系 Φ，对于任意的 $a\in A$，存在唯一的元素 $b\in B$ 与 a 相应，则称 Φ 是从 A 到 B 的映射；假如对于任意的 $a_1, a_2\in A$，当 $a_1\neq a_2$ 时，$\Phi(a_1)\neq\Phi(a_2)$一定成立，则称 Φ 是单射，或者称 Φ 是一一映射；假如对于任意的 $b\in B$，必有 $a\in A$ 使得 $b=\Phi(a)$，则称 Φ 是满射. 假如 Φ 既是单射又是满射，则称 Φ 为一一对应.

定义 1.2.2　设 A、B 是两个集合，假如存在 A、B 之间的一一对应，则称 A 和 B 是等价的，记为 $A\sim B$；凡是等价的集合称为具有相同的基数(或称为具有相同的势).

明显地，两个有限集合等价的充分必要条件是它们所含的元素的个数相等. 如果集合 A 中元素的个数为 n，则我们记 A 的基数为 $\overline{\overline{A}}=n$.

定理 1.2.1　等价关系具有“自反性、对称性和传递性”. 具体地讲，

(1) 对于任意集合 A，$A\sim A$；

(2) 若 A、B 是两个集合且 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(3) 若 A、B、C 是三个集合，且 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

这个定理的证明留作习题. 关于集合的等价，还有下面的结论.

定理 1.2.2 设 Λ 是一个指标集，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 和 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是两族集合，并且对于任意的 λ_1，$\lambda_2\in\Lambda$，$\lambda_1\neq\lambda_2$，有

$$A_{\lambda_1}\cap A_{\lambda_2}=\varnothing,\ B_{\lambda_1}\cap B_{\lambda_2}=\varnothing$$

假如对于任意的 $\lambda\in\Lambda$，$A_\lambda\sim B_\lambda$，则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\sim\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$$

证明 对于任意的 $\lambda\in\Lambda$，由于 $A_\lambda\sim B_\lambda$，因此存在 A_λ 到 B_λ 的一个一一对应 ϕ_λ. 现在令

$$\Phi(x)=\phi_\lambda(x)\qquad 若\ x\in A_\lambda$$

则 Φ 是 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 到 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$ 的一一对应，从而 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\sim\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$. □

例 1.2.1 我们知道：全体偶数的集合{2，4，6，…}、全体奇数的集合和正整数集 $\mathbf{N}$ 之间存在一一对应，所以它们具有相同的基数. 记它们的基数为 a.

定义 1.2.3 凡是与正整数集等价的集合，称为可数集；可数集和有限集合统称为至多可数集.

例 1.2.2 全体整数组成的集合 $\mathbf{Z}$ 是可数集.

证明 记 $\mathbf{N}$={全体正整数}，$\mathbf{Z}$={全体整数}. 定义 $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{N}$ 之间的映射 T 如下：

$$T(x)=\begin{cases}2x & 若\ x\ 是正整数\\ -2x+1 & 若\ x=0\ 或\ x\ 是负整数\end{cases}$$

明显地，T 是两个集合之间的一一对应. □

明显地，$\mathbf{Z}$ 中的点比 $\mathbf{N}$ 中的点多，但它们又是等价的(二者之间可以建立一一对应)，它们所含有的点的数量“一样多”. 读者初次接触集合基数的概念可能会感到困惑. 事实上，两个无限集合等价，意味着它们所含有的点的个数在无限多这个层面上属于同一等级，也就是同阶无限多.

现在介绍可数集的基本性质.

定理 1.2.3

(1) 任意无限集必有一个可数子集；

(2) 可数集的任意子集是可数集或有限集；

(3) 有限个或可数个可数集的并仍然是可数集；

(4) 有限个可数集 A_1，A_2，…，A_n 的直积

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n): a_j \in A_j (j = 1, 2, \cdots, n)\}$$

是可数集.

证明 设 A 是无限集. 任取 $a_1 \in A$, 则 $A \backslash \{a_1\}$ 仍是无限集, 取 $a_2 \in A \backslash \{a_1\}$, …, 如此无限取下去, 就得到 A 的一个可数子集 $\{a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$.

现在转向结论(2). 设 A 是可数集, $B \subset A$. 我们记

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

如果 B 是有限集, 结论得证; 如果 B 不是有限集, 令

$$\begin{aligned} n_1 &= \min\{n: a_n \in B\} \\ n_2 &= \min\{n: a_n \in B \text{ 且 } n > n_1\} \\ &\vdots \\ n_k &= \min\{n: a_n \in B \text{ 且 } n > n_{k-1}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

由于 B 是无限集, 因此按照上述方式可以得到无限个正整数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 容易看出

$$B = \{a_{n_1}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\}$$

再来证明(3). 只要证明: 可数个可数集的并为可数集. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为可数集, 令

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \backslash A_1, \cdots, B_{n+1} = A_{n+1} \backslash (\bigcup_{j=1}^{n} A_j), \cdots$$

则 $\{B_k\}_{k \geqslant 1}$ 是一列相互不交的集合且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, 因此可以假设这可数个集合 $\{A_n\}_{n \geqslant 1}$ 互不相交. 将 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中的元素先排列如下:

$$\begin{aligned} A_1&: a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots \\ A_2&: a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots \\ A_3&: a_{31}, a_{32}, \cdots, a_{3n}, \cdots \\ &\vdots \\ A_n&: a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}, \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

一直无限地排列下去, 将这些元素按 45°角方向从上往下编号, 则它们可以排列成如下的无穷列

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots, a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \cdots, a_{n-1,2}, a_{n1}, \cdots$$

(这个排列的次序是这样的：第 1 步考虑标号之和为 2 的元素，只有一个 a_{11}；第 2 步考虑标号之和为 3 的元素，有两个，即 a_{12} 和 a_{21}，先排列 a_{12} 再排列 a_{21}；…；第 n 步考虑标号之和为 $n+1$ 的元素，将这些标号之和为 $n+1$ 的元素再按照第一个标号的大小从小到大排列，一直做下去)．上述排列列出了 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 中的所有元素．由此可见，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集．

最后来证明(4)．我们采用数学归纳法．先证明 $n=2$ 时结论成立．设

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots\}, \quad A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots\}$$

则 $A_1 \times A_2$ 中的元素都可以表示为(a_{1k}, a_{2l})，其中 k，l 均为正整数．我们将这些元素按如下方式排列：第 1 步考虑标号 k 与 l 之和为 2 的元素，只有一个(a_{11}, a_{21})；第 2 步考虑标号 k 与 l 之和为 3 的元素，有两个，即(a_{11}, a_{22})和(a_{12}, a_{21})；…；第 n 步考虑标号之和为 $n+1$ 的元素，有 n 个，即(a_{11}, a_{2n})，$(a_{12}, a_{2,n-1})$，…，(a_{1n}, a_{21})．如此一直做下去，不难看出 $A_1 \times A_2$ 是可数个互不相交的有限集合的并，当然是可数集．

现在假设任意 n 个可数集的直积是可数集，若 A_1，A_2，…，A_n，A_{n+1} 是可数集，由归纳假设，$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 是可数集，注意到

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1} = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}$$

我们知道 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1}$ 也是可数集． □

很自然，我们要问：可数个可数集的直积是否也是可数集？对这个问题的回答是否定的．事实上，如取 $A_n = A = \{0, 1\}$，下面的例 1.2.4 表明：$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \cdots$ 和$[0, 1]$是等价的．

作为前面两个定理的推论，可以得到定理 1.2.4．

定理 1.2.4 设 A 是无限集，B 是至多可数集，则 $A \sim A \cup B$(无限集并上一个至多可数集，其基数不变)．

证明 不妨设 $A \cap B = \varnothing$，利用定理 1.2.3 中的(1)，可取到 A 的可数子集 A_1，则 $A_1 \cup B$ 可数．注意到

$$A \backslash A_1 \sim A \backslash A_1, \; A_1 \sim A_1 \cup B$$

由定理 1.2.2 可知

$$A = (A \backslash A_1) \cup A_1 \sim (A \backslash A_1) \cup (A_1 \cup B) = A \cup B$$ □

定理 1.2.4 表明：任一无限集可以和它的某个真子集等价．容易看出：有限集不具备这一性质．

例 1.2.3 全体有理数集 Q 是可数集．

证明 我们记

$$A_1=\{全体整数\},\ A_2=\{n/2,\ n是整数\},\ \cdots,\ A_k=\{n/k,\ n是整数\},\ \cdots$$
则对于任意的正整数 k，A_k是可数集，注意到
$$\mathbf{Q}=\bigcup_{k是正整数} A_k$$
由定理 1.2.3 中的(3)可知有理数集是可数集. □

很自然，我们要问：是否所有无限数集都是可数集？

定理 1.2.5 集合 $I=[0,1]$不是可数集.

证明 如果 $I=[0,1]$是可数集，则 $I=\{a_1,\cdots,a_n,\cdots\}$. 将 I 分为等长的三个闭区间：I_{11}、I_{12}、I_{13}，则其中必有一个不含 a_1，记这个闭区间为 I_1；再将 I_1等分为三个闭区间，则其中至少有一个区间不含 a_2，记这个区间为 I_2. 依此步骤无限地做下去，可得一列闭区间$\{I_n\}_{n\geqslant 1}$，它们满足
$$I_{n+1}\subset I_n,\ l(I_n)\to 0$$
这里 $l(I_n)$表示 I_n的长度. 由闭区间套定理可知，存在唯一的实数 a，$a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. 但是对于任意的 k，$a\neq a_k$，所以 $a\notin[0,1]$. 这和 $a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$矛盾. □

定义 1.2.4 不是可数集的无限集称为不可数集；凡是和$[0,1]$等价的集合 A 的基数称为连续基数，记为 $\overline{\overline{A}}=c$.

由定理 1.2.4 知道：
$$\{无理数\}\sim\mathbf{Q}\cup\{无理数\}=\mathbf{R}$$
这表明：无理数集合的基数是 c，它是不可数集. 所以，“无理数比有理数多”.

例 1.2.4 设 n 是正整数，令
$$X=\{\{a_1,\cdots,a_k,\cdots\}:a_k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\},\ k是正整数\}$$
这个集合称为 n 元数列集，其基数为 c.

证明 对于给定的 n 元数列$\{a_k\}_{k\geqslant 1}$，假如存在正整数 N 使得 $k>N$ 时 $a_k=0$，我们就称$\{a_k\}_{k\geqslant 1}$是有限 n 元数列，不是有限 n 元数列的 n 元数列称为无限 n 元数列. 明显地，有限 n 元数列的全体是可数集. 现在令
$$X_0=\{无限\ n\ 元数列\}$$
由定理 1.2.4，我们只要证明：$X_0\sim(0,1]$. 对于任意的 $x\in(0,1]$，存在唯一的正整数 k_1，$1\leqslant k_1\leqslant n$，使得
$$\frac{k_1-1}{n}<x\leqslant\frac{k_1}{n}$$
注意到 $x-\dfrac{k_1-1}{n}\in(0,1/n]$，于是存在唯一的正整数 k_2，$1\leqslant k_2\leqslant n$，使得