ZUI YOUHUA
Lilun Yu Fangfa

高等教育“十二五”规划教材

最优化理论与方法

李占利 主编

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

高等教育“十二五”规划教材

最优化理论与方法

主　编　李占利
副主编　张卫国　库向阳

中国矿业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍最优化的基本理论和算法，反映该学科的发展动态和成果。主要内容包括基本概念、线性规划、整数规划、无约束优化、有约束优化、动态规划、现代优化方法等。每章附有适量习题，书后附有部分源程序，以利于教师教学和学生自学。

本书可作为数学类、统计学类、经管类和工科类各专业本科生和研究生教材，也可作为从事与优化相关工作的科研人员、工程技术和经济管理人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

最优化理论与方法/李占利主编．—徐州：中国矿业大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5646-1593-2

Ⅰ.①最…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①最佳化理论②最优化算法　Ⅳ.①O224②O242.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 198200 号

书　　名　最优化理论与方法
主　　编　李占利
责任编辑　周　红
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本　787×1092　1/16　**印张** 16　**字数** 399 千字
版次印次　2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　28.00 元

前　　言

最优化方法是计算数学与运筹学的一个重要交叉学科，它研究在有限种或无限种可行方案中选择最优方案，构造寻求最优方案的计算方法。最优化方法是一门应用十分广泛的学科，在科学、工程、国防、交通、管理、金融和计算机科学等领域得到了广泛应用，许多高校都把其作为相关专业本科生或研究生的必修课或选修课。

本书深入浅出，通俗易懂。努力尝试讲清每种方法的基本思想、算法和特点，尽可能避免较深较难的数学推导。本书努力尝试反映学科最新成果，将遗传算法、蚁群算法等现代优化方法在教材中通俗易懂地予以讲解。精选了具有典型意义、启发性较好的例题和习题。在编写过程中考虑到最优化学科的理论抽象性和方法实用性的特点，力图做到：① 理论上系统和完整，培养学生的理论分析、抽象概括能力；② 面向生产实际，培养学生构建优化模型、检验分析优化模型、求解优化模型的能力。

本书共 8 章，第 1 章介绍最优化方法的学科发展、最优化问题的数学模型及其基本求解方法。第 2 章主要介绍线性规划数学模型及解的性质、单纯形法、对偶理论与灵敏度分析等内容。第 3 章介绍整数规划模型、分支定界法、割平面法及其匈牙利法等算法。第 4 章介绍非线性优化基本理论，包括凸函数与凸规划、最优性条件、下降迭代法和一维搜索算法等。第 5 章介绍无约束最优化方法，包括最速下降法、共轭梯度法、牛顿法、变尺度法、步长加速法、旋转方向法、方向加速法、信赖域方法和最小二乘法等。第 6 章介绍约束最优化方法，包括可行方向法、罚函数法、乘子法、二次规划、网格法等。第 7 章介绍动态规划的思想方法、基本原理、模型的建立及求解方法，动态规划方法的应用。第 8 章介绍现代优化算法，包括禁忌搜索算法、模拟退火算法、遗传算法、蚁群算法和微粒群优化算法。每章配有适量习题，附录附有书中主要算法的 MATALAB 或 C 语言源程序，本书配有教学用幻灯片，以利于老师教学和学生自学。

本书由李占利担任主编，张卫国、厍向阳担任副主编。具体编写分工如下：第 1 章、第 3 章、第 7 章由李占利编写，第 4 章、第 5 章、第 6 章由张卫国编写，第 2 章、第 8 章和附录由厍向阳编写。全书由李占利统稿。

本书在编写过程中得到了西安科技大学教材建设和课程建设项目支持。在出版过程中得到了西安科技大学教务处、中国矿业大学出版社的鼎力相助，在此一并致谢。

尽管本书的作者多年来一直从事最优化方法的教学和研究工作，但限于水平有限和时间仓促，本书难免有不妥和错误之处，欢迎读者批评指正，以便再版时修改更正。

编　者
2012 年 6 月

目　录

第1章 绪 论

本章简明扼要地介绍了最优化方法的学科发展、最优化问题的数学模型及其求解方法。

1.1 学科简介

最优化方法是一个重要的数学分支,它研究讨论在众多的方案中什么样的方案最优以及怎样找出最优方案。例如,工程设计中如何确定设计参数,使设计方案既能满足设计要求又能降低成本,使得设计在某种意义上是最好的;资源分配中,怎样分配有限资源,使得分配方案既能满足各方面的基本要求,又能获得好的经济效益;生产计划安排中,选择怎样的计划才能提高产值和利润;原料配比问题中,怎样确定各种成分的比例,才能提高质量,降低成本;城建规划中,怎样安排工厂、机关、学校、商店、医院、住户和其他单位的布局,才能方便群众,有利于城市各行业的发展;农田规划中,怎样安排各种农作物的布局,才能保持高产稳产,发挥地区优势;军事指挥中,怎样确定最佳作战方案,才能有效地消灭敌人,保护自己,有利于战争的全局。在人类活动的各个领域中,诸如此类问题,不胜枚举。最优化这一数学分支,为这些问题的解决提供了理论基础和求解方法。最优化就是在一切可能的方案中选择一个最好的方案以达到最优目标的学科,它是一门应用广泛、实用性强的学科。

无论做哪一件事,人们总希望以最少的代价取得最大的效益,也就是力求最好,这就是最优化问题。长期以来,人们对最优化问题进行了探讨和研究。早在 17 世纪,英国的伟大科学家牛顿(Newton)创立微积分的时代,已经提出了极值问题,后来拉格朗日(Lagrange)在研究一个函数在一组等式约束条件下的极值问题时提出了乘数法。1847 年法国数学家柯西(Cauchy)研究了函数值沿什么方向下降最快的问题,提出了最速下降法。1939 年前苏联数学家康托诺维奇(Л. В. Канторович)提出了解决下料问题和运输问题这两种线性规划的求解方法。人们关于最优化问题的研究工作,随着历史的发展不断深入。但是,任何科学的进步,都受到历史的限制,直到 20 世纪 30 年代,最优化这个古老的课题并未形成独立的有系统的学科。1947 年美国数学家丹茨格(G. B. Dantzig)在研究美国空军资源的优化配置时提出了线性规划的通用解法——单纯形法。20 世纪 50 年代初用电子计算机求解线性规划获得成功。20 世纪 50 年代以后,人们从一些自然现象和规律中受到启发,提出了许多求解复杂优化问题的新方法,如 20 世纪 60 年代初,从生物进化的机理中受到启发,美国密歇根(Michigan)大学的霍兰(Holland)教授提出了遗传算法,并于 1975 年在《Adaptation in Natural and Artificial Systems》中予以系统介绍,20 世纪 80 年代中期遗传算法的研究蓬勃发展;又如,受蚂蚁觅食时的通信机制的启发,20 世纪 90 年代多里格(Dorigo)提出了蚁群优化算法(Ant Colony Optimization,ACO)来解决经典的“货郎担问题”,近年来该方法也受到了广泛重视。

由于生产和科学技术的迅猛发展,特别是计算机科学与技术的发展,使得最优化问题的

研究不仅成为一种迫切需要，而且有了求解的有力工具。最优化方法已成为发展迅速、内容丰富、应用广泛的活跃的学科。

最优化在本质上是一门交叉学科。它对许多学科产生了重大影响，并已成为不同领域中很多工作不可缺少的工具。

近半个多世纪以来，最优化方法得到了充分的研究，在理论上取得了非常重要的研究成果，在实际应用中正在发挥越来越大的作用。随着高性能电子计算机的普及，如今最优化方法已广泛地应用于军事与国防、市场销售、生产计划、库存管理、运输问题、财政会计与金融、人力资源管理、设备维修与更新、项目选择与评价、工程优化设计、计算机与信息系统、城市管理等领域，取得了巨大的经济效益和社会效益。

1.2 最优化问题的数学模型

在现实世界中，有许多最优化问题，本节通过一些例子介绍最优化问题的数学模型和有关概念。最简单的最优化问题实际上在高等数学中已遇到，就是所谓函数极值，习惯上又称之为经典极值问题，我们在此不予以讨论。

例 1-1 某工厂生产 A，B 两种产品，若生产每吨 A 产品需煤 9 t，木材 4 m^3，人力 3 个劳动日，生产每吨 B 产品需煤 4 t，木材 5 m^3，人力 10 个劳动日。已知 A，B 两种产品每吨的价格分别为 700 元和 1 200 元，并知该厂现有的资源为：煤 360 t，木材 200 m^3，可提供人力 300 个劳动日，试问应安排 A，B 产品各生产多少吨，能使该厂的产值最高？

解 先将题中有关数据列为表 1-1。

表 1-1 已知数据列表

产　品	A	B	资　源
煤	9	4	360
木材	4	5	200
人力	3	10	300
单价	700	1 200	

现在来建立其数学模型。设计划生产 A，B 产品的吨数为 x_1，x_2，产值为 s，该问题的数学模型如下：

$$\max s = 700x_1 + 1\,200x_2 \tag{1-1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 9x_1+4x_2\leqslant 360 & (1\text{-}2)\\ 4x_1+5x_2\leqslant 200 & (1\text{-}3)\\ 3x_1+10x_2\leqslant 300 & (1\text{-}4)\\ x_1,x_2\geqslant 0 & (1\text{-}5)\end{cases}$$

称式(1-1)为目标函数，式(1-2)～式(1-5)为约束条件(其中 s. t. 是 subject to 的缩写，可译为受约束于、受限制于)。称 x_1，x_2 为决策变量或设计变量。max 是 maximize 的简写，读作“极大化”或“最大化”。

例 1-2 两个构件组成对称桁架如图 1-1 所示。已知桁架的跨度 $2L$，高度 x_2 的上限 H，

承受负荷 $2P$，钢管的厚度 T，材料密度 ρ，纵向弹性模数 E 及容许应力 σ_y。试确定钢管的平均直径 x_1 及桁架的高度 x_2，使桁架的重量最小。

解　桁架的重量

$$G = 2\pi\rho T x_1 \left(L^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

它是平均直径 x_1 和高度 x_2 的函数。x_1 和 x_2 的选择不是任意的，必须满足以下几个条件：

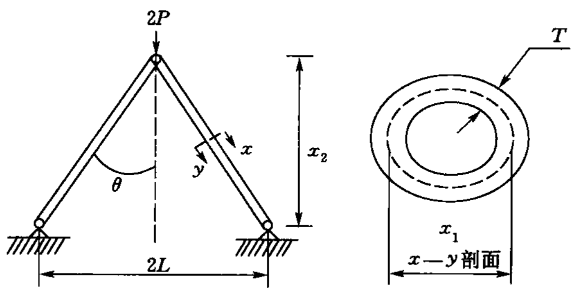

图 1-1　对称桁架示意图

(1) 由于空间限制，要求 x_2 不能超过高度上限 H，即

$$x_2 \leqslant H$$

(2) 钢管上的压应力不能超过材料的容许应力 σ_y。在负荷 $2P$ 作用下，钢管承受的压力为

$$F = \frac{P}{\cos\theta} = \frac{P\left(L^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x_2}$$

钢管的横截面面积

$$S \approx \pi T x_1$$

由此可知，钢管上的压应力为

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{P\left(L^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi T x_1 x_2}$$

因此要求

$$\frac{P\left(L^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi T x_1 x_2} \leqslant \sigma_y$$

(3) 参数的选择还必须保证在负荷 $2P$ 的作用下钢管不发生弯曲，这就要求压应力不超过临界应力 σ_l。临界应力可由欧拉公式算出：

$$\sigma_l = \frac{\pi^2 E\left(x_1^2 + T^2\right)}{8\left(L^2 + x_2^2\right)}$$

其中 E 是已知的弹性模数。按此要求应有

$$\frac{P\left(L^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi T x_1 x_2} \leqslant \frac{\pi^2 E\left(x_1^2 + T^2\right)}{8\left(L^2 + x_2^2\right)}$$

根据以上分析，桁架的最优设计问题，就是求重量函数 G 在上述 3 个约束条件下的极小值点问题。它的数学模型是：

$$\min f(x_1,x_2)=2\pi\rho T x_1(L^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_2\leqslant H \\ \dfrac{P\,(L^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi T x_1 x_2}\leqslant\sigma_y \\ \dfrac{P\,(L^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi T x_1 x_2}\leqslant\dfrac{\pi^2 E(x_1^2+T^2)}{8(L^2+x_2^2)} \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

从上面的几个例子可以看出，凡是追求最优目标的数学问题都属于最优化问题。最优化问题的数学模型的一般形式为

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0 & i\in I=\{1,2,\cdots,m\} \\ h_j(\boldsymbol{x})=0 & j\in J=\{1,2,\cdots,l\} \end{cases} \tag{1-6}$$

其中，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 称为决策变量或设计向量，n 为该问题的维数；$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 称为目标函数；$g_i\geqslant 0(i\in I)$，$h_j=0(j\in J)$称为约束函数或约束条件；$g_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}(i\in I)$与 $h_j:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}(j\in J)$分别称为不等式约束和等式约束。

令 $\boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{x}\mid g_i\geqslant 0,i\in I,h_j=0,j\in J\}$，称 $\boldsymbol{D}$ 为问题(1-6)的可行域。

$\boldsymbol{D}$ 中的点，即满足约束条件的点称为可行点或可行解。若一个最优化问题的可行域是整个空间，则称该问题为无约束问题。若可行域是有限集，则该问题为组合优化问题。

如果设计变量与时间无关，则该问题属于静态最优化问题；否则称为动态最优化问题。

如果目标函数和约束条件均为设计变量的线性函数，则称该问题为线性规划问题，否则称该问题为非线性规划问题。

如果约束中要求设计变量取整数值，则称该问题为整数规划问题。

最优化问题的数学模型包含三个要素：目标函数；设计变量；约束条件。

下面给出最优化问题的最优解概念。

定义 1-1 设 $f(x)$为目标函数，D 为可行域，$x^*\in D$，若对每一个 $x\in D$，都有 $f(x)\geqslant f(x^*)$，则称 x^* 为极小化问题 $\min f(x),x\in D$ 的最优解(全局最优解)。

定义 1-2 设 $f(x)$为目标函数，D 为可行域，$x^*\in D$，若存在 x^* 的邻域

$$N_D(x^*)=\{x\mid \|x-x^*\|<\varepsilon,\varepsilon>0\}$$

使对每一个 $x\in D\cap N_D(x^*)$，都有 $f(x)\geqslant f(x^*)$，则称 x^* 为极小化问题 $\min f(x)$，$x\in D$的局部最优解。

对于极大化问题，可类似地定义全局最优解和局部最优解，这里不再叙述。根据上述定义，显然，全局最优解也是局部最优解，而局部最优解不一定是全局最优解。但对于某些特殊情形，如以后要讲的凸规划，局部最优解也是全局最优解。

1.3 最优化问题的求解方法

对于最优化问题的求解通常有以下几类方法。

1.3.1 解析法

解析法是利用高等数学中求极值的解析方法。这种方法虽然具有概念简明、计算精确

等优点，但只适用于简单或特殊问题的寻优，对于复杂的工程实际问题通常无能为力，所以极少使用。

例 1-3 对边长为 a 的正方形铁板，在四个角处剪去相等的正方形以制成方形无盖水槽，问使用什么剪法使水槽的容积最大。

解 设剪去的正方形边长为 x，由题意易知，与此相应的水槽容积为

$$f(x)=(a-2x)^2x$$

令

$$f'(x)=2(a-2x)(-2)x+(a-2x)^2=(a-2x)(a-6x)=0$$

得两个驻点：$x=\frac{1}{2}a$，$x=\frac{1}{6}a$。

第一个驻点不合实际，这是因为剪去 4 个边长为$\frac{1}{2}a$ 的正方形相当于将铁板全部剪去。现在来判断第二个驻点是否为极大点。

因为 $f''(x)=24x-8a$，$f''(\frac{a}{6})=-4a<0$。

所以，$x=\frac{a}{6}$ 是极大点。

因此，每个角剪去边长为$\frac{a}{6}$的正方形可使所制成的水槽容积最大。

例 1-4 求侧面积为常数 $6a^2(a>0)$，体积最大的长方体体积。

解 设长方体的长、宽、高分别为 x,y,z，体积为 V，则依题意知体积为

$$V=f(x,y,z)=xyz$$

条件为

$$\varphi(x,y,z)=2(yz+xz+xy)-6a^2=0$$

由拉格朗日乘数法，考虑函数

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda(2yz+2xz+2xy-6a^2)$$
$$F'_x=yz+2\lambda(y+z)=0$$
$$F'_y=xz+2\lambda(z+x)=0$$
$$F'_z=xy+2\lambda(x+y)=0$$

由题意可知 x,y,z 应是正数，因此 $\lambda\neq0$，将上面三个等式分别乘以 x,y,z 并利用条件 $yz+zx+xy=3a^2$，得到

$$\begin{cases}xyz+2\lambda(3a^2-yz)=0\\xyz+2\lambda(3a^2-zx)=0\\xyz+2\lambda(3a^2-xy)=0\end{cases}$$

比较以上三式可得 $3a^2-yz=3a^2-zx=3a^2-xy$，从而 $x=y=z=a$。又侧面积固定的长方体的最大体积客观存在，因此侧面积固定的长方体中以正方体体积最大，其最大值为 a^3。

1.3.2 图解法

对于二维最优化问题，可以用图示的方法求解。求解过程中，先把可行域用图示的方式在坐标系中画出，然后把目标函数用等值线的形式在坐标系中画出，最后，根据等值线的变

化趋势不难求出二维最优化问题的最优解。下面举例说明。

例 1-5 用图解法求解二维最优化问题

$$\min[(x_1+2)^2+(x_2+2)]^2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1^2+x_2^2\leqslant 1\\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 画出可行域 D 见图 1-2 中阴影部分所示。

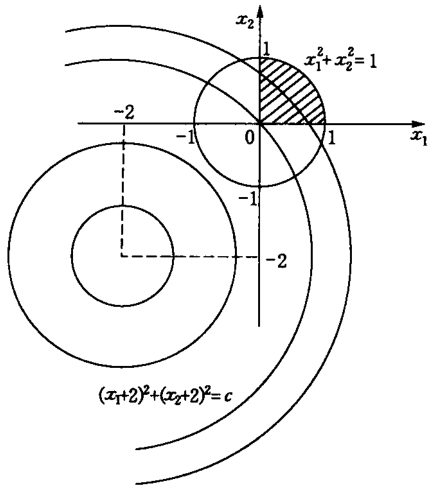

图 1-2 图解法举例

画出目标函数的等值线。该等值线是以$[-2,-2]^T$ 为圆心的同心圆，并且这簇同心圆的外圈比内圈的目标函数值大。因此，这一问题成为在可行域中找一点$[x_1,x_2]^T$，使其落在半径最小的那个同心圆上。不难看出，问题的最优解 $X^*=[x_1,x_2]^T=[0,0]^T$。

1.3.3 经典算法

经典算法包括单纯形法、动态规划方法、分枝定界法等传统算法。该类算法理论上比较完善，对于特定类型的最优化问题求解，优势明显。本书后续章节会陆续介绍。

1.3.4 迭代搜索型方法

从某一选定的初始点出发，根据目标函数、约束函数在该点的某些信息，按照某种迭代搜索的方式方法，到达一个更好的新点，从该新点出发用同样的方法再搜索更好的点，如此不断重复，直到满足某种迭代终止的准则。如本书后面要讲的步长加速法、旋转方向法、可行方向法等。

1.3.5 转化型方法

先将问题转化为另一最优化问题，然后求解。如罚函数法等。

1.3.6 演化型方法

将优化过程转化为系统动态的演化过程，用基于系统动态的演化来实现优化，如遗传算

法等。

习 题 1

一个矩形无盖油箱的外部总面积限定为 S,怎样设计可使油箱的容积最大?写出该问题的数学模型,并回答该问题是几维最优化问题。

第2章 线性规划

本章主要介绍线性规划数学模型及解的性质、单纯形法、对偶理论与灵敏度分析等内容。

2.1 线性规划的基本知识

2.1.1 线性规划的数学模型

线性规划问题数学模型的一般形式为

$$\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是决策变量，目标函数中的系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 叫做价值系数，约束条件中的常数 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 叫做资源系数，a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$）叫做约束系数或技术系数。

线性规划问题有各种不同的形式，目标函数有的要求最大化(max)，有的要求最小化(min)。约束条件可以是“$\leqslant$”或“$\geqslant$”形式的不等式，还可以是等式。决策变量通常要求是非负的，但也允许在($-\infty, +\infty$)范围内取值，即无约束，也允许是非正的。

为了便于讨论和设计统一算法，规定线性规划问题的标准形式为

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-2}$$

简写为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0 & j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{2-3}$$

在标准形式中规定各约束的右端项 $b_i \geqslant 0$，否则等式两端同乘以“-1”。

用向量符号表述时，标准形式为

$$\max z = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j = \boldsymbol{b} \\ x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{2-4}$$

其中：$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{p}_j$ 对应的决策变量是 x_j。

标准形式用矩阵描述为：

$$\max z = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-5}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n]$，$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

称 $\boldsymbol{A}$ 为约束条件的系数矩阵（一般 $m<n$），$\boldsymbol{b}$ 为资源向量，$\boldsymbol{C}$ 为价值向量，$\boldsymbol{X}$ 为决策向量。

以下讨论如何将一般形式的线性规划问题转化为标准形式。

(1) 对目标函数，若要求目标函数实现最小化，即 $\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$。这时只需将目标函数最小化转换为目标函数最大化，即令 $z' = -z$，于是得到 $\max z' = \sum_{j=1}^{n}(-c_j x_j)$。这就同标准型的目标函数形式一致了。

(2) 对约束条件，首先应确保右端项 b_i 非负，否则对约束条件两端同乘以“-1”。其次要求约束条件为等式，若约束条件为不等式，分两种情况：一种是“$\leqslant$”不等式，则可在“$\leqslant$”不等式的左端加入非负的松弛变量，把原“$\leqslant$”不等式变为等式；另一种是“$\geqslant$”不等式，则可在“$\geqslant$”不等式的左端减去一个非负的剩余变量（也可称松弛变量），把原“$\geqslant$”不等式变为等式。松弛变量和剩余变量在目标函数中的价值系数为零。

(3) 对决策变量，要求全部是非负的。当 $x_j \leqslant 0$ 时，令 $x'_j = -x_j$，显然 $x'_j \geqslant 0$；当 x_k 无约束时，令 $x_k = x'_k - x''_k$，其中 $x'_k, x''_k \geqslant 0$。

例 2-1 将下列线性规划问题化为标准型

$$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

解 令 $z'=-z$,把求 $\min z$ 改为求 $\max z'$;用 x_4-x_5 替换 x_3,其中 $x_4,x_5\geqslant 0$。

第一个约束不等式"≤"号的左端加入松弛变量 x_6,在第二个约束不等式"≥"号的左端减去剩余变量 x_7,可得到该问题的标准形式为

$$\max z'=x_1-2x_2+3x_4-3x_5+0x_6+0x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_4-x_5+x_6=7 \\ x_1-x_2+x_4-x_5-x_7=2 \\ -3x_1+x_2+2x_4-2x_5=5 \\ x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

2.1.2 线性规划问题的图解法

对于只有两个决策变量的线性规划问题,可通过在平面上作图的方法求解。图解法的步骤可概括为:① 在平面上建立坐标系;② 图示约束条件,找出可行域;③ 图示目标函数并寻求最优解。

约束条件是一组线性等式或不等式。在几何上,两个变量的线性等式是平面上的直线。线性不等式是半平面。可行解域就是由直线或半平面相交而成的平面区域,该平面区域上的任何一个点都是线性规划问题的一个可行解。

例 2-2 用图解法求解例 1-1 所示的线性规划问题。

解 首先由约束条件画出可行域。将 x_1,x_2 看成平面上的一个点的坐标,满足约束条件式(1-5)的点应在第一象限内,满足约束条件式(1-2)的点应在直线 AB(方程为 $9x_1+4x_2=360$)的左下方(包括该直线上的点,下同),满足约束条件式(1-3)的点应在直线 BC(方程为 $4x_1+5x_2=200$)的左下方,满足约束条件式(1-4)的点应在直线 CD(方程为 $3x_1+10x_2=300$)的左下方,因此满足所有约束条件的点应在第一象限的多边形 $OABCD$ 内(图 2-1),称该多边形区域为可行域,可行域内的点称为可行解。

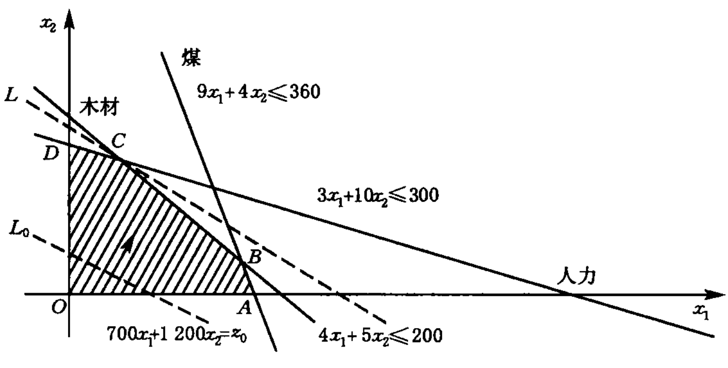

图 2-1 例 1-1 图解法示意图

其次,考虑目标函数的等值线和梯度方向。在可行域内任取一点(x_1,x_2)代入目标函数,得到一个目标值 z_0。对于 $z=700x_1+1\,200x_2$,则 $700x_1+1\,200x_2=z_0$ 表示目标函数 z 取值为 z_0 的一簇平行直线,称为等值线。由微分学得知,由 x_1 和 x_2 的价值系数为分量组成的列向量$(c_1,c_2)^{\mathrm T}=(700,1\,200)^{\mathrm T}$,即为梯度方向(图 2-1 中箭头线所示)。等值线沿梯度