清华大学出版社“十二五”规划教材

数学物理方法

（工科用）

王培光　高春霞　刘素平　张群峰　编著

清华大学出版社

数学物理方法

（工科用）

王培光 高春霞 刘素平 张群峰 编著

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是为工科院系本科工程数学课程而编写的. 全书由复变函数论、积分变换、特殊函数与数学物理方程三部分内容组成，共 16 章，分别介绍复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数展开、留数理论及其应用、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换、特殊函数、数学物理定解问题、行波法与积分变换法、分离变量法、格林函数法及其他方法等内容.

本书兼顾数学理论的严谨性和物理背景的鲜明性，紧密结合电气信息类、物理类等专业知识，介绍数学理论在工程、物理等实际问题中的应用，增强了数学理论的应用性、实用性.

本书结构层次清晰、篇幅简练、逻辑性强，适合作为高等院校的电气信息类等工科专业和物理类各专业的教材，也可供相关专业的教师和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法：工科用/王培光等编著. --北京：清华大学出版社，2012.12
ISBN 978-7-302-30553-8

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①数学物理方法—高等学校—教材　Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 260227 号

责任编辑：石　磊　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　张**：19.75　　**字　　数**：427 千字
版　　次：2012 年 12 月第 1 版　　**印　　次**：2012 年 12 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：35.00 元

产品编号：043968-01

前　言

FOREWORD

数学物理方法在物理学和电子信息、通信、自动化等很多工程技术领域中有广泛而重要的应用. 本书是专门为电气信息类等工科专业教学而编写的，力求在讲解基本数学理论的基础之上，紧密结合电气信息类、物理类等专业知识，增加介绍数学理论在工程、物理等实际问题中的应用，提高学生利用数学方法解决工程实际问题的能力，从而增强工程数学课程的应用性、实用性.

数学物理方法主要包括复变函数论、积分变换和特殊函数与数学物理方程等三部分内容.

复变函数论主要讨论解析函数的微分、积分、幂级数展开、留数理论以及共形映射等内容. 二阶线性常微分方程的幂级数解法虽然是在解析函数的幂级数展开的基础上得到的，但是由于这部分内容在教材中的主要作用是得到特殊函数，所以我们将幂级数解法放到了特殊函数部分.

积分变换主要介绍傅里叶变换、拉普拉斯变换和 z 变换，重点是傅里叶变换和拉普拉斯变换. 在介绍积分变换的基本概念和性质的基础之上，结合电气信息类等专业知识，突出了积分变换的工程应用.

特殊函数与数学物理方程主要介绍工程中非常重要的两类特殊函数——勒让德函数和贝塞尔函数以及三类典型数理方程的定解问题求解. 这部分有两个特点：一方面，将特殊函数从数理方程部分分离出来并放在了数理方程之前，这样可以使球坐标系与柱坐标系中的分离变量法的内容更简洁、思想更突出、思路更流畅。另一方面，根据数理方程定解问题的类型将数理方程的求解方法进行了适当划分，比如将积分变换法与行波法放在一章，用来介绍无界区域上的定解问题；在分离变量法的介绍中，将简单的直角坐标和极坐标情形与复杂的曲面坐标即球坐标和柱坐标情形分开讨论，通过比较二者的相同之处使学生领悟分离变量法的本质.

本书结构合理、重点突出、条理清楚，便于学生更好地领会和掌握教材的重点和难点.

本书在编写过程中得到了河北大学电子信息工程学院和清华大学出版社的大力支持和帮助，在此表示衷心地感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥和疏漏之处，恳请专家和读者不吝赐教.

编 者

2012年8月

目　录

CONTENTS

第1篇　复变函数论

第1章　复数与复变函数 …… 3

1.1　复数的概念及其表示方法 …… 3

1.1.1　复数的概念 …… 3

1.1.2　复数的几何表示 …… 3

1.2　复数的基本代数运算 …… 6

1.2.1　复数的四则运算 …… 6

1.2.2　复数的乘幂与方根 …… 7

1.3　复变函数 …… 9

1.3.1　区域的相关概念 …… 9

1.3.2　复变函数的概念 …… 10

1.3.3　复变函数的几何意义 …… 11

1.4　复变函数的极限与连续性 …… 11

1.4.1　复变函数的极限 …… 11

1.4.2　复变函数的连续性 …… 12

习题1 …… 13

第2章　解析函数 …… 15

2.1　复变函数的导数 …… 15

2.1.1　导数的概念 …… 15

2.1.2　求导法则 …… 16

2.1.3 微分的概念 …… 16
2.1.4 可导与连续的关系 …… 17
2.1.5 可导的必要条件：柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)条件 …… 17
2.1.6 可导的充要条件 …… 19
2.2 解析函数的概念及充要条件 …… 20
2.2.1 解析函数的概念 …… 20
2.2.2 解析函数的运算法则 …… 21
2.2.3 函数在区域内解析的充要条件与判别方法 …… 21
2.2.4 解析函数与调和函数的关系 …… 21
2.2.5 解析函数的构建 …… 22
2.3 初等解析函数 …… 24
2.3.1 单值函数 …… 25
2.3.2 多值函数 …… 26
2.4 解析函数的应用——平面场的复势 …… 27
2.4.1 用复变函数刻画平面向量场 …… 27
2.4.2 平面静电场 …… 28
2.4.3 平面稳定温度场 …… 30
习题 2 …… 31

第 3 章 复变函数的积分 …… 33

3.1 复变函数积分的概念与基本性质 …… 33
3.1.1 复变函数积分的概念 …… 33
3.1.2 复积分的存在条件与计算 …… 33
3.1.3 复积分的性质 …… 34
3.2 柯西定理 …… 36
3.2.1 单通区域柯西定理 …… 36
3.2.2 不定积分 …… 38
3.2.3 复通区域柯西定理 …… 38
3.3 柯西积分公式与高阶导数公式 …… 40
3.3.1 柯西积分公式 …… 40
3.3.2 高阶导数公式 …… 41
*3.3.3 柯西积分公式的几个推论 …… 42
习题 3 …… 42

第 4 章 解析函数的幂级数展开 …… 44

4.1 复数项级数与复变函数项级数 …… 44

4.1.1 复数项级数 …… 44

4.1.2 复变函数项级数 …… 46

4.2 幂级数 …… 47

4.2.1 幂级数的概念 …… 47

4.2.2 收敛圆与收敛半径 …… 48

4.2.3 幂级数的性质 …… 50

4.3 解析函数的泰勒级数展开 …… 50

4.3.1 泰勒展开定理 …… 50

4.3.2 泰勒展开方法 …… 52

4.4 解析函数的洛朗级数展开 …… 55

4.4.1 双边幂级数 …… 55

4.4.2 洛朗展开定理 …… 56

4.4.3 洛朗展开方法 …… 58

4.5 孤立奇点的分类与判别 …… 60

4.5.1 孤立奇点 …… 60

4.5.2 孤立奇点的分类 …… 60

4.5.3 极点与零点的关系 …… 62

*4.6 解析函数在无穷远点的性态 …… 63

*4.7 解析延拓 …… 65

4.7.1 解析延拓的概念 …… 65

4.7.2 唯一性定理 …… 65

4.7.3 解析延拓的方法 …… 66

习题 4 …… 66

第 5 章 留数理论及其应用 …… 68

5.1 留数及留数定理 …… 68

5.1.1 留数的概念 …… 68

5.1.2 留数定理 …… 69

5.1.3 留数的计算 …… 69

5.2 应用留数定理计算实定积分 …… 71

5.2.1 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$ 的积分 …… 72

5.2.2 形如$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$的积分 …… 72

5.2.3 形如，$\int_{0}^{\infty} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x$，$\int_{0}^{\infty} g(x)\sin mx\,\mathrm{d}x(m>0)$的积分 …… 74

*5.2.4 实轴上有奇点的情形 …… 75

*5.3 留数在力学上的应用举例 …… 77

5.3.1 电场内总电荷与功的计算 …… 77

5.3.2 机翼剖面的夏甫莱金升力公式 …… 78

习题 5 …… 78

第 6 章 共形映射 …… 80

6.1 共形映射的概念 …… 80

6.1.1 导数的几何意义 …… 80

6.1.2 共形映射的概念 …… 82

6.2 分式线性映射 …… 83

6.2.1 分式线性映射的概念 …… 83

6.2.2 分式线性映射的分解 …… 83

6.2.3 分式线性映射的性质 …… 85

6.3 唯一决定分式线性映射的条件 …… 87

6.4 几个初等函数所构成的映射 …… 91

6.4.1 幂函数 $w=z^n$（$n\geqslant 2$ 为自然数） …… 91

6.4.2 指数函数 $w=\mathrm{e}^z$ …… 92

6.5 关于共形映射的几个一般性定理 …… 93

*6.6 共形映射的应用 …… 94

6.6.1 热传导问题 …… 94

6.6.2 电位分布问题 …… 95

习题 6 …… 95

第 2 篇 积 分 变 换

第 7 章 傅里叶变换 …… 99

7.1 傅里叶级数 …… 99

7.1.1 周期函数的傅里叶展开 …… 99

7.1.2 奇函数与偶函数的傅里叶展开 …… 100

7.1.3 定义在有限区间上的函数的傅里叶展开 …… 101

7.1.4 复数形式的傅里叶级数…………………………………………………………………… 101
7.2 傅里叶变换的定义及性质 ……………………………………………………………… 102
7.2.1 非周期函数的傅里叶展开问题…………………………………………………… 102
7.2.2 傅里叶积分定理……………………………………………………………………… 102
7.2.3 傅里叶变换的概念…………………………………………………………………… 103
7.2.4 傅里叶变换的基本性质……………………………………………………………… 104
7.3 δ函数 广义傅里叶变换 ………………………………………………………………… 108
7.3.1 δ函数的定义 …………………………………………………………………………… 108
7.3.2 δ函数的导数 …………………………………………………………………………… 110
7.3.3 δ函数的性质 …………………………………………………………………………… 110
7.3.4 广义傅里叶变换……………………………………………………………………… 112
7.4 傅里叶变换在频谱分析中的应用 ………………………………………………………… 113
7.4.1 周期函数的频谱……………………………………………………………………… 113
7.4.2 非周期函数的频谱…………………………………………………………………… 115
*7.5 小波变换介绍 ……………………………………………………………………………… 116
习题 7 ……………………………………………………………………………………………… 118

第 8 章 拉普拉斯变换……………………………………………………………………………… 120

8.1 拉普拉斯变换的概念 ……………………………………………………………………… 120
8.1.1 拉普拉斯变换的引入………………………………………………………………… 120
8.1.2 拉普拉斯变换的概念………………………………………………………………… 121
8.1.3 一些常用函数的拉普拉斯变换……………………………………………………… 122
8.1.4 拉普拉斯变换存在定理……………………………………………………………… 123
8.2 拉普拉斯变换的性质 ……………………………………………………………………… 123
8.3 拉普拉斯变换的反演 ……………………………………………………………………… 128
8.3.1 部分分式反演法……………………………………………………………………… 128
8.3.2 查表法 ………………………………………………………………………………… 128
8.3.3 卷积定理法 …………………………………………………………………………… 129
8.3.4 利用留数计算反演积分法 …………………………………………………………… 129
8.4 拉普拉斯变换的应用 ……………………………………………………………………… 130
8.4.1 利用拉普拉斯变换求解线性微分(积分)方程的步骤……………………………… 130
8.4.2 拉普拉斯变换应用举例……………………………………………………………… 131
*8.5 z变换 ……………………………………………………………………………………… 134
8.5.1 z变换与拉普拉斯变换的关系 ……………………………………………………… 134
8.5.2 z变换的定义 ………………………………………………………………………… 135

8.5.3 z变换存在定理 …… 135
8.5.4 z变换的性质 …… 135
8.5.5 z变换的应用 …… 136
习题 8 …… 137

第3篇 特殊函数与数学物理方程

第9章 勒让德函数 …… 141

9.1 二阶线性齐次常微分方程的级数解 …… 141
9.1.1 二阶线性齐次常微分方程的常点与奇点 …… 141
9.1.2 方程常点邻域内的级数解定理 …… 142
9.1.3 方程正则奇点邻域内的级数解定理 …… 142
9.2 勒让德多项式的定义 …… 143
9.2.1 勒让德方程的本征值问题 …… 143
9.2.2 勒让德多项式的级数表示 …… 145
9.2.3 勒让德多项式的微分与积分表示 …… 147
9.3 勒让德多项式的性质 …… 148
9.3.1 勒让德多项式的母函数 …… 148
9.3.2 勒让德多项式的递推公式 …… 150
9.3.3 勒让德多项式的正交归一性 …… 151
9.3.4 广义傅里叶级数 …… 153
9.4 连带勒让德函数 …… 154
9.4.1 连带勒让德函数的定义 …… 154
9.4.2 连带勒让德函数的微分表达式 …… 155
9.4.3 连带勒让德函数的母函数 …… 155
9.4.4 连带勒让德函数的递推公式 …… 156
9.4.5 连带勒让德函数的正交归一性 …… 156
9.4.6 连带勒让德函数的广义傅里叶级数展开 …… 157
习题 9 …… 157

第10章 贝塞尔函数 …… 159

10.1 贝塞尔函数的定义 …… 159
10.1.1 贝塞尔方程的级数解 …… 159
10.1.2 三类贝塞尔函数 …… 160
10.2 贝塞尔函数的性质 …… 163

10.2.1 贝塞尔函数的图形与特殊值 …… 163
10.2.2 贝塞尔函数的递推公式 …… 164
10.2.3 贝塞尔函数的母函数 …… 165
10.2.4 贝塞尔方程的本征值问题 …… 166
10.2.5 贝塞尔函数的正交归一性 …… 166
10.2.6 广义傅里叶级数 …… 168
10.3 虚宗量贝塞尔函数 …… 168
10.3.1 虚宗量贝塞尔方程 …… 168
10.3.2 虚宗量贝塞尔函数的表达式 …… 168
10.3.3 虚宗量贝塞尔函数的性质 …… 170
10.4 球贝塞尔函数 …… 170
10.4.1 球贝塞尔方程 …… 170
10.4.2 球贝塞尔函数的表达式 …… 170
10.4.3 球贝塞尔函数的性质 …… 171
习题 10 …… 171

第 11 章 数学物理定解问题 …… 173

11.1 数学物理方程的导出 …… 174
11.1.1 波动方程 …… 174
11.1.2 热传导方程 …… 178
11.1.3 稳定场方程 …… 180
11.2 定解条件与定解问题 …… 181
11.2.1 初始条件 …… 181
11.2.2 边界条件 …… 182
11.2.3 定解问题及其适定性 …… 185
11.3 数学物理方程的分类 …… 186
11.3.1 二阶线性偏微分方程 …… 186
11.3.2 含两个自变量方程的分类 …… 186
11.3.3 含两个自变量方程的化简 …… 186
11.3.4 线性偏微分方程的叠加原理 …… 188
习题 11 …… 189

第 12 章 行波法与积分变换法 …… 190

12.1 一维波动方程的达朗贝尔解 …… 190
12.1.1 达朗贝尔(D'Alembert)公式 …… 190

12.1.2 解的物理意义 …… 191
12.1.3 定解问题的整体性 …… 192
12.2 傅里叶变换法求解定解问题 …… 193
12.3 拉普拉斯变换法求解定解问题 …… 196
习题 12 …… 198

第 13 章 分离变量法 …… 200

13.1 齐次泛定方程的分离变量 …… 200
13.1.1 一维波动方程的分离变量 …… 200
13.1.2 一维热传导方程的分离变量 …… 206
13.1.3 二维矩形区域内拉普拉斯方程的分离变量 …… 208
13.1.4 二维圆形区域内拉普拉斯方程的分离变量 …… 212
13.2 非齐次泛定方程的分离变量 …… 215
13.2.1 本征函数展开法 …… 216
13.2.2 冲量定理法 …… 218
13.2.3 特解法 …… 224
13.3 非齐次边界条件下的分离变量 …… 227
13.4 斯图姆-刘维尔(Sturm-Liouville)本征值问题 …… 228
13.4.1 斯图姆-刘维尔型方程 …… 229
13.4.2 斯图姆-刘维尔本征值问题的一般提法 …… 230
13.4.3 斯图姆-刘维尔本征值问题的一般性质 …… 230
习题 13 …… 231

第 14 章 正交曲面坐标系中的分离变量法 …… 234

14.1 拉普拉斯算符在球坐标系和柱坐标系中的表达式 …… 234
14.1.1 球坐标系中拉普拉斯算符的表达式 …… 234
14.1.2 柱坐标系中拉普拉斯算符的表达式 …… 235
14.2 球坐标系中的分离变量 …… 235
14.2.1 拉普拉斯方程的分离变量 …… 235
14.2.2 波动方程与热传导方程的分离变量 …… 240
14.2.3 亥姆霍兹方程的分离变量 …… 241
14.3 柱坐标系中的分离变量 …… 243
14.3.1 拉普拉斯方程的分离变量 …… 243
14.3.2 亥姆霍兹方程的分离变量 …… 245
习题 14 …… 248

第 15 章　格林函数法 ………………………………………… 249

15.1　泊松方程的格林函数法 ………………………………… 249

15.1.1　第一边值问题(狄利克雷问题) ………………………… 250

15.1.2　第二边值问题 ………………………………………… 251

15.1.3　第三边值问题 ………………………………………… 251

15.2　用镜像法和冲量定理法求格林函数 …………………… 252

15.2.1　用镜像法求格林函数 ………………………………… 252

15.2.2　用冲量定理法求格林函数 …………………………… 255

15.3　格林函数的一般求法 …………………………………… 257

习题 15 ……………………………………………………… 259

第 16 章　其他方法介绍 ………………………………………… 260

16.1　保角变换法 ……………………………………………… 260

16.1.1　保角变换及其性质 …………………………………… 260

16.1.2　几种常用的保角变换 ………………………………… 261

16.2　变分法 …………………………………………………… 265

16.2.1　变分法的概念 ………………………………………… 266

16.2.2　变分问题与微分方程的求解 ………………………… 266

习题 16 ……………………………………………………… 268

附　录

附录 A　勒让德方程的级数解(9.2.7)和(9.2.8)在 $x=\pm1$ 发散 ……………… 271

附录 B　Γ 函数(第二类欧拉积分) ……………………………… 273

附录 C　诺伊曼函数 ……………………………………………… 279

附录 D　傅里叶变换函数表 ……………………………………… 282

附录 E　拉普拉斯变换函数表 …………………………………… 283

附录 F　z 变换函数表 ………………………………………… 286

附录 G　高斯函数和误差函数 …………………………………… 289

部分习题答案 ……………………………………………………… 290

参考文献 …………………………………………………………… 300

第 1 篇

复变函数论

自变量为复数的函数就是复变函数. 在复变函数论中,许多基本概念和性质是高等数学中相应概念和性质在复数域中的推广,如极限、连续、导数、积分等. 从形式上看,虽然很多定义完全类似,但实际含义却不尽相同. 在复变函数论中,我们主要研究解析函数,它不仅对数学自身的发展起过重大作用,而且在物理学和工程技术中也有着广泛的应用.

第 1 章

复数与复变函数

本章将在中学所学复数理论的基础之上对复数作简要的复习和补充，并介绍复平面上的区域及复变函数的极限与连续性等概念，为进一步研究解析函数理论奠定必要的基础.

1.1 复数的概念及其表示方法

1.1.1 复数的概念

定义 1.1 设 x,y 为任意实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位，称形如 $x+\mathrm{i}y$ 的数为**复数**，记作 $z=x+\mathrm{i}y$. 其中 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和**虚部**，记作

$$x = \mathrm{Re}z, \quad y = \mathrm{Im}z. \tag{1.1.1}$$

特别地，当 $x=0,y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x$ 为实数，因此，复数可以看作是实数概念的推广. 当 $x=y=0$ 时，$z=0$ 为复数 0.

定义 1.2 称复数 $x-\mathrm{i}y$ 为 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**共轭复数**，记作 z^* 或 $\bar{z}$.

显然，$(z^*)^*=z$.

需要注意的是，复数是无序的，一般不能比较大小，只能说复数相等与否. 两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等. 特别地，一个复数 z 等于 0 当且仅当它的实部和虚部分别等于 0.

1.1.2 复数的几何表示

复数的定义形式 $z=x+\mathrm{i}y$ 为复数的代数表示形式. 在几何上，复数还可以用平面上的点、向量以及球面上的点来表示，分别称为复数的平面表示法和球面表示法.

1. 复平面

(1) **点表示** 一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 在本质上是由一个有序实数对 (x,y) 所唯一确定的，