華南師範學院數學系函授專修科

代數學習指導

第一分册

華南師範學院教務處印發

一九五七年一月

前　　言

這份代數學習指導，是根據蘇聯 C. И. 諾窪塞洛夫著張禾瑞等譯的“代數與初等函數”第一編代數而編寫的。目的是幫助函授生在進行自學時能够理解教材內容，掌握教材的精神實質，減少在學習過程中所碰到的一些困難。

這份“指導”是銜接算術學習指導而編寫的，其體例是與算術學習指一致，亦分爲“時間分配”全章主要內容，“要點提示，”“學習方”，“學習要求”，和“作業”等六項，前五項的精神，大體與算術學習導相同，函授生可按算術學習指導中所提出的有關事項進行學習；“時分配”一項，則是根據師院函授科數學專修班代數教學計劃中所規定時間斟酌教材難易適當分配，學習時數共 192 小時，其中學校保證時，函授生自擠　小時。由於各人的自學能力和條件不同自不能作爲硬規定，各章規定時數作爲學習進度的准則而已。

我們認爲，按照這份“指導”，對函授生的自學來說，是有幫助的；中學代數課如負數的引進，代數式的因式分解，實數，複數等的概均能有進一步的理解。希望函授生能够按着這份“指導”來進行學

我們深深地感覺到經驗不足，對函授教育的特點還不能很好掌握，編來的東西，自然難望妥善。希望學員們本着愛護函授教育事業的精在學習過程中積極提出意見，使這份指導書能够逐步趨於完善。

代數學習指導

-93697

第一章　有理數體

1.時間分配　本章共學習20小時。劃分本章內容爲四個單元，每個單元的時間分配如下：

第一單元	§1—§3	閱讀時間	四小時。
第二單元	§4—§5	閱讀時間	四小時。
第三單元	§6	閱讀時間	二小時。
第四單元	§7	閱讀時間	二小時。
複習			三小時。
作業			五小時。

2.全章主要內容：

本章的主要內容，是研究數的擴張和新數間的各種關係——運算關係及順序關係。採用形式邏輯的方法，建立起新數系統。並且根據數的運算結果，確立數環和數體的概念。各單元的內容，分述如次：

第一單元　本單元的主要內容，是在正有理數集合的基礎上建立負數和全體有理數集合的概念。負數的概念，是以帶有相反意義的量爲基礎的。相反量的例子很多，本章第§1是借助以度量帶有相反方向的直綫來引進負數。指定度量與固定方向相同的結果，用算術裡的數；度量與固定方向相反的結果，則用新數——負數——來表示。當引進新數後，以算術裡的數爲基礎，來定義有理數集合，並提出確立新數間各種關係——運算關係及順序關係的原則。這些原則，在第§1和第§3中，分別有所說明。根據這些原則，對於新數的運算應該採取怎樣定義，在第§1中舉了一些範例，這裡，首先假定算術裡的運算律在新數中繼續有效，從而作出兩個負數$-r_1$、$-r_2$之和，是數(r_1+r_2)的相反數，等等。必須注意，這裡所

舉的例子，是找尋負數運算定義的途徑，而不是負數運算結果的證明。

正有理數的順序律，能够在有理數集合中得到保持，是在有理數的大小的定義下而達到的。它的正確性，在第§3中，已證明了一些例子。有理數大小的比較，是以它的絕對值有準則的，但我們必須明確，較大的正有理數，對應於較大的絕對值，較大的負有理數，則反而對應於較小的絕對值。這一點，借助以數軸上的點來描述，那就更加具體，同時也就更能了解到，在數軸上對應於較右邊的點的數，其值較大。

第二單元 這一單元的主要內容，是研究有理數的運算及其運算法則。本來，從一個較狹的數集擴張到較廣的數集時，一般的要求是這樣的：設 B 是集合 A 擴張了的集合，那麼集合 A 的元素間的運算對於集合 B 的元素亦被定義，而且對於作爲 B 的元素的 A 的元素來說，這樣定義與原在 A 中已有的意義完全一致，運算性質也應被保持，並且，在 A 中不能施行的或者經常不能施行的運算，在 B 中應能施行。在第§4中，敘述有理數的運算時，就是按照這個要求——也是第§1所提的原則，定義出有理數的兩個運算——加法和乘法，以及這兩個運算的逆運算——減法和除法（0作除數除外）。這些定義，是完全符合上面所提出的要求。關於算術運算律，在有理數集合中能够得到保持的道理，在第§4中已作了詳細證明。這裡特別有趣的是，減法何以能够在有理數集合中永常進行，這是有功以減法的定義。因爲可歸結 $a-b$ 爲 $a+(-b)$，從加法的意義上來說，那當然可以永常進行了。另外，用符號“－”表示“負”和“減”何以不發生混淆？亦可以借助等式 $a-b=a+(-b)$ 來說明。因 $a-b$ 與 $a+(-b)$ 有相同結果之故。

在第§5中，對於有理數的運算規則，作了理論上的指示。至於如何由運算律引出任意多個個的運算規則，本節也列舉了一些用數學歸納法來證明的例子。通過這一節的學習，更能使我們認識數學歸納法的道理。

第三單元 本單元的基本內容，是講述數環和數體的概念。環和體，是現代數學的重要概念之一，爲什麼要研究它呢？我們知道，代數的基本任務之一，在於研究施以任何種類集合的元素的代數運算，而所有多項式，也構成了一個集合。在研究多項式時，自然會發生這樣的問題：多項式 x^2+2 是否可以分解？在初中教本裡，給了否定的回答。但是我們可以把它寫成如下的分解：

$$x^2+2=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)。$$

這樣看來，在同一問題上，得出了兩種不同的答案。這兩種答案的本質，依據我們在何種數間來進行運算。同理，多項式x^2-2，在有理數體的領域中是不可以分解的。但是，在實數體的領域內進行運算，則又可分解爲:

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})。$$

因爲式中的各個係數，仍是屬於實數。所以，我們在研究多項式之先，必須把數的領域重新研究。即是說，那一類數，經過某種運算，仍然是屬於這一類數。在第§6中，就是根據運算的結果，而定義出數環和數體的意義。數環和數體的例子很多，本節只研究其中的幾個。必須注意，一個數體，必然是一個數環，但一個數環，就不一定是數體。例如，全體有理數，是一個數體，同時又是一個數環。全體整數，雖然是一個數環，但不是一個數體，因爲乘法逆運算——除法不一定能施行。還須明確，除了數環以外，仍有其他的環，如多項式環。我們可以說，環中的元素如果是數，稱爲數環，如果是多項式，則稱爲多項式環。

在學習本節時，應該好好掌握數環和數體的定義，特別是要弄清楚在數環和數體的區別。這樣，才能够更好的去體會有關數環或數體的各個定理的證明。

第四單元　本節是研究數的順序與數的運算之間的關係。在第§3論述有理數時，已經得出有理數是有順序關係的。因此，有理數體是一個有序體。從第四節中，亦已得知有理數之間，已定義了運算，即在有理數集合中，已知數a、b，依照一個法則，總可以找出一個數C與之對應。所以，作爲有理數體中的數來說，是同時以存在順序與運算關係的。因此可以了解到順序與運算是有其聯系。但是，這兩種關係是如何聯系着？這是借助以運算的比較性質。本節就通過運算比較性質的證明，來表徵這兩種關係的聯系。當然，這裡所列舉的，是其中的一部份，至以詳細的討論，將見於第六章——不等式內。

3.要點提示:

（1）關於第§1中第十四頁所作的各個結果，與第§4中運算律的核驗，我們要把它分別開來。前者是說明，爲了保持算術中的運算律在有理數集合中能繼續有効，應怎樣來定義有理數的各種運算。這可以說是找尋

有理運算定義的途徑。後者是說明，當有理數的運算確立後，進而研究算術中的運算律，能否在有理數集合中繼續有效。所以，這兩處所論述的次序是相反的。這些，我們應好好體會。此外，我們也不要認爲第§1中所作的結果過程——兩個負數$-r_1$、$-r_2$的和是數r_1+r_2的反數，是第§4定義1°的證明。這種看法，是危險的。爲什麼呢？我們知道，任何一個數學證明，都要達到兩個要求：第一，要揭露被利用在證明裡的每一個概念的內容，第二，要正確地建立起在這個證明裡所應用到的每一個命題的眞實性。根據這些要求，從剛才所說的結果過程中，我們可以看出，兩個負數的和的意義，尙未揭露，且在演算過程中，曾演引了算術中的各個運算律，至於這些運算律，是否能在負數運算中繼續有効，這時還是不得而知。這樣一來，如果把剛才所說的結果過程是第§4定義1°的證明的話，那是不合要求的。所以，在第§1第2頁倒數第二行，有這樣的一句話："這些定義像任何定義一樣是不能證明的"。其中道理，是和證明的要求有關。

（2）在第§4加法定義中的推論："僅當兩有理數互爲反數時，這兩個數的和等於零"。不要把它理解成：若兩個有理數互爲反數，則這兩數的和等於零。應該把它理解爲：若兩個有理數的和等於零，則這兩數互爲反數。爲什麼呢？道理是這樣的：本來能使定理成立的條件，有所謂充分條件，必要條件，充分且必要條件。斷言："充分且必要"常常代之以斷言："當且……僅當……時"。要證明這個斷言，必須同時證明正、逆定理。此處術語"充分的"相當於術語"當……時"。要證明這個斷言，必須證明正定理；此處術語"必要的"相當於術語"僅當……時"。要證明這個斷言，必須證明逆定理。剛才所提的推論，它的正定理是這樣的：

設a、b爲正有理數，

若$a=-b$，　則$a+b=0$。

它的逆定理應該是這樣：

設$a+b=0$，　則$a=-b$。

根據以上的說明，我們就很容易理解這個推論的內容了。

這個推論，在書中僅說明一些特例。我們可以作如下的一般證明：

因$a+b=0$，

故$a+b+(-b)=0+(-b)$。　　（加法單調律）

又 $a+b+(-b)=a+0$ (加法定義2°)

$=a$， (加法定義3°)

而 $0+(-b)=-b$， (加法定義3°)

$\therefore a=-b$。 (相等的傳遞性)

（3）在第§7論述有理數體是最小體時，已證明了任何數體都含有全體有理數。最後還說出："當我們僅有有理數時，不可能引出任何其他的數體"。這句話，可具體解釋為：當我們僅有有理數時，不可能通過加、減、乘、除的運算，來引出任何其他數體的例子。為什麼呢？道理是很簡單。例如，實數體（見第四章）中，是含有無理數的，但是，有理數體中的數，通過加、減、乘、除的運算，總是得出有理數。所以，上面的論斷，是正確的。同樣，零環是最小環，這也是因為不能從零環中引出其他的環。

4.學習方法：

在精讀本章之先，將全章畧讀一遍，以便對全章有概括的了解。然後根據學習指導細閱各節內容。最後與初中教材（有關負數的引進及其運算）相比較，從而體會本教材的特點。

5.學習要求通過學習，應掌握以下幾點：

（1）負數的引進以及數的擴張原則；

（2）有理數的運算及其具體意義；

（3）有理數的順序關係及其具體意義；

（4）算術中的運算律與順序律在有理數集合中能够成立的推證；

（5）數環和數體的定義及其定理的推證。

6.作業

（1）正有理數包含那些數？減法在正有理數集合內，是否能够永遠施行？

（2）負數的概念怎樣生產？有理數包含那些數？

（3）正有理數集合中的數與負有理數集合中的數之間有什麼關係？把這兩個集合合併起來，能構成有理數集合嗎？

（4）在實際遇到兩個任意有理數的時候，怎樣來斷定它們的大小？

（5）設 a、b、c 都是正數，證明：

$$[(-a)+(-b)]+(-c)=(-a)+[(-b)+(-c)]。$$

（6）用數學歸納法，證明任意多個有理數和的，具有交換性。

（7）設 $b\neq0$ 和 $d\neq0$，證明

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}。$$

（8）由一切整數所成的集合爲什麼不是一個數體？自然數集合是不是一個數環？

（9）由一切眞分數所成的集合，是一個數環嗎？

(10) 當 $a<b$，$c<0$，不等式 $ac\angle bc$ 是否成立？

(11) 設 a 和 b 都是正數，證明

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2。$$

第二章　有理函數

（一）時間分配：本章共學習三十三小時（作業時間在內）。可把本章內容劃分六小單元進行學習：

第一單元　§ 8至§ 11共學習七小時。

第二單元　§ 12至§ 17共學習十小時。

第三單元　§ 18至§ 19共學習五小時。

第四單元　§ 20學習兩小時。

第五單元　§ 21學習兩小時。

第六單元　§ 22學習四小時。

複習　　　共三小時。

（二）本章主要內容：本章主要研究有理函數。首先研究數學式的一般概念並介紹函數的一般定義和有理函數，多項式、有理分式等一些基本概念。然後再分別研究多項式和有理分式的一些基本性質。其中主要研究了多項式的恆等和運算的概念，說明了多項式的集合是一個環。多項式的整除與帶餘式除法的理論的餘式定理、並以此爲基礎研究了多項式的根和兩多項式的最高公因式與及它們的不可約因式分解的理論問題。最後研究了有理分式及其運算的一般性質說明了有理分式的集合具有體的一切性質，因此它也叫做有理函數體。本章研究的內容與初中代數教材有密切聯系，學好這一章，便能更好的掌握初中代數教的有關部份。

（三）學習方法：本章內容的研究方法與算術中整數及分數的研究方法是平行的。因此，在學習本章以前，首先回想一下我們過去在算術中研究整數及分數的過程來推想這一章的理論系統。便可得一大概的輪廓。現在我們所研究的多項式和有理分式的那些基本性質，在形式上大都與算術

中整數及分數的那些相應的性質相似。例如：在算術中整數集合具有環的一切性質，分數集合具有體的一切性質，而現在我們亦將看到多項式也具有環的一切性質，有理分式也具有體的一切性質。整數中零與1所具有的那些特殊性質，在多項式中零多項式與零次多項式將會相似地具有。算術中從整數到進一步研究分數時必須研究兩個整數相除的情況，必須研究倍數和約數的問題並且分數概念的建立可以當作兩個整數相除的結果，某中除數應該不等於零。而現在從多項式到進一步研究有理分式所經過的過程我們亦將看到大略是相似的。當然，它們之間也是有不盡一致的地方，這是由於它們雖然都是環或體，但有些性質不是可以僅由環體的性質得到的。總之在學習本章過程中能隨時聯系對比算術中整數及分數的研究是能大大幫助我們掌握教材內容的，希學員們留意這一點。

其次，本章§8§9兩節是介紹數學式的一般概念如常數、變數，變數許可值，式子的恆等等、雖然內容不多，但很重要，應首先很好的掌握，不然以後的課文便無法領會，例如：倘是對一個式子的變數的許可值集合搞不清楚，以後在應用這些式子的時候就會產生錯誤。

（四）要點提示：

（1）§8中提到函數概念的一般定義。這是數學中一個很重要的概念。應該怎樣去理解呢？這就是說在變數y與若干變數x_1，x_2，x_3，$\cdots x_n$，之間只要給定一個對應法則，按照這個對應法則，給予變數：x_1，x_2，x_3，$\cdots x_n$。一組一定的許可值，y就有一個完全確定值與之對應，那給定的對應法則就是一種函數關係，就可以說y是x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_n，的函數。但我們要知道，對應法則不必限于用數學式來表示，有時亦不一定能用數學式來表示。例如有一個對應法則：若x是任意有理數則對應值y是x的兩倍。這個對應法則是一個函數關係，它可以用一個式子：$y=2x$來表示。而另一個例如：若x是整數則對應值y是1；若x為分數則對應值y是0。這個對應法則也是一個函數關係，但它却不能用一個數學式來表示，它只是由對應規則的描述給出的。因此一個數式只是表示它與變數的一種函數關係。課文中提到：函數概念是更一般的概念，不可以把它同數學式的概念相混，意思就在這裏。

（2）§9中所述多項式的定義是把多項式看作為變數字母的整有理函數，因此單項式是多項式的特例。這是與初中代數中的定義不同的地

方，我們學習時應該留意。

（3）§10所述零次多項式和零多項式的概念應分別清楚，零次多項式是一個異於零的數，零多項式是所有係數均為零的多項式，零多項式恆等於零和它的逆理："若對於x的一切值，多項式$f(x)$的值等於零，那麼它的一切係數等於零。"應用很大，判斷兩個多項式的恆等性，就是根據這一道理。因此可以說它是待定係數法的理論基礎。應該很好的掌握。

（4）算術中運算的對象以及運算的結果都是數。在§11中我們看到運算的對象與及運算的結果將不是數而是多項式，由於多項式的加法、乘法和減法的意義是什麼，以前我們還未知道，故必須從新規定。規定了這些意義之後，是否能遵守基本運算律亦未得知、所以也應該重新研究。只有解決了這些問題以後，我們才有可能去研究多項式的集合是否具有環的一切性質的問題。這些邏輯研究系統，應有充分的理解。這一節還介紹了"代數運算"這個概念，因此就把算術中運算的意義擴大了。

（5）§13所述帶餘式除法的可能與唯一結果的定理，與及§13所述餘式定理和用$x-\alpha$除多項式的方法，不特對我們掌握初中代數教材的有關部份有很大的幫助，且為以下幾節研究多項式的根和最高公因式與及多項式的既約因式分解等問題的基礎，應有足够的重視。

（6）§15提到拉格倫日的插入式。這個公式初接觸的時候，好像很突然，不知它是怎樣推想出來的。其實，我們從本節的例1的結果：$y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x+\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$改變為另一種形式：$y=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2$，就很容易看出適合于當$x=x_1$，$y=y_1$，$x=x_2$，$y=y_2$的條件，那末便很自然地聯想到如果當$x=x_1$，$y=y_1$；$x=x_2$，$y=y_2$；$x=x_3$，$y=y_3$，這條件來決定一個二次多項式，可以採用：

$$y=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3,$$

這一個式的確合乎條件，又是一個x的二次式。這就滿足了要求。我們從這來推廣那就不難推想到拉格倫日的插入式了。

（7）§18定理：對於任意兩個多項式$f(x)$與$\varphi(x)$存在兩個多項式

$P(x)$與$Q(x)$滿足等式：$D(f, \varphi)=P(x)f(x)+Q(x)\varphi(x)$。的證明比較抽象。現舉一例以明之：

設$f(x)=x^3-x^2+x-1$，$\varphi(x)=x^3-1$。試求$P(x)$與$Q(x)$使

$$D(f.\varphi)=P(x)f(x)+Q(x)\varphi(x).$$

解：我們首先作輾轉相除法：

$$f(x)=1.\varphi(x)+(-x^2+x)\cdots\cdots(1)$$

$$\varphi(x)=(-x-1)(-x^2+x)+(x-1)\cdots\cdots(2),$$

$$-x^2+x=-x(x-1)\cdots\cdots(3)$$

因此可知$D(f, \varphi)=x-1$。

由(1)得$-x^2+x=f(x)-\varphi(x)\cdots\cdots(1')$

由(2)得$x-1=\varphi(x)-(-x-1)(-x^2+1)\cdots\cdots(2')$

以(1')代入(2')，得$x-1=\varphi(x)-(-x-1)[f(x)-\varphi(x)]=[1+(-x-1)]\varphi(x)+(x+1)f(x)=(-x)\psi(x)+(x+1)f(x)$

即$D(f,\varphi)=x-1=(x+1)f(x)+(-x)\varphi(x)$

$$\therefore P(x)=x+1,\ Q(x)=-x.$$

（8）§20關於定理："若對於變數的一切值，多項式$f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n)$的值等於零那末它的一切係數等於零。"的證明比較抽象，現舉一個兩個變數的例來幫助理解.

設$f(x,y)\equiv Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F\equiv O$. 那末可以寫成$f(x, y)=Ax^2+(By+D)x+(Cy^2+Ey+F\equiv O$，作爲一個變數$x$的多項式恆等于零來看，那末應有

$$A\equiv O,\ By+D\equiv O,\ Cy^2+Ey+F\equiv O.$$

但最後兩個式子都是一個變數的多項式恆等於零的情况故有$B\equiv O$，$D\equiv O$，$C\equiv O$，$E\equiv O$，$F\equiv O$，這就證明了它的各係數都爲零：$A\equiv B\equiv C\equiv D\equiv E\equiv F\equiv O$

（9）§21研究了多項式因子分解的特殊方法，這些都是範例，可概括如下五種：第一種是提公因式法，第二種是分組分解法，第三種是利用公式分解法，第四種是配成完全平方法，第五種是利用剩餘定理分解法，這些方法在教學上都有很大用處。要很好掌握。

五、學習要求：通過本章學習要求能掌握與理解下面幾點：

1.數學式的一般概念，如：常數、變數、變數允許值集合，兩數學式

恆等的意義等.

2.函數，有理函數，多項式，有理分式等概念.

3.兩多項式恆等定理的證明與應用.

4.多項式集合具有環的一切性質.

5.多項式整除定理與及帶餘式除法的可能性與結果唯一性的道理.

6.用二項式$x-\alpha$除多項式的方法及其理論依據.

7.多項式的根的意義求其求法.

8.多項式的既約因式分解的可能性與唯一性，理論及其方法的一些範例.

9.有理分式的化簡及其理論依據.

10. 有理分式集合具有體的一切性質.

六、作業

§8.D給定函數$y=16x^2$，若限定y必須取正有理數值，試決定變數字母x的許可值集合.

2）試證明恆等式：$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$.

§9指出下列的式子那些是有理式？那些不是有理式：

$a)(x+y)^5$，　$b)(x+y)^{\frac{3}{4}}$，　$c)\ ax^2-2x^{\frac{1}{2}}+b$

$d)\ \frac{a}{(a-b)^2}$，　$e)\ 5x+3x-4$，　$f)\ \sqrt{5}x^2-3y+\sqrt{10}$.

§10. 用$x-2$的乘冪表示多項式x^5-32.

§13試求以$\varphi(x)=2x^2+x-1$除$f(x)=5x^4+x+1$的商和餘式.

§14. 1）以$x-2$除$x^5-2x^4+3x^3-x+7$.

2）以$x+2$除$x^5+6x^3-2x^2+6x+3$

§15有一多項式當$x=0,1,-1,-2$時該多項式的對應值分別是$3,-2,1,-1$,試求這三次多項式。

§16試求下列多項式的鑒限：

D $x^4+6x^3+12x^2+11x+6$

2）$x^4-3x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-3$

§ 17試求下列多項式的有理根:

1) $3x^4+11x^3+9x^2+11x+6$

2) $12x^4-32x^3+13x^2+8x-4$

§ 18求出 $f(x)=x^5-x^2-x+1$與$\varphi(x)=x^4-2x^3-4x^2+2x+3$的最高公因式.

§ 19把$f(x)=x^7-4x^5-x^4+4x^3-4x^2+4$表成既約因式的積.

§ 21把下列多項式分解爲因式的乘積.

1) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

2) $x^2+xy+xz-xu-yu-zu$

3) $x^4-3x^2y^2+y^4$

4) $x^2-9x-22$

§ 22求下列各分式的值:

1) $\dfrac{x^3-25x}{x^3-2x^2-15x}$，當$x=0$和$x=5$時。

2) $\dfrac{x^3-7x-6}{x^4-2x^3-7x^2+8x+12}$，當$x=2$，$x=-1$，$x=-2$時。

第三章　綫性方程組

1. 時間分配：全章學習15小時，分配如下：

I. 第一單元由 §23 到 §28　閱讀 2 小時

II. 第二單元由 §29 到 §32　閱讀 5 小時

III. 第三單元　§33　閱讀 3 小時

IV. 複　習　3 小時

V. 作　業　2 小時

2. 全章主要內容：

I 第一單元

1° 綫性方程和綫性方程組的定義；

2° 二階行列式的定義及其性質；

3° 克來姆法則－建立綫性方程組的解的一般公式的方法；

4° 含二未知數的兩個綫性方程的方程組的討論。

II 第二單元

1° 三階行列式的定義，薩魯斯法則——計寸三階行列式的方法，和求某一元的餘因子的法則；

2° 三階行列式的性質；

3° 含三未知數的三個綫性方程的方程組的討論。

III 第三單元

1° 等價方程組的定義；

2° 應用代入法、比較系數法解綫性方程組及其理論根據；

3° 應用特殊方法解具有特殊性質的綫性方程組。

3. 要點提示：

1°綫性方程是指含有未知數的一次方程；綫性方程組就是綫性方程所構成的集合。例如：

（1）$ax=b$，或 $ax+by=c$ 是含一個未知數或兩個未知數的綫性方程；

（2）$axy=b$ 或 $ax^2+bx=c$ 都不是綫性方程，而 $a\neq0$；

（3）$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array}\right\}$

是含兩個未知數的兩個綫性方程的綫性方程組

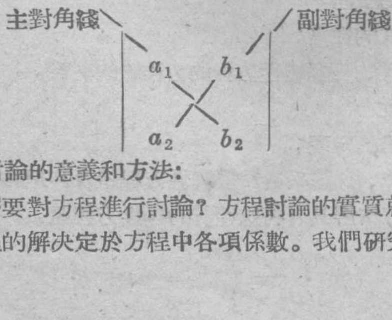
（4）$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{array}\right\}$ 和 $\left.\begin{array}{r} x+y=a \\ y+z=b \\ x+x=c \end{array}\right\}$

都是含三個未知數的三個綫性方程的綫性方程組。

2°二階行列式的意義的說明：

（1）數 $a_1b_2-a_2b_1$ 被叫做由四數表 $\begin{array}{l} a_1, & b_1, \\ a_2, & b_2, \end{array}$ 所組成的二階行列式。用容易記憶的符號：$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$ 來表示，因此，得 $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-$ $-a_2b_1$。我們往往把符號 $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$ 稱爲行列式，雖然它是符號，但有實際意義，因爲它代表着數 $a_1b_2-a_2b_1$ 的，因此把它叫做行列式是符合定義的。我們研究行列式的性質，例如行列式里的元調換位置，所發生的變化，都是根據定義，回復到數的關係上來研究。

（2）數 a_1，a_2，b_1 和 b_2 叫做行列式的元素或元。元素 a_1，b_2 在行列式的主對角綫上，而元熟 a_2b_1 在行列式的副對角綫上（如圖）。因此，二階行列式的值等於主對角綫上元素的乘積減去副對角綫上元素的乘積。



3°綫性方程討論的意義和方法：

（1）爲什麼要對方程進行討論？方程討論的實質就是研究方程的解的各種情形。方程的解决定於方程中各項係數。我們研究綫性方程組，就

是要詳細分析這些係數在什麼情況下，方程得到什麼樣的解。在解應用題時，還要討論由應用題所布列的方程的解對應用題的實際意義，例如應用題求的是人數，如果得到的是分數值，雖然滿足方程，但不切合實際。

（2）爲了更好地對綫性方程組進行討論，必須首先掌握行列式的性質。

（3）教材中的綫性方程組討論是由簡到繁逐步深入的；最先討論一個未知數的綫性方程；$ax=b$，其次討論二個未知數的兩個方程的綫性方程組，最後討論三未知數的三個方程的綫性方程組。它們的解都是三種情形：若方程組的行列式$\triangle \neq 0$（在一次方程 $ax=b$ 中的 $a\neq 0$）時，有唯一解；若$\triangle=0$時；方程組不是矛盾而沒有解，就是縮短的方程組而有無限多組解。爲什麼會這樣？我們可以把 $\triangle=0$ 時解的兩種情形和算術上 0 不能作除數的理論運系起來理解。

4 運用代入法和比較係數法解綫性方程，往往會忽視它們的理論根據——等價的方程，或等價的方程組。

如果兩個方程（方程組）在某數體上，第一個方程（方程組）的所有解都是第二個方程（方程組）的解，同時第二個方程（方程組）的所有解也都是第一個方程（方程組）的解，我們就說這兩個方程（方程組）等價。矛盾的方程（方程組）即沒有解的方程（方程組）也是等價的。關於方程等價的概念在§62里還會詳細敘述。

例如

（1）方程$3x+2(4x-3)=5(x+2)-4$與方程 $x=2$ 等價，因爲它們的解同是$x=2$

（2）方程組$\left.\begin{aligned}3x-2y&=11\\4x+y&=22\end{aligned}\right\}$與方程組$\left.\begin{aligned}x&=5\\y&=22-4x\end{aligned}\right\}$等價，因爲它們的解同是數組$x=5$，$y=2$。

（3）方程 $x^2+1=0$ 與方程 $x^4+1=0$，在實數體上等價。因爲它們任一個都沒有解。

（4）用代入法解方程組（a_1，a_2，b_1，b_2均不爲零）：

$$\left.\begin{aligned}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{aligned}\right\}\qquad (I)$$

由方程組取出一個方程，如：