普通高等教育"十二五"创新型规划教材

刘宴涛 编著

应用概率论基础

Fundamentals of Applied Probability

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育“十二五”创新型规划教材

应用概率论基础

Fundamentals of Applied Probability

刘宴涛 编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书主要内容包括集合论基础、随机事件和概率、随机变量、随机变量的数字特征、概率极限理论、数理统计基本概念、参数估计、假设检验等．本书是在总结教学经验的基础上汇编成册的，内容翔实，表述严谨，深入浅出，既清晰地阐明了各个概念和定理，又能与工程应用紧密结合，有助于读者掌握和理解概率论基础知识．本书可作为大学工程类专业本科生“概率论与数理统计”课程的教材，还可以为工程技术人员参考使用．

图书在版编目（CIP）数据

应用概率论基础／刘宴涛编著．—北京：北京理工大学出版社，2013.3
ISBN 978-7-5640-6554-6

Ⅰ．①应…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 186697 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市文通印刷包装有限公司
开　　本／710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张／14
字　　数／275 千字
版　　次／2013 年 3 月第 1 版　2013 年 3 月第 1 次印刷　　责任编辑／陈莉华
印　　数／1～3000 册　　责任校对／周瑞红
定　　价／28.00 元　　责任印制／王美丽

序

对于像“概率论”这样一门历史悠久的数学基础课而言，其学科体系、章节安排、基本材料都已经比较成熟，所以想要编写出一本新颖的教材确非易事。日前刘宴涛博士以其近著见示，读来让人耳目一新。该书充分考虑了工程类专业的学科特点，在讲解的难度上把握得非常得当。国内的概率论教材大多为数学专业的专家所编著，其中有些教材为了保持知识体系的完整性和数学的严谨性，把概率论完全建立在测度论基础上，这对于工科专业的低年级学生来说未免难度太大。还有些教材尽管难度较低，但与工程应用结合得不紧密，例题多以生活中抽球、掷色子等试验为主，缺少与工程实践结合得比较紧密的例子，这就让学生感觉概率距离自己的专业知识太远，无法学以致用。刘宴涛博士的这本著作在这两点上处理得很好，虽然章节安排上与现有的《概率论》教材类似，但在选材和行文上颇为斟酌，既沿着现行教材讲解的主线，又清晰地阐述了像《集合论基础》《概率论公理化体系》《几何概率》等传统教材讲述较少的内容；既举了很多工程实例，又加入了一些 MATLAB 使用的技巧，这些都极大地提高了学生对基本概念的理解和用概率论解决实际问题的能力。此外，该书对随机事件、随机变量、数字特征等知识点的讲解沿着离散型和连续型两条线并行前进，这种行文的方式可以帮助读者清晰地理解对这两类问题处理方法的不同，因此是一种很好的内容编排方式。最后，需要特别指出的是，该书充分利用了图形化工具清晰明了的特点，在讲解诸如随机变量的分布函数和概率密度函数、三种重要分布、假设检验拒绝域等概念时，以及一些例题的求解过程中，大量运用了图形加以说明，极大地帮助了读者的理解。

刘宴涛博士在概率论与随机过程、通信、网络等交叉领域从事研究和教学工作多年，积累了丰富的经验，这部著作凝聚了他多年的心得体会，相信能够给读者提供很大的帮助。

安建平

前　言

“概率论”是一门研究随机现象的数量规律性的数学学科，而随机现象表现为没有确定的规律性，但具有统计规律性，在经济、通信、控制、社会学、网络、交通等领域普遍存在，因此“概率论”已经成为工程技术人员不可缺少的基本知识．

本书主要内容包括集合论基础、随机事件和概率、随机变量、随机变量的数字特征、概率极限理论、数理统计基本概念、参数估计、假设检验等．本书是在编著者总结教学经验的基础上汇编成册的，内容翔实，表述严谨，深入浅出，既清晰地阐明了各个概念和定理，又能与工程应用紧密结合，有助于读者掌握和理解概率论基础知识．

本书的主要编写特点如下：

（1）直观化、实用化．作为一门本科阶段必修的数学基础课，学生在学习“概率论”后，一方面觉得“概率有点难”；另一方面存在“不知概率有什么用，怎么用”的疑惑。本书把理论与实际应用紧密结合，在阐述基本知识点的同时，列举了大量工程应用实例加以解释，并辅以图形、图表等辅助手段，力争做到对知识点的说明直观化、实用化．比如，以作者较为熟悉的通信和信息领域为例，信息论是重要的理论基础，而香农信息论正是以概率的方法构建的，其中熵、平均互信息、信道容量等概念都要靠概率的相关概念加以解释；再比如，大数定律和中心极限定理一直是概率论学习的难点，学生很难理解和应用，而在信息论中著名的渐进等分割性定理（AEP）的证明就是靠大数定律，把这样的例子融入到“概率论”教学中，不但能增加学生的学习兴趣，把理论直观化、实例化，还能促进学科的交叉学习，让学生触类旁通．

（2）内容的广度、深度适中．广度、深度适中是本书另一个追求的目标，本书兼顾“概率论”这门课程的特点和考研及工程应用等具体要求，在选材的广度和深度方面下了很大工夫，既清晰地阐述事件概率、随机变量、常用分布、数字特征、数理统计等基本知识点；又增加了对集合论、基本事件空间、公理化体系、分布函数和矩等概念的说明，这些内容在国内现行的大学教材中阐述得较少或者较浅，导致学生学完后不能建立完整的知识体系，碰到一个实际概率问题不知从何处下手加以分析．

本书可用作大学工程类专业“概率论”课程的教材，亦可作为工程技术人员参考使用．其内容涵盖了“概率论与数理统计”的基本内容，本书在编写过程

中参考了教育部考试中心拟定的硕士研究生入学考试数学大纲．在此，向引用文献的作者表示衷心的感谢！

限于编著者水平，书中疏漏与不妥之处，敬请读者批评指正．

编著者

目 录

第一章

集合论基础

集合论是研究集合，尤其是无限集合的一般性质的理论，是 19 世纪卓越的德国数学家康托尔（George Cantor 1845—1918）创立起来的．在创立之初，该理论已渗透到数学的许多分支，并成为近代数学的基础，因为任何一个数学概念都能从集合论的概念出发定义出来，任何一条数学定理也能从集合论的定理出发推导出来．大部分数学学科分支都可以统一在集合论的框架中，比如，几何学是研究点的集合；抽象代数中的群、环、域等都是定义了某种特殊运算的集合；数学分析中实数、有理数等都是集合，函数也无非是集合间映射的代名词，函数的定义域和值域也是集合；此外，实变函数、泛函等都与各种集合相关联．对各种概率问题的讨论虽然出现得很早，但这门学科的理论基础直到近代才被确立，与很多其他学科一样，概率论也是构建在集合论、测度论等理论体系之上的，所以，我们有必要对集合论和测度论有所了解．

1.1 集合的基本概念

一个数学系统必须从一些不可定义或无须定义的概念开始，集合就是这样一个概念．一般将明确的能够相互区别的个体事物的全体称为集合，组成集合的个体事物称为元素，这是对集合的一个直观的描述性的说明．根据该说明，构成集合的元素必须是能够明确的相互区分的，所以在一个学校中，低年级同学不能构成一个集合，因为这里“低年级”是一个模糊的界定．常用大写字母 A, B, C, D 表示某集合，用小写字母 a, b, c 或 x, y, z 代表元素．元素 a 如果是集合 A 中的某个元素，则称 a 属于 A，记作 $a \in A$；反之，称 a 不属于 A，记作 $a \notin A$. 我们熟知的集合有，全体自然数构成的集合被称为自然数集，记作 $\mathbf{N}$；全体实数构成的集合被称为实数集，记作 $\mathbf{R}$；全体有理数构成的集合被称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$. 再比如：

（a）一个班级的全体同学；

（b）$\{0, 1\}$，该集合是逻辑代数、数字电路和数字通信的基础；

（c）先后掷两颗色子的全部可能结果；

（d）打靶时假设不会发生脱靶，则击中点构成的集合；

（e）区间 (a, b) 中的全部实数.

在这几个例子中，(a) 集合的元素是每个同学；(c) 集合的元素是有序对的形式，包括 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), …, (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) 共36个元素，每个元素的第一个分量表示第一颗色子的结果，第二个分量表示第二颗色子的结果．

集合有以下两种表示方法：

(1) 列举法：列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来．比如 $\{a, b, c, d\}$ 和 $\{0, 1, 2, \cdots\}$．需要说明的是集合中元素是没有次序的，因此 $\{a, b, c, d\}$ 和 $\{d, c, b, a\}$ 是同一个集合．

(2) 描述法：用集合中元素的共有性质描述集合．比如 $A = \{x \mid x$ 是三年级同学$\}$ 表示三年级全体同学构成的集合；再比如 $B = \{x \mid x$ 是自然数$\}$．

与集合有关的另外一些概念包括：

空集：没有任何元素的集合称为空集，用符号 $\varnothing$ 表示，因此空集的元素个数为0. $\varnothing$ 在集合论中扮演着代数中0的角色．

子集：如果集合 A 的所有元素同时也是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$，读作 A 包含于 B，或 B 包含 A；如果 A 是 B 的子集，且 B 中存在着不属于 A 的元素，即 $\exists x \in B$，但 $x \notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subset B$. 规定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集．如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称集合 A 和 B 相等，这常常被用来证明两个集合相等．

全集：讨论某具体问题时，需要选定一个“最大的”集合，使该问题涉及的其他所有集合都成为其子集，称这个“最大的”集合为全集，用符号 Ω 表示．

集合类：以集合作为元素的集合称为集合类．因此，集合类可看作是“集合的集合 (Set of Set)”.

集合函数：以集合为自变量的函数称为集合函数，简称集函数．因此，集合函数的定义域应该是集合类．

1.2 集合的运算

集合的运算是指集合与集合之间的运算，包括交、并、差、补、笛卡尔积和幂集，这些运算的结果是一个新的集合．文氏图 (Voronoi diagram) 可以清楚直观地表示集合的运算．在文氏图中，以大的矩形区域表示全集 Ω，以矩形区域内部小的区域表示各个子集．

1. 交 $(A \cap B)$

集合 A 和 B 的交集是这样一个集合，该集合中的元素既属于集合 A，又属于集合 B，因此是由 A 和 B 的公共元素所构成．用描述法表示为：

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

$A \cap B$ 也可记作 AB. 当两个集合没有交集，即 $A \cap B = \varnothing$ 时，称 A 和 B 互不相容或互斥．推广到三个集合，集合 A, B 和 C 互不相容是指 A, B, C 两两互不

相容，即同时满足：

$$A\cap B\cap C=\varnothing \text{且} A\cap B=\varnothing, A\cap C=\varnothing, C\cap B=\varnothing.$$

所以只满足 $A\cap B\cap C=\varnothing$ 不能称作 A，B 和 C 互不相容．用文氏图表示如图 1-2-1 和图 1-2-2 所示．

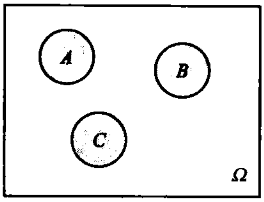

图 1-2-1　A，B 和 C 互不相容

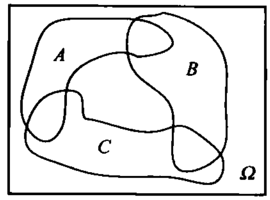

图 1-2-2　$A\cap B\cap C=\varnothing$ 但不是 A，B 和 C 互不相容

2．并（$A\cup B$）

集合 A 和 B 的并集中的元素或者属于集合 A，或者属于集合 B，因此是由 A 和 B 的所有元素构成．用描述法表示为：

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

当且仅当 A 和 B 互不相容时，$A\cup B$ 也可以记作 $A+B$.

特别地，当 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$ 时，称 A 和 B 是对立的．推广到有限多个集合的情形，对于集合 A_1，A_2，A_3，…，A_n，若：

$$A_i\cap A_j=\varnothing \quad (\forall i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant n) \quad \text{且} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega,$$

则称 A_1，A_2，A_3，…，A_n 为完备互斥的，也称 A_1，A_2，A_3，…，A_n 构成了全集 Ω 的一个分割（Partition）．

3．差（$A-B$）

集合 A 和 B 的差集由属于 A 但不属于 B 的元素构成，差集也可记作 A/B，差集 $A-B$ 也被称作 B 对 A 的相对补集，用描述法表示为：

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

不难证明，$A-B=AB^c$．需要说明的是两个集合的交集和并集都是满足交换律的，但差集不满足交换律，即通常情况下 $A-B\neq B-A$．

4．补（A^c）

集合 A 的补集定义为全集 Ω 和集合 A 的差集，即 $A^c=\Omega-A$，集合 A 的补集是由全集 Ω 中所有不属于集合 A 的元素构成，补集又称余集或绝对补集，亦可记作 $\bar{A}$．

集合的各种运算结果用文氏图表示如图 1-2-3 中的阴影部分所示．

5．笛卡尔积（$A\times B$）

笛卡尔积又称为集合的乘积，其结果是一个新的集合，该集合由 A 和 B 中的元素组成的有序数对构成．因为是有序数对，所以笛卡尔积的运算不满足交换律，即 $A\times B\neq B\times A$．

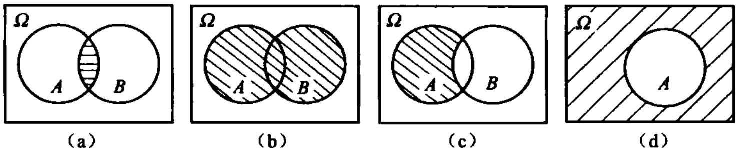

图 1-2-3

(a) $A\cap B$; (b) $A\cup B$; (c) $A-B$; (d) A^c

6. 幂集

集合 A 的幂集是一个集合类，由 A 的全部子集所构成，用 2^A 表示.

例 1-2-1 集合 $A=\{1,2,3\}$

$$B=\{2,3,5\}$$

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$$

$$A\cap B=\{2,3\}$$

$$A\cup B=\{1,2,3,5\}$$

$$A-B=\{1\}$$

$$A^c=\{4,5,6,7,8,9,0\}$$

$$A\times B=\{(1,2),(1,3),(1,5),(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5)\}$$

$$2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

集合运算具有如下一些性质:

(1) 交换律:

$$A\cup B=B\cup A$$

$$A\cap B=B\cap A$$

(2) 结合律:

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

(3) 分配律:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

(4) De Morgen 律:

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

请读者应用文氏图自行检验.

1.3　集合的映射

1. 映射

设 X 和 Y 是两个非空集合，若存在一个规则 f，使得对于 X 中的每一个元素 x，按照 f，都存在 Y 中的唯一一个元素 y 与之相对应，则称 f 是定义在 X 上取值在 Y 中的映射，记作 f: $X \to Y$. X 是 f 的定义域，集合 $\mathrm{Ran}(f) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ 是 f 的值域；x 和 y 分别称作映射 f 的原像和像.

2. 单射

对于映射 f 的值域 $\mathrm{Ran}(f)$ 中的每个像元素 y，若唯一的存在自己的原像 x，则称该映射为单射.

3. 满射

如果集合 Y 中每个元素 y 都存在原像 x，即 Y 就是映射 f 的值域 $Y = \mathrm{Ran}(f)$，则称该映射为满射.

4. 一一映射

既是单射又是满射的映射称作一一映射.

四种映射的示意如图 1－3－1 所示.

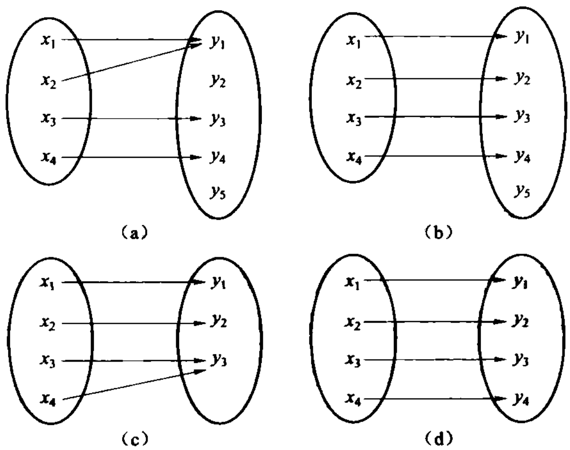

图 1－3－1

（a）映射；（b）单射而非满射；（c）满射而非单射；（d）既是单射又是满射，即一一映射

1.4　集合的对等与分类

1.4.1　集合的对等

定义 1－4－1：若集合 A 和 B 之间存在一一映射，则称 A 和 B 对等，记作 $A \sim B$.

****
* 注意：集合的对等不是相等 *
****

例 1-4-1 集合 $\{1, 2\}$ 对等于 $\{0, 2\}$

例 1-4-2 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$ 对等于 $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$.

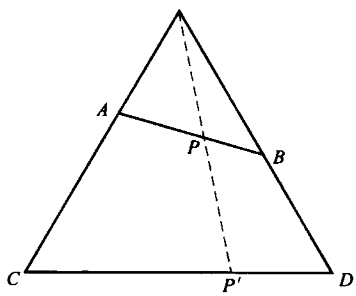

图 1-4-1

例 1-4-3 图 1-4-1 所示线段 AB 和 CD 是点构成的集合，对于 AB 上的任意一点 P，都可以用图示的方法对应到 CD 上的一点 P'，反之亦然．所以集合 AB 和 CD 是对等的．

从例 1-4-2 中我们看到了一个有趣又似乎有些令人惊讶的现象，集合 A 居然和自己的一个真子集 B 存在着对等关系，这种与自身真子集存在对等关系的情况不可能发生在元素个数有限的集合（有限集）中，只有无限集合才可能具有这一性质．事实上，该性质也正是无限集的一种定义方式．

定义 1-4-2：能与自身真子集对等的集合称为无限集；不是无限集的集合称为有限集．

在历史上，无穷一直是哲学中的一个论题．很长一段时间，人们不知道在无穷集合之间是否有大小之分，又如何区分大小．直到 19 世纪 70 年代，伟大的德国数学家康托尔对无限集合是否能比较大小进行了深入的探索，不但把无穷数引进了数学的概念，而且还把无穷数分成了各种不同的类型，从而给出了对这个问题的解答并创立了成为近代数学各门学科基础的集合论．

1.4.2 集合的基数

集合中元素的个数是对集合大小的很自然的描述．对于有限集，元素的个数总是可以数得过来的，尽管这很枯燥．但对于无限集，由于其中元素个数为无穷多个，怎么比较大小呢？康托尔从对等的概念出发，认为互相对等的集合元素个数是相同的，把对等集合的这个公共的性质提炼出来，就称为集合的基数．

定义 1-4-3：相互对等的集合归为一类，称其公共的“元素个数”为这一类集合的基数或势（Cardinality）.

规定空集的基数是零，有限集的基数是自然数，无限集的基数称为超限数．

1.4.3 可列集与不可列集

集合论的魅力表现在无穷集合中，我们遇到的第一个无限集合是自然数集合 $\mathbf{N} = \{0,1,2,3,4,\cdots\}$，称自然数集 $\mathbf{N}$ 的基数为 $\aleph_0$，读作阿列夫零．

定义 1-4-4：凡是能与自然数集 **N** 对等的集合统称为可列集（或可数集 Countable Set），不是可列集的无限集合称为不可列集（Uncountable Set）.

因此，所有可列集的基数都是$\aleph_0$，下面这些集合都是可列集.

例 1-4-4　可列集

(a) $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$;

(b) $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$;

(c) $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \cdots\}$;

(d) $\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

下面我们不加证明地给出可列集的一些性质：

(1) 有限个可列集的并集是可列集；

(2) 可列个可列集的并集是可列集；

(3) 若集合 A，B 是可列集，则 $A \times B$ 是可列集.

定理 1-4-1：有理数集合 **Q** 是可列集.

证明：$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^-$，其中 $\mathbf{Q}^+$ 和 $\mathbf{Q}^-$ 分别表示正有理数集和负有理数集.

$$\mathbf{Q}^+ = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \\ \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \cdots \\ \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \cdots \\ \qquad \cdots \end{array}\right\}$$

相当于可列个集合 $A_i = \left\{\frac{i}{1}, \frac{i}{2}, \frac{i}{3}, \frac{i}{4}, \cdots\right\}$ $i = 1, 2, 3, \cdots$的并集，根据性质（2），可列个可列集的并集仍可列，可知 $\mathbf{Q}^+$ 是可列集. 同理，$\mathbf{Q}^-$ 也是可列集. 所以，$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^-$ 是可列集.

这又是一个与直观感觉大相径庭的结论，有理数集的元素个数似乎应该比自然数集多得多，但这两个集合的基数居然相等！（可见直觉是多么地不可靠）. 有理数集还有一个有趣的性质就是稠密性，即对于数轴上无论多么短的小区间，只要区间长度不为零则其中必存在着无穷多个有理数.

****

*　　　有理数集既是稠密的又是可列的　　　*

****

定理 1-4-2：实数集合 **R** 是不可列集.

把实数集 **R** 的超限基数记作 c，根据集合论中连续统假设，有 $2^{\aleph_0} = c$，且不存在集合，其基数介于$\aleph_0$ 和 c 之间. 实数集似乎已经很大了，那么还有没有无限集合，其基数大于 c 呢？答案是肯定的. 如果一个有限集 A 的基数是 a，则不