

題解中心
算術辭典

薛德炯
吳載耀

新亞書店

心 中 解 題
典 辭 術 算

著 原 助 之 龜 澤 長 日 本

譯 編 耀 載 吳 炯 德 薛

行 印 店 書 亞 新 海 上

版權所有
翻印必究

中華民國三十六年四月三版

題解中心

算術辭典

實價國幣

(外埠酌加運費匯費)

原	著	者	長	澤	龜	之	助
編	譯	者	薛		德		炯
			吳		載		耀
發	行	人	陳		邦		禎
				上海河南路一五九號			
印	刷	者	新	亞	書	店	
發	行	所	新	亞	書	店	
				上海河南路一五九號			

(Boo78)

編 譯 者 言

余等自拋棄教書生涯，廁身於出版界，環顧同業現況，小說出品，車載斗量，科學書籍，廖若晨星，深感無以應國人之所需要，頗思有所貢獻，祇以自身對於科學，亦止淺嘗，何敢高騫；力短心長，不僅余等已也！

二十一年夏，新亞書店以編譯日本長澤氏所著算學辭典相囑，當以茲事體大，未敢輕於嘗試，擱置者半年，翌年春，新亞又重申前議，竊思事在人爲，雖不無荆棘當前，祇在吾人能鼓勇猛管，自有成功希望；因卽由戴耀編譯初稿，德炯加以修訂，閱時一載，積稿盈尺，於是卽開始裝版，除由呂君憲章，韓君寅生襄助繪圖，史君炳坤襄助校對外，余等復始終自任覆校，明知魯魚亥豕，在所不免，祇期能減少萬一，以稍輕余等之罪過已耳。

茲值發行將始，例須於卷首有言，爰就編校上之所感，縷述於下，以誌完成是書之經過。

1. 是書原以問題解法某某辭典分名各冊，而其內容於辭典之通行體裁，頗有出入之處，本擬更名曰辭典式算學題庫，卒以特種關係採用今名，非始願也。

2. 原書曾經修訂，新增之題別列於補遺之部，茲則爲之分門別類，納入本文；幾費經營，旨在貫一，中間或尚有未盡善處，祇以時間，精力，兩不我許，未及充分編配，引以爲憾。

3. 原書名詞之部依照假名順序編排，茲則改用筆畫順序，我國算學名詞，至不統一，最近國立編譯館正在釐訂而尙未公布，友人中頗有以出書未及其時，將來須經改訂手續爲余等惜者，際會如此，又何能已！

4. 排校算學書籍，難於普通書籍者奚啻倍蓰，稍一不慎，錯誤隨之，本書於算式之地位，尤加注意，絕不任其無理割裂，排校之時往往因算式之短長，牽涉行間之中斷，不得不設法添削字句，以資銜接；故爲解決此項問題，無形之中費卻不少時間，不少精力，於字裏行間卽此可知一書之編著與排校，莫妙於出自一手，坊間發行之算學書，對於算式之地位，支離割裂，日滿瘡痍者，所在都有；此種過誤，編著者自應負相當責任，不能盡諉之於排校者也。

5. 排校算學書籍，成本之重，遠超於普通書籍，商人於利薄事業而頗斥重資者，什不獲一，此關於算學之刊物，數量上所以稀少之主因也。余等之於是書，實有賴於資力之促成，否則以全書五百萬言之巨，而竭我倆之棉薄欲印以行世，縱不望而卻走，亦須有所戒懼也。

6. 是書校印將半，知友見之者，獎借備至，殊滋惶愧！余等自知此書之性質，僅屬一種便於翻檢之類書，與所謂‘題庫’者正相若，非比涵義宏大，理論精嚴之皇然巨著，故於編譯之時，僅懸‘信’‘達’二字爲的，而忽於文字之工拙，原書之誤點，亦僅就所發覺者加以訂正，未遑一一檢算也。特恐來日多方責難，用敢附明於此，尙希邦人君子有以諒之！

目次

第一門 解法之部1—1123

部 I. 數1—106

類 1. 整數1—53

類 2. 分數53—84

類 3. 小數84—101

類 4. 雜題101—106

部 II. 數之應用107—247

類 1. 整數之應用107—172

類 2. 分數之應用172—242

類 3. 小數之應用242—247

部 III. 類聚一248—338

類 1. 還元248—253

類 2. 和與差253—268

類 3. 和一定268—271

類 4. 差一定271—279

類 5. 年齡279—286

類 6. 龜鶴算法286—298

類 7. 過不足298—308

類 8. 車輪308—310

類 9. 正方形310—320

類 10. 矩形320—330

類 11. 正方形與矩形330—332

類 12. 曆332—338

部 IV. 數性339—437

類 1. 整數之性質339—382

類 2. 整數性質之應用382—387

類 3. 公約數387—392

類 4. 公約數之應用392—395

類 5. 公倍數396—400

類 6. 公倍數之應用400—412

類 7. 公約數公倍數雜題412—418

類 8. 數字418—437

部 V. 類聚二438—579

類 1. 相遇及追及438—488

類 2. 時計488—513

類 3. 競走,競漕513—521

類 4. 環行521—533

類 5. 工作533—551

類 6. 水管551—558

類 7. 寒暑表558—560

類 8. 牛頓問題560—565

類 9. 諸等數565—575

類 10. 標準時576—579

部 VI. 比例580—746

類 1. 比580—602

類 2. 單比例602—635

類 3. 複比例635—662

類 4. 連鎖法662—673

類 5. 配分法673—714

類 6. 混合法714—746

部 VII. 成數算法747—893

類 1. 成數747—760

類 2. 損益760—798

類 3. 佣錢	793 — 802
類 4. 保險	802 — 808
類 5. 租稅	803 — 816
類 6. 利息	816 — 847
類 7. 分期償還	847 — 857
類 8. 折扣	857 — 863
類 9. 公債, 股票	863 — 884
類 10. 匯兌	884 — 888
類 11. 平均日期	888 — 891
類 12. 年金	891 — 893

部 VIII. 開方.....894—920

類 1. 開平方	894 — 896
類 2. 開平方應用	896 — 902
類 3. 直角三角形	902 — 914
類 4. 和與積等	914 — 916
類 5. 開立方	916 — 920
類 6. 開方雜題	920

部 IX. 類聚三921—1060

類 1. 級數	921 — 945
類 2. 求積	945 — 985
類 3. 記數法	985 — 994
類 4. 式題	994—1004
類 5. 省略算	1005—1051
類 6. 對數	1051—1055
類 7. 計子術	1055—1053
類 8. 思維問題	1058—1060

部 X. 理化學應用 ...1061—1123

類 1. 物理算術	1061—1106
類 2. 化學算術	1106—1123

第二門 名詞之部.....1125—1232

附錄一 英漢名詞對照

..... 1233—1247

第三門 算術小史之部

..... 1249—1302

A. 總論.....1249—1251

B. 第一期 (由古代諸種族至 阿剌伯時代之算術)1251—1260

C. 第二期 (由第八世紀至第 十四世紀)1260—1268

D. 第三期 (由第十五世紀至 第十九世紀)1268—1282

E. 算學家年表.....1282—1302

附錄二1303—1360

某月至某月間之日數表1303

階乘·海面上之 G 值.....1304

平方立方表1305—1322

對數表1323—1340

複利表1341—1342

複利現價表1343

複利年金終價表1344

複利年金現價表1345

複利年賦金表1346

日給月計表·圓周與圓面積1347

日息·年利比較表·正多角形1348

正多面體·數字之讀法 I—II.....1349

度量衡1350—1357

各國貨幣1357

英尺與米突尺(公尺)比較1359

75至10000之非質數之因數...1359—1360

經度一度之哩數表1360

題解中心 算術辭典

第一門 解法之部

部 I. 數

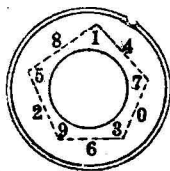
類 I 整數

A. 加減

1. 由 1000 減 175, 加 172, 再減 175, 加 172, 如是連續行之, 則自始計之, 減至幾回後, 不能再減?

圖 減以 175, 加 172, 其結果即減以 $175 - 172 = 3$. 如是每行一回, 即以 3 減一回. 據此, 當去最後之減數 175, 得 $1000 - 175 = 825$, 除以 3, 得商 275, 無剩餘. 故減以 175, 加 172, 行至 275 回, 則得餘數 175. 因此減至 $275 + 1$, 即 276 回, 則全盡.

2. 試藉所示圖之助, 由 100 迅速累減 7, 以求最後之結果. 又試由 1000 分別累減 9, 8, 6, 及 5 時, 如何? [此圖之效用, 乃在累加較小之同數時, 可徑知所得數之末位數字. 例如累加 3 於 12 時, 得 12, 15, 18, 21, 24,



27, ..., 其末位數字, 可依順時計向由此圖形取得之. 又如累加 4 於 12, 則得 12, 16, 20, 24, 28, 32, ..., 其末位數字可依反時計向, 由此圖形一間一取得之. 總之, 在累加或累減同數之際, 其所得第三, 第四, 等數之末位數字, 可準照所得最初二數, 依順時計向或反時計向, 由此圖形, 間若干字而求得之.]

圖 由某數減 7 時所得之末位數字, 等於加 3 時所得之末位數字; 何則, 減以 7, 等於減以 10 而更加 3 故也. 據此, 因 100 之末位為 0, 故可由 0 處始, 依順時計向計之. 即為 93, 86, 79, 72, 65, 58, 51, 44, 37, 30, 23, 16, 9, 2. 但單求最後之結果時, 則因由 100 減 7×10 得 30, 故可由 30 始, 次, 由 100 累減 9 時, 則可由 $100 - 9 \times 10 = 10$ 始, 而得 1; 累減 8 時, 則因等於加 2, 故可由 0 始, 依順時計向就外部一間一取之, 而得 $100 - 8 \times 10 = 20$, 12, 4; 累減 6 時, 可由 0 始依反時計向就外部依次取之, 而得 $100 - 6 \times 10 = 40$, 34, 28, 22, 16, 10, 4; 累減 5 時, 極為簡單, 不必用此圖. 但若特別須用此圖, 則因此圖依次各數, 係依次加 3 而得者, 故由 $3 \times 5 = 15$ 可知

5, 爲 0 下第 5 數字, 即 0 下隔去四字取得者, 故所求末位數字爲 $100 - 5 \times 10 = 50$, 45, 40, 35, …, 0.

3. 被減數或減數, 加以任意數或減以任意數, 則差之變動如何?

圖 被減數增以任意數或減以任意數, 則差亦以同數增減, 又若減數增以任意數或減以任意數, 則差亦以同數減增. 何則, 因兩數之差者, 乃被減數超過減數之數, 故被減數若有增減, 則其超過減數之數, 亦生同數之增減, 反之, 減數若有增減, 則減數較被減數不足之數, 亦生同數之減增. 故如前述.

圖 本題若以代數記號表之, 則更簡明. 即設 $a - b = d$, 則 $(a \pm x) - b = (a - b) \pm x$, 及 $a - (b \pm x) = (a - b) \mp x$.

B. 乘積

4. 設以 14 及 25 爲甲乙二因數作積, 若甲因數加 3, 乙因數加 7, 則積生若何之變化?

圖 二因數之積爲 14×25 , 今 $(14 + 3) \times (25 + 7) = (14 + 3) \times 25 + (14 + 3) \times 7$ [分配律] $= (14 \times 25 + 3 \times 25) + (14 \times 7 + 3 \times 7) = 14 \times 25 + (14 \times 7 + 25 \times 3 + 3 \times 7)$, 即甲乙二因數之積增加, 所增加者爲甲因數之 7 倍, 乙因數之 3 倍, 與 3×7 之和.

5. 設以 12 及 27 爲甲乙二因數作積, 若由甲因數減 3, 由乙因數減 7, 則積發生若何之變化?

圖 甲乙二因數之積爲 12×27 , 今 $(12 - 3) \times (27 - 7) = (12 - 3) \times 27 - (12 - 3) \times 7$ [分配律] $= (12 \times 27 - 3 \times 27) - (12 \times 7 - 3$

$\times 7) = 12 \times 27 - 3 \times 27 - 12 \times 7 + 3 \times 7$ [組合律] $= 12 \times 27 - (27 \times 3 + 12 \times 7 - 3 \times 7)$, 即甲乙二因數之積減小, 所減小者爲乙數之 3 倍, 甲數之 7 倍之和與 3×7 之差.

6. 右圖示乘法之演算, $\triangle$ 處之數字未明, 然則 $\triangle$ 處之數字如何?

$$\begin{array}{r} 4 \triangle \triangle \\ 3 \triangle \\ \hline 36 \triangle \triangle \\ \triangle \triangle 7 \triangle \triangle \\ \hline \triangle \triangle 3 \triangle \triangle \end{array}$$

圖 乘數中之未明數字須爲 8 或 9. 何則, 若命之爲 7, 則縱令 $500 \times 7 = 3500$, 亦小於 3600 故也. 茲先命之爲 8. 因 $400 \times 8 = 3200$, $5 \times 8 = 400$, 故被

(1) (2) 乘數之十位數字當爲 5 以
 $\begin{array}{r} 457 \\ 38 \\ \hline 3656 \\ 13710 \\ \hline 17366 \end{array}$ 上. 命之爲 5, 則 $50 \times 30 = 1500$, $7 \times 30 = 210$, 故
 $\begin{array}{r} 458 \\ 38 \\ \hline 3684 \\ 13740 \\ \hline 17404 \end{array}$ 被乘數之末位, 須爲 7 以
 上. 故如上得 (1) 式爲解答

之一. 又設被乘數之末位數字爲 8, 則得 (2) 式. 次, 設被乘數之十位數字爲 6, 而以 0 或 9 爲其末位數字, 則 $460 \times 30 = 13800$, 或 $469 \times 30 = 14070$, 又 46×30 之各種百位數字, 不能外於 8, 9 或 0. 故所求之解答爲 (1) 式.

7. $123456789 \times 987654321 \times 192837465$ 爲幾位數?

圖 第一因數小於 2×10^8 , 第二因數小於 99×10^7 , 第三因數小於 2×10^8 , 故三因數之積小於 $2 \times 10^8 \times 99 \times 10^7 \times 2 \times 10^8 = 396 \times 10^{23}$, 即不大於 26 位之數. 又第一因數大於 1×10^8 , 第二因數大於 9×10^7 , 第三因數大於 19×10^7 . 故三因數之積大於 $1 \times 10^8 \times 9 \times 10^7 \times 19 \times 10^7 = 171 \times 10^{22}$, 即不小於 26 位之數. 故所求之位數爲 26.

8. 785626 乘以 85672 時,得部分積五個,若欲令其成三個部分積,當用何法?

圖 因 $56 = 8 \times 7$, $72 = 8 \times 9$, 故欲求被乘數與 72 之積,可求被乘數與 8 之積之 9 倍. 又欲求被乘數與 56 之積可求被乘數與 8 之積之 7 倍. 故其運算,如上所示.

$$\begin{array}{r} 785626 \\ 85672 \\ \hline 6285098 \\ 43995056 \\ 56565072 \\ \hline 67306150672 \end{array}$$

C. 除 商

9. 除法中若剩餘較商大,則其除數增 1,而商不變. 試證之.

圖 今設‘剩餘 = 商 + 甲’,則‘被除數 = 除數 $\times$ 商 + 剩餘 = 除數 $\times$ 商 + 商 + 甲 = (除數 + 1) $\times$ 商 + 甲’,而剩餘較除數小,故較剩餘小之甲,小於較除數大之‘除數 + 1’. 故加 1 於除數而除時,其商等於原商.

10. 除法中以同數乘除數及被除數時,其商不變,而剩餘等於原剩餘乘以同數所得之積. 試證之.

圖 1. 例如設除法 (1) 及 (2) 中,除法 (2) 之除數及被除數為以同數 4 乘除法 (1) 之除數及被除數所得者. 茲比較之,即可知各部分除法中之除數,被除數,及部分積,在 (2) 中者俱為在 (1) 中者之 4 倍,從而剩餘亦增大 4 倍,而商無變化.

(1)

$$\begin{array}{r} 3749 \overline{) 12} \\ 36 \quad \underline{312} \\ 14 \\ 12 \\ \underline{29} \\ 14 \\ \underline{6} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r} 14996 \overline{) 48} \\ 144 \quad \underline{312} \\ 59 \\ 48 \\ \underline{116} \\ 96 \\ \underline{20} \end{array}$$

圖 2. 設某數 N , 以除數 a 除時,得商 Q , 剩餘 R , 則 $N = a \times Q + R$. 此式之兩邊,以他任意數,例如 m 乘之,得 $N \times m = a \times m \times Q + R \times m$. 然 R 為除以 a 時之剩餘,故 $a > R$, 故 $a \times m > R \times m$. 因此 $N \times m$ 除以 $a \times m$ 時,得商 Q , 剩餘 $R \times m$, 即如題所言.

圖 3. 1. 由本題之結果反考之,可知除法中以同數除被除數及除數,則商不變,而剩餘等於以同數除原剩餘時之商.

圖 2. 由注意 1, 可知施行除法時,被除數及除數之尾端若有若干個 0, 則可就此二數,自末尾起,削去同數個 0, 而商不變. 然若不能整除,則所得之剩餘後,必須附加前所削去之 0, 始可得原剩餘.

圖 3. 小數之除法 [除數被除數皆為小數者] 中,化除數為整數時,亦以本題之理為依據.

11. 設一數能整除各數,則此數除各數之和時所得之商,等於此數一一除各數時所得商之和. 試證之.

圖 例如 $(27 + 18 + 15) \div 3 = 27 \div 3 + 18 \div 3 + 15 \div 3$. 何則, $(27 \div 3 + 18 \div 3 + 15 \div 3) \times 3 = 27 \div 3 \times 3 + 18 \div 3 \times 3 + 15 \div 3 \times 3 = 27 + 18 + 15$, 故 $(27 + 18 + 15) \div 3 = 27 \div 3 + 18 \div 3 + 15 \div 3$ 也.

圖 除數若不能整除各數,而用分數時,則本定數恆真.

12. 設一數能整除二數,則此數除二數之差時所得之商,等於其一一除此二數時所得商之差. 試證之.

圖 例如 $(35 - 15) \div 5 = 35 \div 5 - 15 \div 5$

何則, $(35 \div 5 - 15 \div 5) \times 5 = 35 \div 5 \times 5 - 15 \div 5 \times 5 = 35 - 15$ 故也。

例題 參照 11 題注意。

13. 若干因數之積, 除以是等因數之一時所得之商, 等於此因數外之其餘諸因數之連乘積, 試證之。

圖 例如 $2 \times 4 \times 7 \times 9 \div 7 = 2 \times 4 \times 9$ 。何則, 以 7 乘 $2 \times 4 \times 9$, 得 $2 \times 4 \times 9 \times 7 = 2 \times 4 \times 7 \times 9$ 故也。

14. 若干因數之連乘積除以他數時, 若此諸因數中有為除數之倍數者, 則可將此因數改之為除以除數時所得之商, 即得所求之商。試證之。

圖 例如 $3 \times 12 \times 8$ 除以 6 時, 因 12 為 6 之倍數, 故所求之商等於 $3 \times (12 \div 6) \times 8$, 即 $3 \times 2 \times 8$ 。何則, $3 \times 12 \times 8 \div 6 = 3 \times 2 \times 6 \times 8 \div 6 = 3 \times 2 \times 8$ [13 題] 故也。

例題 由此可知, 若干因數之連乘積除以某數時, 可單除其中之一因數。

15. 以若干因數之連乘積除某數時所得之商, 等於以此若干因數, 逐一除此數時最後所得之商。試證之。

圖 (I) 逐次除法中無剩餘時。例如因 $168 = 2 \times 3 \times 4 \times 7 \dots (1)$, 故 $168 \div (2 \times 3 \times 4) = 7$ 。又 (1) 之兩邊除以 2, 則由 13 題, $168 \div 2 = 3 \times 4 \times 7$, 同理 $168 \div 2 \div 3 = 4 \times 7$, $168 \div 2 \div 3 \div 4 = 7$ 。因此, $168 \div (2 \times 3 \times 4) = 168 \div 2 \div 3 \div 4$ 。

(II) 逐次除法中有剩餘時。例如以 $3 \times 5 \times 9$, 即 135, 除 1199 時, 因 $1199 = 3 \times 399 + 2$, $399 = 5 \times 79 + 4$, $79 = 9 \times 8 + 7$, 故 $5 \times 79 = 5 \times (9 \times 8 + 7) = 5 \times 9 \times 8 + 5 \times 7$, 因

此 $399 = 5 \times 79 + 4 = 5 \times 9 \times 8 + 5 \times 7 + 4$, 從而 $3 \times 399 = 3 \times (5 \times 9 \times 8 + 5 \times 7 + 4) = 3 \times 5 \times 9 \times 8 + 3 \times 5 \times 7 + 3 \times 4$, 故 $1199 = 3 \times 999 + 2 = 3 \times 5 \times 9 \times 8 + 3 \times 5 \times 7 + 3 \times 4 + 2 = (3 \times 5 \times 9) \times 8 + [(3 \times 5) \times 7 + (3 \times 4 + 2)]$ 。此式中最後之 2 為某數除以 3 時所得之剩餘, 故 $3 > 2$, 又 4 為除以 5 時所得之剩餘, 故 $5 > 4$, 從而 $3 \times 5 > 3 \times 4 + 2$ 。次, 7 為某數除以 9 時所得之剩餘, 故 $9 > 7$, 因此 $3 \times 5 \times 9 > 3 \times 5 \times 7 + 3 \times 4 + 2$ 。是以 1199 為 $3 \times 5 \times 9$ 之 8 倍加小於 $3 \times 5 \times 9$ 之數所得之和。故 1199 除以 $3 \times 5 \times 9$ 時所得之整數商為 8; 而 1199 除以 3 時所得之整數商為 399, 399 除以 5 時所得之整數商為 79, 79 除以 9 時所得之整數商亦為 8。故如題所言 [參照 34 題]。

16. 以甲數除某數, 更以乙數除其商, 與以乙數除某數, 更以甲數除其商所得之結果相等。試證之。

圖 某數無論先除以甲數, 或交換除數, 而先除以乙數, 其結果皆等於某除數以 '甲 $\times$ 乙' 時所得之商 [15 題] 故除數雖交換, 而商不變。

例題 本題中之除數並不限於二數, 不論其為幾數, 本題皆能成立。

17. 設某數 b 得為他數 c 所整除, 則以其商除一數 a 時所得之商, 等於以 b 除 $a \times c$ 時所得之商。試證之。

圖 設 $a \div (b \div c) = x$, 則由除法之定義, $a = x \times (b \div c) = x \times b \div c$ [組合律], 故 $a \times c = x \times b$, 從而 $a \times c \div b = x$, 故 $a \div (b \div c)$

$$= a \times c \div b.$$

例 18 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立甚明。

18. 設某數 b 得為 c 所整除，且他數 a 得為 b 所整除，則 a 除以 $b \div c$ 時所得之商，等於 a 除以 b 時所得之商乘以 c 所得之積。試證之。

證 設 $a \div (b \div c) = x$ ，則由除法之定義， $a = x \times (b \div c) = x \times b \div c$ [組合律] $= x \div c \times b$ [交換律]。故 $a \div b = x \div c$ ，故 $a \div b \times c = x$ ，故 $a \div (b \div c) = a \div b \times c$ 。

例 19 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立。

19. 設某數 a 得為 b 所整除，又他數 c 得為 d 所整除，則 $a \div b$ 與 $c \div d$ 之相乘積，等於 $a \times c$ 除以 $b \times d$ 時所得之商。試證之。

證 $(a \div b) \times (c \div d) = a \div b \times c \div d$ [組合律] $= a \times c \div b \div d$ [交換律] $= a \times c \div (b \times d)$ [組合律]。

例 20 若用分數，則雖不能整除時，本定理亦能成立。

20. 設 a, b, c, d 為四數， $a \div b, c \div d$ 之各除算皆為整除算，則 $(a \div b) \div (c \div d) = a \times d \div (b \times c)$ 。試證之。

證 $(a \div b) \div (c \div d) = a \div b \times d \div c$ [組合律] $= a \times d \div b \div c$ [交換律] $= a \times d \div (b \times c)$ [組合律]。

例 21 同 19 題之注意。

21. 右之除算中，在 $\cdot$ 處之數字為何？—

證 將所設除算式，改書成右下形。此時 $l=1$ ，

$$\begin{array}{r} 7 \cdot \cdot 51 \cdot \cdot 1 \cdot \cdot 2 \\ \cdot \cdot 1 \cdot \cdot \\ \cdot 1 \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot 1 \cdot 9 \end{array}$$

$q=11-9=2$ ，因而 $b \times 2$ 之末位 $= q = 2$ ，故知

$b=1$ ，或 6 。又因 $7a1 \times e < 51cd$ ，故 $e < 8$ ，及因

$800 \times 6 < 51cd$ ，故 $e \geq 6$ ，故 $e=6$ ，或 7 。

設 $e=7$ ，則 $7a1 \times e = fg17 = 4900 + (fg10 - 4900) + 7$ ，故 $fg10 - 4900 = a \times 70$ ，故知

非 $a \times 70 = 210$ ，因而 $a=3$ 不可。然此時 $fg1h = 5117$ ，因而生不合理之結果 $1k1 = cd - 17$ 。故 $e \neq 7$ ，因此 $e=6$ 。於是 $7a1 \times 6 = 4200 + a \times 60 + 6 = fg1h$ ，故 $f=4$ ，

$h=6$ ，然縱令 $a=9$ ，則 $791 \times 6 = 4746$ ，而亦不能得 $51cd - 4746 = 1k1$ ，故 $b=1$ 錯誤。

因此 $b=6$ 。將此式與 $e=6$ 組合，則 $7ab \times 6 < 4800$ ，故 $51cd - 7a6 \times 6 > 51cd - 4800$ ，即 $1k1 > 300$ ，而不合理。故此假定不可能，是以最後所得推考者，惟 $e=7$ 。

此時 $7a6 \times 7 = 4900 + a \times 70 + 42 = fg1h$ ，由此得 $h=2$ ， $a=1$ ， $f=5$ ， $g=0$ 。又由

$716 \times 2 = 1432 = mnpq$ ，得 $m=1$ ， $n=4$ ， $p=3$ 。由 $r=11-(p+1)=7$ ，得 $r=7$ 。故

$1k1l = mnpq + 1r9 = 1611$ ，故 $k=6$ 。又

由 $fg1h0 + 1k11 = 51731 = 51cd1$ ，得

$c=7$ ， $d=3$ 。至此問題全告解決。

$$\begin{array}{r} 716)51731(72 \\ \underline{5012} \\ 1611 \\ \underline{1432} \\ 179 \end{array}$$

22. 試不用省略算，而求 38927 與 67193 之積除以 74213 與 4738 之積所得之商，至小數第四位。

解	38927	
	67198	74213
	311416	4738
	350343	593704
	38927	222639
	272489	519491
	233562	296852
	2615816546	351621194
	2461348358	7.4393...
	1544681880	
	1406484776	
	1381971040	
	1054863582	
	3271074580	答 7.4393
	3164590746	
	1064838340	
	1054863582	
	9974758	

23. 以 93 除 4020, 得商為 4, 剩餘為 38, 此答數正否, 試憑還原法以驗. 若為錯誤者, 試改正之.

圖 4020 除以 93, 得商為 4, 剩餘為 38, 則等式 $4020 = 93 \times 4 + 38$ 應能成立. 然因 $93 \times 4 + 38 = 410$, 與被除數絕不相等, 故所設之答為錯誤者. 正確之運算, 應如右

方所示, 因知所得之商應為 43, 剩餘應為 21.

24. 一除法, 運算後得商為 15, 今僅使其除數改變, 再施除算, 而得商為 20. 問對於除數應與以若何之變化?

圖 1. 設被除數為 a , 除數為 b , 依題意, 可知 $a = b \times 15 = b \times 3 \times 5$, 次設後一除數為 b' , 則知 $a = b' \times 20 = b' \times 4 \times 5$. 故 $b \times 3 = b' \times 4$. 即始除數之 3 倍等於後除數之 4 倍, 因知後除數即由始除數之 3 倍除以 4 而得也.

圖 2. 設被除數為 a , 除數為 b , 則依題意, $a = b \times 15$. 如可變化除數與商, 而欲被除數保持不變, 若設商已變化, 則非以其反對變化施之於除數不可. 然本題中, 商已乘上 $20 \div 15 = \frac{4}{3}$, 因知除數應除以 $\frac{4}{3}$ 也. 即 $a = (b \div \frac{4}{3}) \times (15 \times \frac{4}{3}) = b \div \frac{4}{3} \times 20$.

25. 某除法中, 商得 13, 剩餘為 26, 其餘數與被除數之和為 404. 求除數及被除數.

圖 404 既為除數與被除數之和, 則 404 除以除數所得之商應為 $13 + 1 = 14$, 而剩餘仍為 26. 故除數為 $(404 - 26) \div 14 = 27$, 因而被除數為 $404 - 27 = 377$.

26. 以某數除 11011, 求得之商為二位數, 並已知得商之第一數字時之剩餘為 84, 得第二數字時之剩餘為 50. 試求除數之值.

圖 商既為二位數, 則商之第一數字與除數之乘積之末位相當於被除數之十位. 因其時之剩餘為 84, 故除數定為 $1101 - 84 = 1017$ 之約數. 同理, 因求得第二數字時之剩餘為 50, 故知除數又為 $841 - 50 = 791$ 之約數. 因而求 1017 與 791 之最大公約數, 得為 113. 若以 113 作除數, 則得商為二位數中之 97, 故知 113 為所求之除數.

27. 一除法中, 其被除數、除數、商之和為 73; 除數、商、剩餘之和為 17; 若設商為 8, 則被除數為何?

圖 被除數與除數之和, 即除數與商之積加上剩餘與除數之和, 為 $73 - 8 = 65$. 但除數與剩餘之和為 $17 - 8 = 9$, 故除數與商之積為 $65 - 9 = 56$. 是以除數等於 $56 \div 8 = 7$, 故所求之被除數為 $73 - 7 - 8 = 58$.

28. 一除法中,商等於除數之 6 倍,除數又等於剩餘之 6 倍,而此三數之和為 516 求被除數.

圖 除數為剩餘之 6 倍,商為除數之 6 倍,是以商即為剩餘之 $6 \times 6 = 36$ 倍. 故三數之和為剩餘之 $36 + 6 + 1 = 43$ 倍,以是求得剩餘為 $516 \div 43 = 12$, 從而除數為 $12 \times 6 = 72$, 商為 $72 \times 6 = 432$. 由此求得所需之被除數為 $432 \times 72 + 12 = 31116$.

29. 某數為 17 除時,所得之整數商等於剩餘之 5 倍,而被除數與整數商之和為 182. 試求被除數.

圖 被除數等於商之 17 倍加剩餘,然商為剩餘之 5 倍,商之 17 倍即等於剩餘 5 倍之 17 倍,或 85 倍,因而被除數即為剩餘之 85 倍與剩餘之和,即等於剩餘之 86 倍. 依題意,被除數與商之和等於 182, 故剩餘之 86 倍與 5 倍之和,即 91 倍,等於 182, 是以知剩餘為 $182 \div 91 = 2$, 因而求得被除數為 $2 \times 86 = 172$.

30. 某數除以 7 時,得商 8 與剩餘若干,次加 6 於其剩餘而復以 7 除. 照此法進行,歷五回而剩餘始無,求某數.

圖 某數除以 7 時,所得之剩餘決不超乎 1, 2, 3, 4, 5, 6 六數之外,故此類剩餘加 6 後,必等於 7, 或大於 7 而小於 7 之 2 倍,其理甚明. 故剩餘加 6 後而為 7 除, 歷 5 回而始整除,關於每回之除算得商始終為 1. 以此,前之商 8 加上後之商 5 後乘之以 7, 即等於某數與 5 回加入之 6 之和. 是故可知所求之數為 $(8+5) \times 7 - (6 \times 5) = 61$.

D. 剩 餘

31. 於除法中,剩餘必小於被除數之半. 試證之.

圖 於除法中, '除數 $\times$ 商 + 剩餘 = 被除數' 故若 '剩餘 = 被除數 $\div 2$ ', 或 '剩餘 > 被除數 $\div 2$ ' 時, 則 '除數 $\times$ 商 = 被除數 $\div 2$ ', 或 '除數 $\times$ 商 < 被除數 $\div 2$ ', 因而 '除數 $\times$ 商 = 剩餘' 或 '除數 $\times$ 商 < 剩餘'. 於是, 設商為整數, 則此二式即表示 '除數 = 剩餘', 或 '除數 < 剩餘', 是乃不合理者. 若商為小數時, 則被除數得以 10 之某次幂乘之, 使商成整數. 於是因被除數及除數, 俱以同數倍之, 故其倍數之大小關係, 與原來之被除數, 除數之關係同. 是以無論在何款中, 若 '剩餘 = 被除數 $\div 2$ ', 或 '剩餘 > 被除數 $\div 2$ ', 則生不合理之結果, 故如題所言.

32. 某整數除以 2 時,得剩餘 1, 次以 5 除其商, 則得剩餘 3, 再以 6 除此時所得之商, 則得剩餘 4. 然則某整數若以 $2 \times 5 \times 6 = 60$ 除時,其剩餘如何?

圖 設某整數 N 除以 2 時所得之商為 P , 則 $N = P \times 2 + 1$; 設 P 為 5 除時所得之商為 Q , 則 $P = Q \times 5 + 3$; 故 $N = (Q \times 5 + 3) \times 2 + 1 = Q \times 5 \times 2 + 3 \times 2 + 1$, 設 Q 除以 6 時之商為 R , 則 $Q = R \times 6 + 4$, 故 $N = (R \times 6 + 4) \times 5 \times 2 + 3 \times 2 + 1 = R \times 6 \times 5 \times 2 + 4 \times 5 \times 2 + 3 \times 2 + 1$. 因而以 60 除 N 時所得之剩餘為 $4 \times 5 \times 2 + 3 \times 2 + 1 = 47$. (參照 15 題)

注意 普偏言之, 最後之剩餘 乘以其前

之諸除數，又其前一之剩餘，乘以此剩餘前之諸除數，如是以往，則加此種種積與最先之剩餘，即得全剩餘。

33. 某整數除以 24，此除數乃可分為 2, 3, 4 三因數者，並已知某整數最初以 2 除之，得剩餘 1，復以 3 除其商，則得剩餘 2，再以 4 除此時所得之商，則得剩餘 2，然則若最初除以 4，次以 3 除其商，再以 2 除其商時，於此之各除法中所得之剩餘如何？

圖 某整數為 (第三商) $\times 4 \times 3 \times 2 + 2 \times 3 \times 2 + 1 \times 2 + 1$ [32 題]，即等於 (第三商) $\times 24 + 15$ ，因此某整數除以 4 時，則得商為 (第三商) $\times 6 + 3$ ，並得剩餘 3，又以 3 除 (第三商) $\times 6 + 3$ 時，則得商為 (第三商) $\times 2 + 1$ 而無剩餘，最後此商為 2 除時，則得商仍為第三商而得剩餘 1。

34. 以甲數之因數逐次除乙數，捨棄每次之剩餘，則最後之商與以甲數除乙數所得之商相等，試證之。

圖 因以甲之因數逐次除乙數時，捨棄每次之剩餘，故以甲數除乙數所得之商決不小於逐次以甲數之因數除乙數最後所得之商，其理甚明，故祇須證明前商決不大於後商即可。在次之除法中，所捨之數小於逐次之除數。例如設除數為 60，分解之為 $3 \times 4 \times 5$ ，則逐次之剩餘決不大於 2, 3, 4。今即設剩餘為最大之 2, 3, 4，則依 32 題，全剩餘為 $2 + 3 \times 3 + 4 \times 3 \times 4 = (3-1) + (4-1) \times 3 + (5-1) \times 3 \times 4 = (3-1) + (3 \times 4 - 3) + (3 \times 4 \times 5 - 3 \times 4) = 3 \times 4 \times 5 - 1 = 60 - 1$ ，故不行逐次除法，而以 $3 \times 4 \times 5$ ，即 60 除之，商亦不增加，故以甲數除

乙數所得之商，決不大於以甲數之因數逐次除乙數所得之商，即如題所言。

附註 本題歸於 15 題，但題言及語法相異，故另揭之。

35. 保持除數不變，而被除數乘以某數時，則商及剩餘亦將乘以同數，試證之。

圖 設被除數為 31，除數為 7，則得商 4 與剩餘 3，然則 $31 = 7 \times 4 + 3$ ，但相等之二數，各以同數乘之，其結果仍相等，故 $31 \times 2 = (7 \times 4 + 3) \times 2 = 7 \times 4 \times 2 + 3 \times 2 = 7 \times (4 \times 2) + 3 \times 2$ ，由是可知被除數乘 2 時而除數不變，則商及剩餘亦均 2 倍其值。

附註 在本題中，被除數所乘之數與剩餘之積必須小於除數。何則，例如設 125 除以 30 時，得商 4 與剩餘 5，即 $125 = 30 \times 4 + 5$ ，而等式之兩邊設均乘 7，則 $125 \times 7 = 30 \times 4 \times 7 + 5 \times 7$ ，故被除數乘以 7 時，得商為 4×7 ，剩餘為 $5 \times 7 = 35$ 。然以剩餘 35 大於除數 30 故，則剩餘決非 35 也。於是與題言不合。

36. 保持除數不變，被除數除以某數，商及剩餘亦均除以同數。試證之。

圖 設被除數為 a ，除數為 b ，商為 q ，剩餘為 r ，則 $a = b \times q + r$ 。設以 n (n 為得整除 a, q, r 之任何數) 除此等式之兩邊，則 $a \div n = (b \times q + r) \div n = (b \times q) \div n + (r \div n)$ [配分定則] $= b \times (q \div n) + (r \div n)$ ，故 $a \div n = b \times (q \div n) + (r \div n)$ 。由是可知保持除數不變，被除數設除以某數 n ，則商及剩餘亦均除以同數。

37. 保持被除數不變，假設除數乘以某數時，則商須以同數除之，而剩餘仍不變，試證

之。

圖 設被除數為 a ，除數為 b ，商為 q ，剩餘為 r ，則 $a = (b \times q) + r$ ，今 $b \times q$ 積中之
一因數 b 為某數 m 乘後，則須破壞等式
之成立，欲仍保持等式之成立，則非以同
數除其積中之他一因數 q 不可。故 $a = (b$
 $\times m) \times (q \div m) + r$ ，而與題言吻合。

注意 在本題中， q 必得為 m 所整除，否
則剩餘顯然須發生變化。

38. 以甲數先後除乙數及丙數，所得二剩
餘之和，等於以甲數除乙丙二數之和時，所
得之剩餘，或再加入甲數而得之和，其證法
如何？

圖 設乙為甲除時所得之剩餘為 R ，則‘乙
= 甲之倍數 + R ’，又丙為甲除時所得之剩
餘為 r ，則‘丙 = 甲之倍數 + r ’，因此，則
‘乙 + 丙 = 甲之倍數 + 甲之倍數 + $R + r$ ’，
但以兩甲數之倍數之和仍為甲之倍數，故
‘乙 + 丙 = 甲之倍數 + $R + r$ ’。若 $R + r < \text{甲}$ ，
則 $R + r$ 即為以甲除乙 + 丙時所得之剩
餘。若 $R + r > \text{甲}$ ，則因 $R < \text{甲}$ ， $r < \text{甲}$ ，而 R
 $+ r < \text{甲} \times 2$ 。因此， $R + r$ 即等於以甲除乙
+ 丙時所得之剩餘加甲數。故如題所言。

39. 以甲數除乙數及丙數所得二剩餘之
差等於以甲數除乙丙二數之差時之剩餘，或
等於此時所得之剩餘與甲數之差。試證之。

圖 設以甲數除乙數及丙數時，所得之二
剩餘各為 R, r ，則‘乙 = 甲之倍數 + R ’，‘丙
= 甲之倍數 + r ’，因而若設乙大於丙， R
 $> r$ ，並因甲之二個倍數之差仍為甲之倍
數，故‘乙 - 丙 = 甲之倍數 + $(R - r)$ ’，因知
 $R - r$ 即為以甲除乙 - 丙時所得之剩餘。若

設乙 $>$ 丙，且 $R < r$ ，則甲 + $R > r$ ，且‘乙 - 丙
= 甲之倍數 + 甲 + $R - r$ ’，因而‘甲 + $R - r$
 $<$ 甲’，且‘甲 + $R - r = \text{甲} - (r - R)$ ’。是乃乙
- 丙除以甲時，所得之剩餘也；故 $r - R$ 等
於以甲除乙 - 丙時之剩餘與甲之差。即如
題所言。

40. 設以甲數除乙數及丙數所得之二剩
餘之和等於甲數，則乙丙二數之和得為甲數
所整除，試證之。

圖 1. 設以甲除乙丙時所得之二剩餘各
為 R, r ，則‘乙 = 甲之倍數 + R ’，‘丙 = 甲
之倍數 + r ’，因而‘乙 + 丙 = 甲之倍數 + R
+ r ’。然依題意， $R + r$ 與甲相等，故‘乙 + 丙
= 甲之倍數 + 甲 = 甲之倍數’，因知‘乙
+ 丙’得為甲所整除。

圖 2. 由 38 題，可知以甲除乙及丙所得
之二剩餘之和，等於以甲除乙丙之和所得
之剩餘，或等於再加上甲之和，然依題意，
前二剩餘之和既等於甲，則以甲除乙丙之
和所得之剩餘仍等於甲，是乃不可能者，
且剩餘加甲後仍等於甲，是可知剩餘為 0
也，即‘乙 + 丙’得為甲所整除。

注意 與本題同理，設以甲數除乙數及丙
數所得之二剩餘相等時，則乙丙二數之差
得為甲數所整除，亦得證之。

41. 以一數除諸他數之相乘積之剩餘，等
於以該數各別除諸數所得之諸剩餘之相乘
積，或等於此乘積再除該數所得之剩餘，試
證之。

圖 例如求 24, 26, 34 之相乘積除以 7
時所得之剩餘，因 $24 = 7$ 之倍數 + 3, 26
 $= 7$ 之倍數 + 5，故 $24 \times 26 = (7 \text{ 之倍數}$

$+3) \times (7\text{之倍數} + 5)$, 然此式之右邊, 即等於 7之倍數 與 $7\text{之倍數} \times 5$ 之積, 7之倍數 與 3×5 之積, 7之倍數 與 5 之積, 及 3×5 等四數相加之和, 此四數中, 始三者皆為 7之倍數 , 故知 $24 \times 26 = 7\text{之倍數} + 3 \times 5$; 次因 $34 = 7\text{之倍數} + 6$, 故 $24 \times 26 \times 34 = (7\text{之倍數} + 3 \times 5) \times (7\text{之倍數} + 6) = 7\text{之倍數} + 3 \times 5 \times 6$, 因知以 7 除 $24 \times 26 \times 34$ 時所得之剩餘, 即等於以 7 除 $3 \times 5 \times 6$ 時所得之剩餘. 故以一數除諸他數之相乘積所得之剩餘, 等於以該數各別除諸數時所得之剩餘之相乘積, 若此乘積小於除數. 設或此乘積不小於除數, 則所求之剩餘等於此相乘積為除數所除時之剩餘.

42. 試求 825491 之四乘器為 7 及 9 所除時所得之兩剩餘.

圖 8254914 , 即四 825491 之連乘積, 為 7 除時所得之剩餘, 等於 825491 為 7 除時所得剩餘之四乘器, 或等於此乘器為 7 除時所得之剩餘 (41 題), 825491 為 7 之倍數 $+2$, 故所求之剩餘為 $2^4 = 16$ 被 7 所除而得之剩餘, 即 2 . 同理, 可求以 9 除時所得之剩餘, 因 825491 為 9 之倍數 $+2$, 故所求之剩餘為 $2^4 = 16$ 除以 9 時所得之剩餘, 即 7 .

43. 某數設以 391 除之, 則得剩餘 300 , 然則以 17 除時, 其剩餘為幾何?

圖 因 391 為 17 之倍數, 故 391 之倍數加 300 所得之數, 亦即 17 之倍數加 300 所得之數, 其理甚明. 故某數為 17 除時所得之剩餘, 即等於 300 以 17 除時所得之剩餘, 即 11 .

44. 若於某數字之右, 添若干個 0 , 其個數較某質數 [2 及 5 除外] 少 1 , 則如是所得之數除以該質數時所得之剩餘, 必等於首位數字, 例如 5000000 除以 7 時, 得剩餘 5 . 求證.

圖 $5000000 = 5 \times (999999 + 1) = 5 \times 999999 + 5 \times 1$, 而 $999999 = 10^7 - 1$, 其中 10 與 7 互質, 故為 7 之倍數, 因此, 由 Fermat 氏定理 [1749 題], 剩餘為 5 . 關於其他質數 $11, 13$, 等, 亦可如是證之.

圖 本題中所以將 2 及 5 除外者, 因 2 或 5 不與 10 互質, 故不能應用 Fermat 氏定理也.

E. 一 數

45. 試求 13436928 之全部約數之和.

圖 $13436928 = 2^{11} \times 3^3$, 故本題之全部約數乃係 $(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{11}) \times (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^3)$ 積中之各項, 故欲求所求之和, 祇須求得此積中之各項之和即積之值已可. 然前一括號中, 乃以 1 為初項, 2 為公比之 12 項之等比級數之和, 其和為 $\frac{2^{12}-1}{2-1} = 4095$, 同理, 後一括號中之數式之值為 $\frac{3^4-1}{3-1} = 9841$, 因而其乘積為 4095×9841 , 即為 **40298895**, 是乃所求之和也.

46. 求 12564 之全部約數之和.

圖 因 $12564 = 2^2 \times 3^2 \times 349$, 由 45 題, 可知其全部約數之和為 $(1 + 2 + 2^2) \times (1 + 3 + 3^2) \times (1 + 349) = 7 \times 13 \times 350 = \mathbf{31850}$.

47. 設 $12345 \triangle \odot$ 得為 234 所整除, 問

△◎ 應為何二數字？

解 以 234 除 12345△◎ 所得之商，當不小於以 234 除 1234500 而得之商，亦當不大於以 234 除 1234599 所得之商，其理甚明，而以 1234500 為 234 除時，得商 5275，剩餘 150，又以 1234599 為 234 除時，得商 5276，剩餘 15，故若設 12345△◎ 能為 234 所整除，其商應為 5276，而被除數應為 $1234599 - 15 = 1234584$ ，因知設 △◎ 為 84 即可。

48. 6×9 一數，若得為 257 所整除時，其商如何？

解 257 之 20 倍為 5140，其 30 倍為 7710，是以所求之商必在 20 與 30 之間，即商之十位數字為 2，又因除數與商之積等於被除數，則除數之個位數字 7 與商之個位數字之相乘積中之個位數字非等於 9 不可，然與 7 相乘而得之積之個位數為 9 者，僅 7 一數，故知所求之商為 27。

49. 15×6 為 36 整除時，其所得之商須為最大之整數，問 *** 應書何三數字以代始可？

解 1. 得為 36 所整除之數，亦能為 9 及 4 所整除，因得為 9 所整除之數，其列位數字之和亦必為 9 所能整除，故始自最大數字 159996，順次書列得為 9 所整除之數，有 159966, 159876, 等；而得為 4 所整除之數，其末二位之數亦應得為 4 所整除者，然因 66 不能為 4 所整除，76 則能為 4 所整除，是故適合條件之諸數中，最大者即為 159876，是以所求之數字為 987。

解 2. 15×6 當不大於 159996，今

設以 36 除 159996，則得商 4444，剩餘 12。而一數乘 36 後，所得之積之個位數字為 6 者，其個位數字應為 1 或 6，故以 36 除 15×6 後所得之商，既應小於 4444，且其個位數字應為 1 或 6，是知其商應在 4441, 4436 等數之中，而最大者，乃為 4441，故可知 15×6 應為 $4441 \times 36 = 159876$ ，即 *** 為 987 也。

50. 某學生以 467 乘某數，得積 1925817，然此積中之 9 與 7 二數字乃屬錯誤者，問正確之數字為何？

解 由誤得之積 1925817 減第六位之若干倍，加或減第一位之若干倍，而令所得之數為 467 之倍數即可。今 $1925817 \div 467$ 之剩餘 = 376， $100000 \div 467$ 之剩餘 = 62，而 $376 = 62 \times 6 + 4$ 。故 $1925817 - 600000 - 4 = 1325813 = 467$ 之倍數，故 9 及 7 俱應變為 3。

51. 自 87 減去某數之 5 倍，其餘數等於自 27 減去某數之 2 倍時所得餘數之 4 倍，求某數。

解 自 27 減去某數 2 倍所得之餘數之 4 倍，等於自 27 之 4 倍減去某數之 2 倍之 4 倍所得之餘數，即等於自 108 減去某數 8 倍時所得之餘數。故自 87 減去某數 5 倍所得之餘數與自 108 減去某數 8 倍所得之餘數相等。由是依次反對計算之，87 等於自 108 減去某數之 8 倍所得之餘數，加某數之 5 倍所得之和，亦即等於自 108 減去某數之 3 倍，故 $108 - 87 = 21$ 等於某數之 3 倍，故某數為 $21 \div 3 = 7$ 。