高等数学习题集解答

（1965年修订本同济大学数学教研组编）

（一）

无锡压缩机厂七·二一大学印

1979年3月

目　录

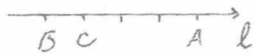
第一编　解析几何

第一编　解析几何

第一章　平面上的直角坐标、曲线及其方程

平面上点的直角坐标、坐标变换

1.1　设在轴上三点A、B、C它们的排列次序如图，A和B间距离为4，C和B间距离为1：



(a) 求轴上有向线段 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 的值．

(b) 若以点A为原点，那么点A，B，C的坐标等于什么？

解：(a) $\overline{AB}=-4$；$\overline{AC}=-3$；$\overline{BC}=1$

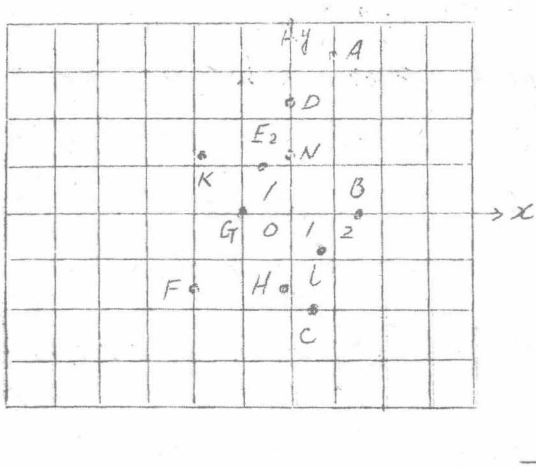
(b) $A(0)$；$B(-4)$；$C(-3)$．

1.2　已知数轴上点A，B，C的坐标依次为 $-6, 0, 8$，求轴上有向线段 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 的值．

解：$\overline{AB}=0-(-6)=6$；$\overline{BC}=8-0=8$；$\overline{CA}=-6-8=-14$．

1.3　作下列各点：$A(2,7)$，$B(3,0)$，$C(1,-4)$，$D(0,5)$，$E(-1,2)$，$F(-4,-3)$，$G(-2,0)$，$H(0,-3)$，$K(-3\frac{1}{2},2\frac{1}{3})$，$L(\sqrt{2},-\sqrt{3})$，$N(0,\sqrt{5})$．

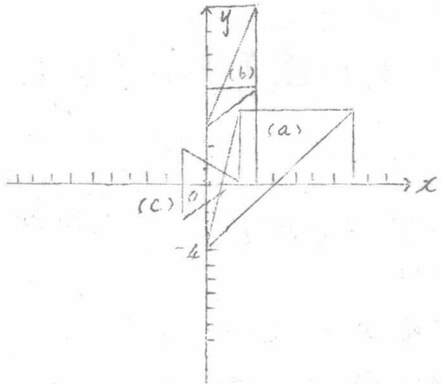
解：



1.4 三角形的三个顶点的位置如下：

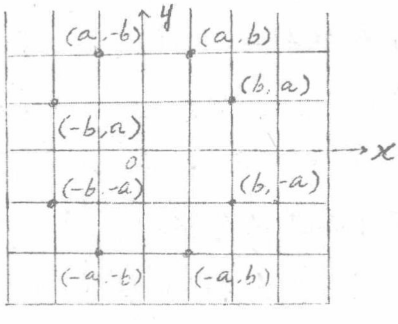
(a) $(8,4)$，$(0,-4)$，$(2,4)$；(b) $(3,5)$，$(3,10)$，$(0,2.5)$；

(c) $(2,0)$，$(-1,\sqrt{3})$，$(-1,-\sqrt{3})$。求作这些三角形。



1.5 设 $a=1$，$b=2$，求作点 (a,b)，(b,a)，$(-a,b)$，$(b,-a)$，$(-b,a)$，$(a,-b)$ 和 $(-b,-a)$。

解：



1.6 一正方形的边长为2单位长度，如果将两条坐标轴放到这正方形的任意一组邻边上去，问正方形各点的坐标将如何？

解：i) $(0,0)$，$(0,2)$，$(2,2)$，$(2,0)$

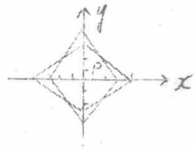
ii) $(0,0)$，$(2,0)$，$(2,-2)$，$(0,-2)$

iii) $(0,0)$，$(-2,0)$，$(-2,2)$，$(0,2)$

iv) $(0,0)$，$(0,-2)$，$(-2,-2)$，$(-2,0)$。

1.7　菱形每边长为5，它有一对角线长6，如果把菱形的二对角线放在二坐标轴上，求它的各个顶点的坐标。

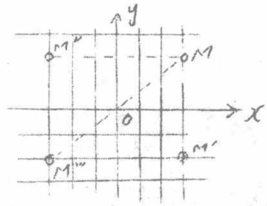
解：　菱形的另一对角线长 $2\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2}=8$．把菱形中心置于原点，则有二种情况：



i)　$(3,0)$．$(0,4)$．$(-3,0)$．$(0,-4)$；

ii)　$(4,0)$．$(0,3)$．$(-4,0)$．$(0,-3)$．

1.8　已知点 $M(3,2)$，作它关于横轴、纵轴，原点的对称点，求这些点的坐标．

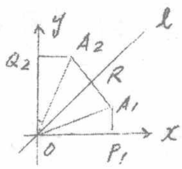


解：　横轴对称点 $M'(3,-2)$；

纵轴对称点 $M''(-3,2)$；

中心对称点 $M'''(-3,-2)$．

1.9　证明点 $A_1(a,b)$ 关于第Ⅰ和第Ⅲ象限坐标角的平分线的对称点 A_2 必有坐标 (b,a)．



证：　联 A_1A_2 交 l 与 R，联 OA 及 OA_2 作 $A_1P_1\perp x$ 轴，$A_2Q_2\perp y$ 轴，分别交于 P_1 及 Q_2 点．由对称性，

$\therefore Rt\triangle OA_1R\cong Rt\triangle OA_2R$，从而

$|OA_1|=|OA_2|$，又 $\angle A_1OR=\angle A_2OR$

$\therefore \angle A_1OP_1=\angle A_2OP_2$，故 $Rt\triangle OA_1P_1\cong Rt\triangle OA_2Q_2$，

于是就得 $|OP_1|=|OQ_2|$，$|P_1A_1|=|Q_2A_2|$，即 $|x|=|b|$，$|y|=|a|$．

注意到正负值的关系，即知 $x=b$，$y=a$，故 A_2 的坐标为 (b,a)．

1.10　点 B 与点 $A(2,4)$ 对称于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线，求 B 的坐标．

解：　由9题，则 $B(4,2)$．

1.11 一点在某一坐标系下的坐标为 $x=2$, $y=-1$. 如果轴的方向保持不变，而将原点移至点：

(a) $(4,5)$;　　　　(b) $(4,-5)$;

(c) $(-4,5)$;　　　　(d) $(-4,-5)$.

该点的坐标将如何？

解：(a) $x_a=2-4=-2$,　$y_a=-1-5=-6$;

(b) $x_b=2-4=-2$,　$y_b=-1-(-5)=4$;

(c) $x_c=2-(-4)=6$,　$y_c=-1-5=-6$;

(d) $x_d=2-(-4)=6$.　$y_d=-1-(-5)=4$.

1.12 某点在两轴方向相同的两坐标系下的坐标为 $(12,-7)$ 和 $(0,15)$. 各系的原点在他系下的坐标等于什么？

解：$O_1x=0-12=-12$.　$O_1y=15-(-7)=22$.

$O_2x=12-0=12$.　$O_2y=-7-15=-22$.

1.13 如果将坐标轴旋转 60°，点 $M(1,\sqrt{3})$ 的坐标如何？

解：因为有 $\left.\begin{array}{l} 1=M_x\cos 60^\circ-M_y\sin 60^\circ \\ \sqrt{3}=M_x\sin 60^\circ+M_y\cos 60^\circ \end{array}\right\}$

即　$2=M_x-M_y\sqrt{3}$,　$2\sqrt{3}=M_x\sqrt{3}+M_y$

$\therefore$　$4M_x=8$,　$\therefore M_x=2$, $M_y=0$.

1.14 如果将坐标轴旋转 45°，点 $M(1,\sqrt{3})$ 的坐标将如何？

解：$\left.\begin{array}{l} \because 1=M_x\cos 45^\circ-M_y\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}M_x-\frac{\sqrt{2}}{2}M_y \\ \sqrt{3}=M_x\sin 45^\circ+M_y\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}M_x+\frac{\sqrt{2}}{2}M_y \end{array}\right\}$

$\therefore \sqrt{2}M_x=1+\sqrt{3}$,　$\therefore M_x=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

故而　$M_y=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

1.15　坐标轴应该旋转多少角度，方能使点 $M(2,0)$ 的横标和纵标变成相等？（我们设 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$）.

解：由假设，在假定变换后坐标为 (a,a) 的情况下，有下列关系.

$$\begin{cases} 2=a\cos\alpha-a\sin\alpha \\ 0=a\cos\alpha+a\sin\alpha \end{cases}$$

由第二式，则 $\cos\alpha=-\sin\alpha$，即 $tg\alpha=-1$.　$\therefore\alpha=-\frac{\pi}{4}$

（本来第二式也有 $a=0$ 之根，但显然是不要的）

两点间的距离，线段的定比分点，三角形的面积.

1.16　求下列各题两点间的距离：

(a)　$(5,2)$ 和 $(1,-1)$；　(b)　$(-6,3)$ 和 $(0,-5)$；

(c)　$(0,0)$ 和 $(-3,4)$；　(d)　$(9,-7)$ 和 $(4,5)$.

解：(a)　$d=\sqrt{(5-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$；

(b)　$d=\sqrt{(-6-0)^2+(3+5)^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$；

(c)　$d=\sqrt{3^2+4^2}=5$；

(d)　$d=\sqrt{(9-4)^2+(-7-5)^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

1.17　已知三角形的顶点：$A(3,2)$，$B(-1,-1)$ 和 $C(11,-6)$ 求三角形的周长.

解：　$AB=\sqrt{(3+1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$BC=\sqrt{12^2+5^2}=13$，

$AC=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$；故 $S=5+13+8\sqrt{2}=2(9+4\sqrt{2})$.

1.18　试证顶点为：$A(0,0)$，$B(3,1)$ 及 $C(1,7)$ 的三角形是直角三角形.

证：　有 $AB=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，$BC=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$，

$AC=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}$

现在因为 $\overline{AC}^2=50=40+10=\overline{BC}^2+\overline{AB}^2$，故△ABC为直角三角形（其中AC为斜边）

1.19　一点从点 $A(-3,-2)$ 作直线运动移至点 $B(4,5)$，求该点所经过的距离.

解：$S=\sqrt{(4+3)^2+(5+2)^2}=\sqrt{7^2+7^2}=7\sqrt{2}$

1.20　证明 $(7,2)$ 和 $(1,-6)$ 在以 $(4,-2)$ 为圆心的圆周上；并求这个圆的半径.

解：∵ $(7,2)$ 到 $(4,-2)$ 的距离 $d_1=\sqrt{3^2+4^2}=5$；$(1,-6)$ 到 $(4,-2)$ 的距离 $d_2=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 故 $d_1=d_2$. ∴ $(7,2)$ 和 $(4,-2)$ 同在以 $(4,-2)$ 为圆心，且半径 $R=5$ 的圆上.

1.21　在 x 轴上求与 $A(5,12)$ 的距离为 13 的点的坐标.

解：设 x 轴的点坐标为 $B(x,0)$，则由假设有方程式：

$$13=\sqrt{(x-5)^2+(0-12)^2},$$

即　$169=(x-5)^2+144$，∴ $(x-5)^2=25$

故　$x-5=\pm5$，∴ $x_1=0$.　$x_2=+10$

所以所求点有二个：$B_1(0,0)$；$B_2(10,0)$.

1.22　在第Ⅰ象限角的平分线上求一点，它与点 $A(0,2)$ 的距离为 $\sqrt{2}$.

解：因为所求点在第Ⅰ象限角的平分线上，故可假定为 $B(a,a)$

由假设，则 $\sqrt{2}=\sqrt{(a-0)^2+(a-2)^2}$，即是

$$2=a^2+a^2-4a+4$$

$$\therefore 2a^2-4a+2=0,\quad a^2-2a+1=0,\quad \therefore a=1.$$

因此所求点为 $B(1,1)$.

1.23　求点 M 的纵坐标，已知它的横坐标等于 7，而到点 $N(-1,5)$ 的距离等于 10.

解：设所求点为 $B(7,y)$，由设有：$10=\sqrt{(7+1)^2+(5-y)^2}$,

即 $100=64+(5-y)^2$, ∴ $(y-5)^2=36$, $y-5=\pm 6$.

因而 $y_1=-1$, $y_2=11$, 因此所求点有二个 $(7,-1)$ 和 $(7,11)$.

1.24 求一点，它到两坐标轴和 $(3,6)$ 都有相等的距离.

解：设所求点为 (x,y)，则由设 $|x|=|y|=\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}$

故 $x^2=(x-3)^2+(x-6)^2$, 即 $x^2=x^2-6x+9+x^2-12x+36$

或 $x^2-18x+45=0$. ∴ $x_1=3$, $x_2=15$. 故本题所求之点有二个 $(3,3)$ 和 $(15,15)$

1.25. 求与已知三点 $A(2,2)$, $B(-5,1)$ 和 $C(3,-5)$ 等距离的点.

解：设此点为 $M(x,y)$，由假设，即有下列关系式：

$$(x-2)^2+(y-2)^2=(x+5)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+5)^2$$

或 $$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+8=x^2+y^2+10x-2y+26 \\ x^2+y^2-4x-4y+8=x^2+y^2-6x+10y+34 \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} 14x+2y+18=0 \\ 2x-14y-26=0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} 7x+y+9=0 \cdots\cdots ① \\ x-7y-13=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①×7+② 得 $50x+50=0$. ∴ $x=-1$, 故 $y=-2$

∴ 所求点是 $M(-1,-2)$.

1.26 试用解析法证明，任意三角形两边中点连线之长等于第三边之一半.

证：设三角形之三顶点为 $A(x_a,y_a)$, $B(x_b,y_b)$, $C(x_c,y_c)$ 则 AB 之中点 $E(x_e,y_e)=E\left(\frac{x_a+x_b}{2},\frac{y_a+y_b}{2}\right)$.

AC 之中点 $F(x_f,y_f)=F\left(\frac{x_a+x_c}{2},\frac{y_a+y_c}{2}\right)$,

$$\therefore \overline{EF}=\sqrt{\left(\frac{x_a+x_c}{2}-\frac{x_a+x_b}{2}\right)^2+\left(\frac{y_a+y_c}{2}-\frac{y_a-y_b}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_c-x_b)^2+(y_c-y_b)^2}=\frac{1}{2}\overline{BC}.$$

1.27 点 $M_1(1,1)$，$M_2(2,2)$，$M_3(3,-1)$ 是平行四边形的三个顶点，求第四个顶点。

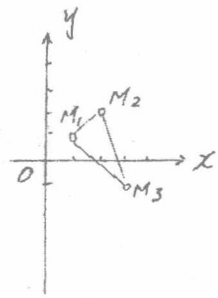
解：设它为 $M_4(x,y)$，由条件，则有：$\overline{M_1M_2}=\overline{M_3M_4}$，$\overline{M_2M_3}=\overline{M_1M_4}$

即 $\left.\begin{array}{l}\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}\\ \sqrt{(3-2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\end{array}\right\}$

$\therefore \left.\begin{array}{l}2=x^2+y^2-6x+2y+10\\ 10=x^2+y^2-2x-2y+2\end{array}\right\}$ 或 $\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2-6x+2y=-8\\ x^2+y^2-2x-2y=8\end{array}\right.$

相减，$-4x+4y=-16$，$\therefore x-y=4$

代入第一方程得：



$y^2+8y+16+y^2-6y-24+2y+8=0$

即 $2y^2+4y=0$，$\therefore y_1=-2$，$y_2=0$

故 $x_1=2$，$x_2=4$，这样就得到第四个顶点的二个解：$(2,-2)(4,0)$

又由 $\overline{M_1M_3}^2=8=(x-2)^2+(y-2)^2=\overline{M_2M_4}^2$

$\overline{M_2M_3}^2=10=(x-1)^2+(y-1)^2=\overline{M_4M_1}^2$

得到 $x^2+y^2-4x-4y=0$ 及 $x^2+y^2-2x-2y=8$，

相减，$2x+2y=8$，$\therefore x=-y+4$，代入第一方程：

$$y^2-8y+16+y^2+4y-16-4y=0$$

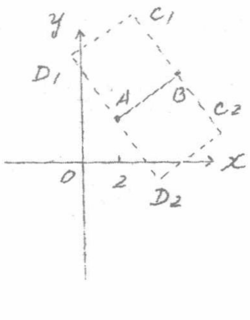
即 $2y^2-8y=0$，$\therefore y_2=0$，$y_3=4$，对应 $x_2=4$，$x_3=0$。

因此又得到 M_4 的另一解 $(0,4)$，由此得到三解：

$(2,-2)$，$(4,0)$，$(0,4)$。

1.28 正方形相邻两顶点是 $A(2,3)$ 和 $B(6,6)$，求其余的顶点。

解：先求 $C(x_C,y_C)$，因为



$$\overline{AC}^2=2\overline{AB}^2 \quad 2(4^2+3^2)=(x_c-2)^2+(y_c-3)^2$$

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2 \quad (4^2+3^2)=(x_c-6)^2+(y_c-6)^2$$

化简成：$\begin{cases} x_c^2+y_c^2-4x_c-6y_c=37 \\ x_c^2+y_c^2-12x_c-12y_c=-47 \end{cases}$

相减得 $8x_c+6y_c=84$，$\therefore y_c=-\frac{4}{3}x_c+14$。

代入化简得 $x_c^2-12x_c+27=0$，$\therefore x_{c1}=3$，$x_{c2}=9$。

相应地，$y_{c1}=10$，$y_{c2}=2$。

于是得到C的结果为 $(3,10)$ 及 $(9,2)$。

现在再来求 D_1 及 D_2，由 $\overline{D_1A}=\overline{D_1C_1}$ 及 $\overline{D_2A}=\overline{D_2C_2}$ 来建立方程：i) $(x_{d_1}-2)^2+(y_{d_1}-3)^2=(x_{d_1}-3)^2+(y_{d_1}-10)^2=25$.

ii) $(x_{d_2}-2)^2+(y_{d_2}-3)^2=(x_{d_2}-9)^2+(y_{d_2}-2)^2=25$

由 i) 解得：$x_{d_1}=-1$，$y_{d_1}=7$；由 ii) 解得：$x_{d_2}=5$，$y_{d_2}=-1$。

1.29 下列各对座标表示一线段的两端点，试求它们的中点：

(a) $(7,4)$，$(3,2)$；　　(b) $(6,-4)$，$(2,2)$；

(c) $(a,1)$，$(1,a)$；　　(d) $(0,0)$，$(0,\frac{2}{3})$；

(e) $(-3\frac{3}{8},-7\frac{5}{8})$，$(2\frac{3}{4},-4\frac{1}{2})$。

解：(a) $\left(\frac{7+3}{2},\frac{4+2}{2}\right)=(5,3)$；　(b) $\left(\frac{6+2}{2},\frac{-4+2}{2}\right)=(4,-1)$；

(c) $\left(\frac{a+1}{2},\frac{1+a}{2}\right)$；　(d) $\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+\frac{2}{3}}{2}\right)=(0,\frac{1}{3})$；

(e) $\left(\frac{1}{2}\left[-3\frac{3}{8}+2\frac{3}{4}\right],\frac{1}{2}\left[-7\frac{5}{8}+\left(-4\frac{1}{2}\right)\right]\right)=\left(-\frac{5}{16},-6\frac{1}{16}\right)$.

1.30 从点 $A(2,3)$ 引一线段到点 $B(7,-2)$，再延长同样的长度，求延长线端点的坐标。

解：设端点为 $C(x,y)$，则有 $\frac{x-2}{7-2}=2:1=\frac{y-3}{-2-3}$，

$\therefore$ $x=12$，$y=-7$。故端点为 $C(12,-7)$。

1.31 联结 $A(5,4)$，$B(6,-9)$ 引长到C而 BC 等于 $\frac{1}{2}AB$，求C。

解：依所设 $(x_c-6):(6-5)=(y_c+9):(-9-4)=\frac{1}{2}:1$.

即 $x_c-6:1=y_c+9:(-13)=\frac{1}{2}:1$，$\therefore x_c=6\frac{1}{2}$，$y_c=-15\frac{1}{2}$。
故所求端点为 $C(6\frac{1}{2},-15\frac{1}{2})$。

1.32 已知两点 $A(2,3)$，$B(3,5)$，求分线段 $\overline{AB}$ 得比值 $1:3$ 的点M的坐标。

解：应用公式，则 $x_M=\dfrac{2+3\times\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{9}{4}$，$y_M=\dfrac{3+5\times\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{7}{2}$。

$\therefore\ M(\frac{9}{4},\frac{7}{2})$。

1.33 已知两点 $A(2,1)$，$B(3,9)$，求 (a) 分线段 $\overline{AB}$ 得比例 $4:1$ 的点M的坐标，(b) 分线段 $\overline{BA}$ 得比值 $4:1$ 的 N 点的坐标。

解：(a) $M_x=\dfrac{2+3\times4}{1+4}=\dfrac{14}{5}$，$M_y=\dfrac{1+9\times4}{1+4}=\dfrac{37}{5}$；

(b) $N_x=\dfrac{3+2\times4}{1+4}=\dfrac{11}{5}$，$N_y=\dfrac{9+1\times4}{1+4}=\dfrac{13}{5}$。

1.34 下列各坐标表示一线段的两端点，试求它们的两个三等分点。(a) $(-1,2)$，$(-10,-1)$；(b) $(11,6)$，$(2,3)$

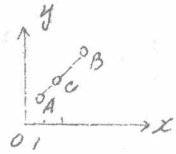
解：(a) $M_x^{(1)}=\dfrac{-1-10\times\frac{1}{2}}{1+1/2}=-4$，$M_y^{(1)}=\dfrac{2-1\times\frac{1}{2}}{1+1/2}=1$ 得 $M^{(1)}(-4,1)$；

$M_x^{(2)}=\dfrac{-1-10\times2}{1+2}=-7$，$M_y^{(2)}=\dfrac{2-1\times2}{1+2}=0$，得 $M^{(2)}(-7,0)$。

(b) $N_x^{(1)}=\dfrac{11+2\times\frac{1}{2}}{1+1/2}=8$，$N_y^{(1)}=\dfrac{6+3\times\frac{1}{2}}{1+1/2}=5$，得 $N^{(1)}(8,5)$。

$N_x^{(2)}=\dfrac{11+2\times2}{1+2}=5$，$N_y^{(2)}=\dfrac{6+3\times2}{1+2}=4$，得 $N^{(2)}(5,4)$。

1.35 点 $C(2,3)$ 将线段 $\overline{AB}$ 分为 $1:2$，如今已知 A 点的坐标为 $(1,2)$ 求点 B 的坐标。



$\therefore \dfrac{AB}{BC}=-\dfrac{3}{2}$，故 $B_x=\dfrac{1+2\times(-\frac{3}{2})}{1+(-\frac{3}{2})}=4$

$B_y=\dfrac{2+3\times(-\frac{3}{2})}{1+(-3/2)}=5$ 故 $B(4,5)$

1.36 线段 $\overline{AB}$ 被点 $M_1(1,2)$ 和 $M_2(3,4)$ 分成相等的三部分. 求点 A 和 B 的坐标.

解: $\lambda_1=\dfrac{\overline{M_1A}}{AM_2}=\dfrac{1}{-2}$, $\lambda_2=\dfrac{\overline{M_1B}}{BM_2}=\dfrac{2}{-1}$

$$\therefore x_A=\frac{1+3(-\frac{1}{2})}{1+(-1/2)}=-1,\quad y_A=\frac{2+4(-\frac{1}{2})}{1+(-1/2)}=0.$$

$$x_B=\frac{1+3\times(-2)}{1+(-2)}=5,\quad y_B=\frac{2+4\times(-2)}{1+(-2)}=6$$

故 $A(-1,0)$, $B(5,6)$.

1.37 两点 $A(x,5)$ 和 $B(-2,y)$ 间的线段被点 $M(1,1)$ 平分. 求出这两点的坐标.

解: $\because 1=\dfrac{x-2}{2}$, $1=\dfrac{5+y}{2}$, $\therefore x=4$, $y=-3$

故 $A(4,5)$, $B(-2,-3)$.

1.38 已知三角形的顶点的坐标: $A(3,-2)$, $B(5,2)$ 和 $C(-1,4)$. 求它中线的长.

解: 设 $\overline{AB}$ 之中点为 M, 则 $M(x,y)=M(4,0)$

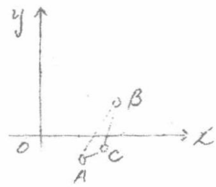
设 BC 之中点为 N, 则 $M(x,y)=M(2,3)$

设 AC 之中点为 P, 则 $P(x,y)=P(1,1)$

故 $\overline{AN}=\sqrt{(3-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{26}$

$\overline{BP}=\sqrt{(5-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{CM}=\sqrt{(4+1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{41}$

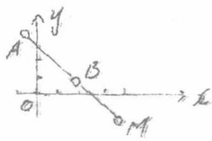


1.39 直线由两点 $A(-1,4)$ 和 $B(2,1)$ 决定, 在这条直线中求横坐标等于 5 的点.

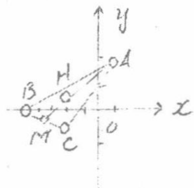
设这点为 $M(5,y)$, 则 $\lambda=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\dfrac{-1-5}{5-2}=-2$

故 $y=\dfrac{4+1\cdot(-2)}{1+(-2)}=\dfrac{2}{-1}=-2$

即 $M=M(5,-2)$.



1.40 已知三角形的顶点：A(1,4)，B(-5,0)及C(-2,-1)，求它的中线的交点。



解：设BC之中点为M，则 $M=(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2})$

中线交点设为H(x,y)，则由定理，

$\overline{AH}:\overline{HB}=2:1$，即 $\lambda=2$，

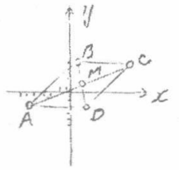
故 $x=\frac{1-\frac{7}{2}\times 2}{1+2}=-2$，$y=\frac{4-\frac{1}{2}\times 2}{1+2}=1$ 即H(-2,1)。

1.41 已知平行四边形的相邻两顶点的坐标为 $A(-4\frac{1}{2},-7)$ 和B(2,6)及对角线的交点 $M(3,1\frac{1}{2})$，求它的其余两个顶点的坐标。

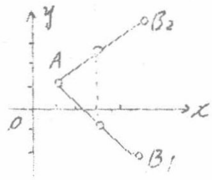
解 ∵ $\lambda=\frac{\overline{AC}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DM}}=-\frac{2}{1}=-2$，

∴ $x_c=\frac{-\frac{9}{2}+3\times(-2)}{1+(-2)}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}$，$x_d=\frac{2+3(-2)}{1+(-2)}=4$

$y_c=\frac{-7+\frac{3}{2}\times(-2)}{1+(-2)}=10$，$y_d=\frac{6+\frac{3}{2}\times(-2)}{1+(-2)}=-3$



1.42 A(1,1)到B的长为5单位，$\overline{AB}$ 中点的横坐标为3单位，求B点。



设 B=B(x,y)，由题意，则

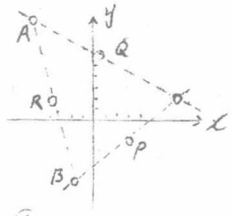
$$\begin{cases}5^2=(x-1)^2+(y-1)^2\\ 3=\frac{x+1}{2}\end{cases}$$

则 $x=5$，$(y-1)^2=5^2-4^2=9$，∴ $y-1=\pm3$，∴ $y_1=-2$ $y_2=4$。

因此B点可有二个解：(5,-2)或(5,4)。

1.43 求三角形的顶点，已知各边的中点为P(3,-2)，Q(1,6)和R(-4,2)。

解：$\because \frac{x_a+x_b}{2}=-4,\ \frac{y_a+y_b}{2}=2,$



$$\frac{x_b+x_c}{2}=3,\quad \frac{y_b+y_c}{2}=-2,$$

$$\frac{x_c+x_a}{2}=1,\quad \frac{y_c+y_a}{2}=6.$$

化简成 $\begin{cases} x_a+x_b=-8 & ① \\ x_b+x_c=6 & ② \\ x_c+x_a=2 & ③ \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} y_a+y_b=4 & ④ \\ y_b+y_c=-4 & ⑤ \\ y_c+y_a=12 & ⑥ \end{cases}$

①-②+③，$2x_a=-12$， $\therefore x_a=-6$. $x_b=-2$. $x_c=8$.

④-⑤+⑥，$2y_a=20$， $\therefore y_a=10$. $y_b=-6$. $y_c=2$.

44（增） 三角形的顶点为$A(0,1)$，$B(3,4)$，$C(-1,-1)$求它的面积.

解：$S=\frac{1}{2}\left|(x_a-x_c)(y_b-y_c)-(x_b-x_c)(y_a-y_c)\right|=$

$$=\frac{1}{2}\left|1\cdot 5-4\cdot 2\right|=\frac{1}{2}\left|-3\right|=\frac{3}{2}$$

45（增） 试求以$A(3,0)$，$B(6,-4)$，$C(-1,-3)$为顶点的三角形面积.

解：$S=\frac{1}{2}\left|(3+1)(-4+3)-(6+1)(0+3)\right|=\frac{1}{2}\left|-4-21\right|=\frac{25}{2}$

46（增） 四角形的顶点为$A(-2,-3)$，$B(-1,4)$，$C(3,3)$和$D(6,-1)$求它的面积.

解：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|(-2-3)(4-3)-(-1-3)(-3-3)\right|=\frac{29}{2}$

$$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\left|(-2-3)(-1-3)-(6-3)(-3-3)\right|=\frac{38}{2}$$

$$\therefore S_{\diamond ABCD}=\frac{29}{2}+\frac{38}{2}=\frac{67}{2}$$

47（增） 验证已知点（a）$(0,5)$，$(2,1)$，$(-1,7)$； （b）$(3,1)$ $(2,-9)$，$(8,11)$； （c）$(0,2)$，$(-1,5)$，$(3,4)$是否在一条直线上.

解：（a） $\because \frac{0-2}{5-1}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}=\frac{2+1}{1-7}$， $\therefore$在一直线上；

（b） $\because \frac{3+2}{1+9}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=\frac{-2-8}{-9-11}$， $\therefore$在一直线上；

（c） $\because \frac{0+1}{2-5}=-\frac{1}{3}\neq\frac{-1-3}{5-4}$， $\therefore$不在一直线上.

48（增） 三角形的两个顶点是 $(5,1)$ 及 $(-2,2)$，第三个顶点在 x 轴上，已知三角形的面积等于 10，求第三个顶点。

设第三顶点为 (x,y)，由假定 $y=0$，而又有

$$10=\frac{1}{2}\left|(x+2)(1-2)-(5+2)(0-2)\right|$$

即 $20=\left|-x+12\right|$，$\therefore\ x-12=\pm 20$

故 $x_1=-8$，$x_2=32$，因此第三顶点有二个解 $(-8,0)$ 及 $(32,0)$。

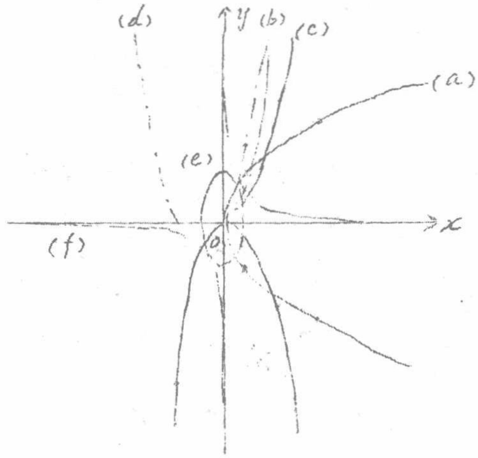
曲线及其方程

1.44 画出下列各方程的轨迹

(a) $y^2=4x$；　(b) $y=x^3$，　(c) $y^2-x^3=0$；

(d) $y-x^2-2x=0$；　(e) $4x^2+y^2=4$；　(f) $xy=1$.

解：



1.45 方程 $(x-1)^2+(y-2)^2=0$ 所对应的几何轨迹是什么？

答：是一点 $(1,2)$。

1.46 一动点，它到坐标原点和到点 $A(-5,-4)$ 的距离是相等的。建立其轨迹方程。

解 $\because \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x+5)^2+(y+4)^2}$，即打开根号及括号

即得：$10x+8y+41=0$.

1.47 一动点，它到 y 轴的距离等于它到点 $C(2,0)$ 的距离，建立它的轨迹方程.

解：$\because |x|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，即 $x^2=x^2-4x+y^2+4$

$\therefore y^2=4x-4=4(x-1)$.

1.48 一动点与 x 轴的距离是与 y 轴的距离两倍，建立它的轨迹方程.

解：$\because |y|=2|x|$，即 $y^2=4x^2$，或 $y=\pm 2x$

1.54（增）三角形的两顶点为 $(1,1)$ 和 $(3,6)$，它的面积为 3 平方单位，求它的第三顶点的轨迹.

解：设第三顶点为 (x,y)，则由所设

$$3=\frac{1}{2}\left|(x-3)(1-6)-(1-3)(y-6)\right|$$

即 $6=|5x-15-2y+12|=|5x-2y-3|$

或 $5x-2y-3\pm 6=0$，即

$5x-2y+3=0$ 及 $5x-2y-9=0$

1.55（增）求作过两点 $(1,2)$，$(3,-2)$ 的直线方程（提示：三点在一直线上的主要条件为由这三点所成三角形的面积为零）.

解：由提示，则 $0=\frac{1}{2}\left|(x-3)(2+2)-(1-3)(y+2)\right|$，

即 $4x-12+2y+4=0$，即 $2x+y-4=0$.

1.49 作与 x 轴及 y 轴的乘积为 1 的轨迹方程.

解：由设 $|x|\cdot|y|=1$，故 $xy=\pm 1$.

1.50 在两坐标轴间有一定长线段 AB，在 AB 上有任一点 P，当 A 点永远在横轴上，同时 B 点永远在纵轴上移动时，试求 P 点的轨迹.

解：$\because A=A(x,0)$，$B=B(0,y)$，而 $\overline{AB}=l=\sqrt{x^2+y^2}$ (*)

由图可见，若 P 分 $\overline{AB}$ 分 $m:n$，则

P 的坐标为 $P\left(\frac{n}{m+n}x, \frac{m}{m+n}y\right)$