中国数学奥林匹克

1986—1993

张筑生　李成章 编著

测绘出版社

中国数学奥林匹克

张筑生　李成章　编著

测 绘 出 版 社

(京)新登字 065 号

内 容 提 要

本书收集整理了从 1986 年至 1993 年共八届全国中学生数学冬令营的数学竞赛试题及其解答(某些试题附有多种精辟解答),并对一些试题的背景及解答情况作了分析和评注。这一活动的开展,对于促进我国中学生数学竞赛活动的进一步发展,对于选拔我国的优秀中学生参加国际数学奥林匹克(IMO),起了重要作用。

本书可供高等学校数学系师生,中学数学教师,中学数学竞赛参加者使用和学习参考。

中国数学奥林匹克

张筑生　李成章　编著

*

测绘出版社出版 · 发行

北京市通县向阳印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所经销

开本 787×1092　1/32 · 印张 3.5 · 字数 70 千字

1993 年 10 月第一版 · 1993 年 10 月第一次印刷

印数 0001—6000 册 · 定价 3.00 元

ISBN　7—5030—0683—8/G · 108

序　言

我国的中学生数学竞赛活动，最早举办于1956年（在北京、上海等城市举行）。这一活动几经波折，直到1978年以后才重新开展起来，逐渐发展成为规模最大、影响最大的全国中学生学科竞赛项目。为了促使我国的中学生数学竞赛活动“更上一层楼”，在1985年中国数学会成立五十周年纪念活动期间，由中国数学会与南开大学、北京大学、复旦大学、中国科技大学等四所大学的数学系协商，决定联合举办全国中学生数学冬令营。

自1986年1月以来，我国的中学生数学冬令营活动每年举行一次，已经成为一种传统。冬令营的营员是来自全国各省、市、自治区的中学生（每届约80—90人），他们是全国各省、市、自治区高中数学联合竞赛（全国联赛）的优胜者。在为期约一周的冬令营期间，除了数学讲座、参观游览等活动外，最重要的事情就是分两天举行的数学竞赛。每天在$4\frac{1}{2}$小时的时间里，参赛选手要解答三道较高难度的数学竞赛题。本书收集了从1986年到1993年共八届冬令营的数学竞赛题目及其解答（某些题目附有多种解答）。

实践证明，中学生数学冬令营的举办，对于促进我国中学生数学竞赛活动的进一步发展，对于选拔我国的优秀中学生选手参加国际数学奥林匹克（IMO），起了重要作用。在我国这样一个幅员辽阔、人口众多的大国里，仅仅通过“全国联赛

——冬令营——集训队选拔赛"这样三次重要的数学竞赛，就能顺利地挑选出参加IMO的优秀中学生代表队，这是非常不容易的事。自从1986年兴办冬令营以来，在国际中学生数学奥林匹克赛场上，中国代表队捷报频传，已累计夺得金牌32块、银牌12块、铜牌4块，并取得四年总分第一、两年总分第二。这些成绩的取得，与全国各地中学教师和数学竞赛教练员的辛勤劳动、与参赛选手们的非凡努力分不开，但冬令营数学竞赛在引导各地的培训工作和较准确地挑选优秀选手方面所起的关键作用也同样是不可忽视的。

本书收集的题目与解答是历届冬令营命题组成员辛勤劳动的结晶。谁都知道，命题要比解题困难得多。冬令营的绝大多数题目是我国数学工作者自己拟定的，少数题目借鉴其他国家的数学竞赛题。本书还吸收了历届冬令营选手所作出的一些很好的解答。第1,2,4,5届的题目和解答由张筑生负责整理，第3,6,7,8届的题目和解答由李成章负责整理。如果本书的出版能对我国数学竞赛活动的更进一步发展起到积极的促进作用，那么历届冬令营命题组的成员和本书的组织者、整理者都将感到欣慰。

裘宗沪

1993年8月

目　录

第一届冬令营　问题

（1986 年，天津）

1. a_1，a_2，…，a_n 为实数，如果它们中任意两数之和非负，那么对于满足

$$x_1+x_2+\cdots x_n=1$$

的任意非负实数 x_1，x_2，…，x_n，有以下不等式成立：

$$a_1x_1+a_2a_2+\cdots a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2.$$

请证明上述命题及其逆命题.

2. 在$\triangle ABC$ 中，BC 边上的高 $AD=12$，$\angle A$ 的平分线 $AE=13$，设 BC 边上的中线 $AF=m$，问 m 在什么范围内取值时，$\angle A$ 分别为锐角，直角，钝角.

3. 设 z_1，z_2，…，z_n 为复数，满足

$$|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1$$

求证：上述 n 个复数中，必存在若干个复数，它们的和的模不小于$\frac{1}{6}$.

4. 已知四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的四个顶点位于$\triangle ABC$ 的边上.

求证：四个三角形$\triangle P_1P_2P_3$，$\triangle P_1P_2P_4$，$\triangle P_1P_3P_4$，$\triangle P_2P_3P_4$ 中，至少有一个的面积不大于$\triangle ABC$ 面积的四分之一.

5. 能否把 1，1，2，2，…，1986，1986 这些数排成一行，使得两个 1 之间夹着一个数，两个 2 之间夹着两个数，…，两个 1986 之间夹着一千九百八十六个数？请证明你的结论.

6. 用任意的方式，给平面上的每一个点染上黑色或白色．求证：一定存在一个边长为 1 或$\sqrt{3}$的正三角形，它的三个顶点是同色的．

命题组成员（按姓氏笔划排列）

周性伟，俞文魮，张筑生，常庚哲，裘宗沪，另有王鲁燕，刘嘉焜参加部分工作．

第一届冬令营　问题解答

1．**解法一　命题的证明：**

$$\begin{aligned}&a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\\&=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\times 1\\&=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\&=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2+\sum_{i\neq j}(a_i+a_j)x_ix_j\\&\geqslant 0\end{aligned}$$

逆命题的陈述：设 a_1，a_2，…，a_n 是实数．如果对于任意满足条件

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$$

的非负实数 x_1，x_2，…，x_n，都有

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2,$$

那么在 a_1，a_2，…，a_n 当中任意两个数之和非负．

逆命题的证明：设 i 和 j 为满足以下条件的任意一对自然数

$$1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n,\qquad i\neq j\quad .$$

取 x_1，x_2…，x_n 为：

$$x_i=x_j=\frac{1}{2}; \qquad x_k=0\ (k\neq i,\ k\neq j),$$

则从

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2,$$

可得

$$\frac{a_i+a_j}{2}\geqslant\frac{a_i+a_j}{4},$$

即

$$a_i+a_j\geqslant 0.$$

解法二　命题的证明（用数学归纳法）：

对 $n=2$ 的情形有 $1-x_1=x_2$，$1-x_2=x_1$，因而

$$\begin{aligned}&(a_1x_1+a_2x_2)-(a_1x_1^2+a_2x_2^2)\\&=a_1x_1(1-x_1)+a_2x_2(1-x_2)\\&=(a_1+a_2)x_1x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

假设对 $n=k\geqslant 2$ 的情形命题成立，考察 $n=k+1$ 的情形，对于满足条件

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=1$$

的非负实数 x_1，x_2，…，x_k，x_{k+1}，不妨设 $x_{k+1}<1$（否则 $x_1=x_2=\cdots=x_k=0$，结论显然成立：$a_{k+1}\geqslant a_{k+1}$）. 因为

$$\frac{x_1}{1-x_{k+1}}+\frac{x_2}{1-x_{k+1}}+\cdots+\frac{x_k}{1-x_{k+1}}=1,$$

根据归纳法假设，我们有

$$\begin{aligned}&a_1\frac{x_1}{1-x_{k+1}}+a_2\frac{x_2}{1-x_{k+1}}+\cdots+a_k\frac{x_k}{1-x_{k+1}}\\&\geqslant a_1\left(\frac{x_1}{1-x_{k+1}}\right)^2+a_2\left(\frac{x_2}{1-x_{k+1}}\right)^2+\cdots+a_k\left(\frac{x_k}{1-x_{k+1}}\right)^2,\end{aligned}$$

即

$$(1-x_{k+1})\cdot(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k)$$

$$= a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_kx_k^2$$

于是有

$$\begin{aligned}
& a_1x_1+\cdots+a_kx_k+a_{k+1}x_{k+1} \\
= & (1-x_{k+1})(a_1x_1+\cdots+a_kx_k)+x_{k+1}(a_1x_1+\cdots+a_kx_k) \\
& +a_{k+1}x_{k+1}(1-x_{k+1})+a_{k+1}x_{k+1}^2 \\
\geqslant & a_1x_1^2+\cdots+a_kx_k^2+a_{k+1}x_{k+1}^2+x_{k+1}(a_1x_1+\cdots+a_kx_k) \\
& +a_{k+1}x_{k+1}(x_1+\cdots+x_k) \\
= & a_1x_1^2+\cdots+a_kx_k^2+a_{k+1}x_{k+1}^2+[(a_1+a_{k+1})x_1 \\
& +(a_2+a_{k+1})x_2+\cdots+(a_k+a_{k+1})x_k]x_{k+1} \\
\geqslant & a_1x_1^2+\cdots+a_kx_k^2+a_{k+1}x_{k+1}^2 \quad .
\end{aligned}$$

根据数学归纳原理，命题得证.

逆命题的陈述与证明，同解法一.

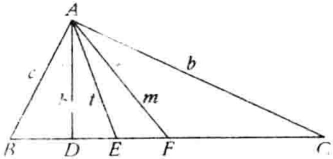
2. 首先指出：如果 $AB<BC$，那么 D，E 及 F 在直线 BC 上沿 B 指往 C 的方向依次排列，事实上，记 $AC=b$，$AB=c$. $AD=h$，$AE=t$，$AF=m$，则有容易证明的不等式

$$\frac{\sqrt{b^2-h^2}}{\sqrt{c^2-h^2}}\geqslant\frac{b}{c}\geqslant 1 .$$

即（参看图Ⅰ－2－1）

$$\frac{CD}{BD}\geqslant\frac{CE}{BE}\geqslant\frac{CF}{AF}$$

由此可看出 D，E 及 F 在直线 BC 上的排列次序. 据此又得知 $AF>AE$，即 $m>13$.



图Ⅰ－2－1

现在来解答问题本

身. 过 F 点作 BC 的垂线交 $\triangle ABC$ 的外接圆的不含 A 点的弧于 G，然后连结 AG. 显然 AG 是 $\angle BAC$ 的平分线，因而通过 E 点.

考察圆的任何一个弓形. 从弓形弦的中点到弓形弧上各点的距离的最小值和最大值恰好为弓形的高和弓形的半弦长——对于劣弧弓形，最小值为弓形高，最大值 为弓形半弦长；而对于优弧弓形情况正好相反. 基于这一事实，容易得出判断：

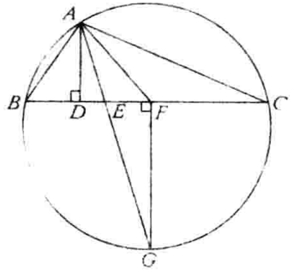


图 1－2－2

$$\angle BAC \text{ 是 } \begin{array}{l} \text{锐角} \\ \text{直角} \\ \text{钝角} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} FG<AF, \\ FG=AF, \\ FG>AF. \end{array}$$

由 $AD=12$，$AE=13$，$AF=m>13$ 可得

$$\begin{aligned} EF &= DF-DE \\ &=\sqrt{m^2-12^2}-\sqrt{13^2-12^2} \\ &=\sqrt{m^2-12^2}-5 \end{aligned}$$

又因为 $\triangle ADE \sim \triangle GFE$，所以

$$FG=\frac{12}{5}EF=\frac{12}{5}(\sqrt{m^2-12^2}-5).$$

因而 $FG<AF$ 相当于

$$\frac{12}{5}(\sqrt{m^2-12^2}-5)<m.$$

注意到 $m>13$，我们看出$\angle BAC$ 为锐角的条件为

$$13<m<\frac{2028}{119}\quad.$$

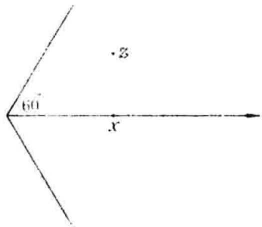
类似地可以得到$\angle BAC$ 为直角与钝角的条件. 最后的结论是：

	$13<m<\dfrac{2028}{119}$		锐角，
对于	$m=\dfrac{2028}{119}$	的情形，$\angle BAC$ 为	直角，
	$m>\dfrac{2028}{119}$		钝角.

3. **解法一** 用从原点出发幅角分别为 60°，180°和 300°的三条射线将复平面分成三个角形域(我们约定每个角形域仅包括它的一条边，因而三个角形域除原点外没有公共点). 必要时抛弃这些复数中等于 0 者，可以认为所有的 $z_k\neq 0(k=1,2,\cdots,n)$. 三个角形域将给定的这些复数分成三组，其中必有一组复数的模之和不小于$\frac{1}{3}$(否则三组复数的模的总和小于 1，与所设矛盾). 设这组复数是 $z_1,z_2,\cdots,z_m$，它们所有在的角形域以正实轴为分角线(其他情形可类似讨论，或通过旋转化成这一情形). 计算该组复数在角域分角线上的正交投影之和，我们得到

$$\begin{aligned}|z_1+z_2+\cdots+z_m|&\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_m\\&\geqslant\frac{1}{2}(|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_m|)\\&\geqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

推导中我们用到这样的事实，在该角域中的任何复数投影到对角线上的长度，不大于该复数本身的长度，而大于复数本身长度的一半（见图Ⅰ—3—1）.



图Ⅰ—3—1

解法二 设 $z_k=x_k+iy_k$ （$k=1$，…，n），

则有

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=1}^{n}|z_k| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}|x_k| + \sum_{k=1}^{n}|y_k| \\
&= \sum_{x_k\geqslant 0}|x_k| + \sum_{x_k<0}|x_k| + \sum_{y_k\geqslant 0}|y_k| + \sum_{y_k<0}|y_k|.
\end{aligned}
$$

上式最后四组和数中至少有一组不小于$\frac{1}{4}$，不妨设

$$\sum_{x_k<0}|x_k| \geqslant \frac{1}{4}.$$

这组中所有的 x_k 同号，因而

$$\left|\sum_{x_k<0}x_k\right| = \sum_{x_k<0}|x_k| \geqslant \frac{1}{4}.$$

又因为

$$\sum_{x_k<0}z_k = \sum_{x_k<0}x_k + i\sum_{x_k<0}y_k,$$

所以有

$$\left|\sum_{x_k<0} x_k\right| \geqslant \left|\sum_{x_k<0} x_k\right| \geqslant \frac{1}{4} > \frac{1}{6}.$$

即使得 $x_k<0$ 的这组 x_k 满足我们的要求.

评注 在解法二中，我们已经看到题中所给的常数$\frac{1}{6}$可以改进为$\frac{1}{4}$. 用更高深的数学工具可以证明该常数可以用更大的$\frac{1}{\pi}$来代替，这里如通常那样用 π 表示圆周率.

4. **解法一** 作为准备，先证明这样的事实：如果平行四边形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 被三角形 ABC 所包含（二图形均视为连同内部及边界的集合），那么这两图形的面积之间有以下不等式关系：

$$(\square Q_1Q_2Q_3Q_4) \leqslant \frac{1}{2}\ (\triangle ABC).$$

必要时将$\triangle ABC$ 的边向内平行推移，可设 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 这四点中至少有三点在$\triangle ABC$ 的三边上（见图 I—4—1).

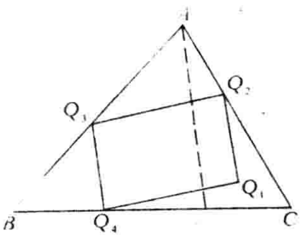


图 I—4—1

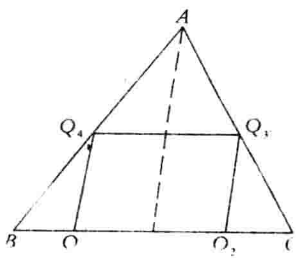
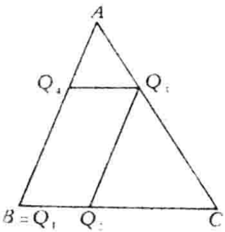
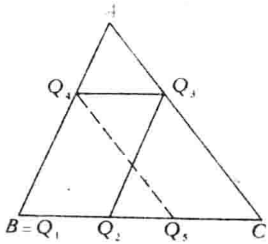


图 I—4—2

$\square Q_1Q_2Q_3Q_4$ 至少有一条边跨$\triangle ABC$某角的两边，设 Q_2Q_3 跨$\angle BAC$的两边，过 A 点作 Q_1Q_2 的平行线，将三角形及平行四边形各截成两部分，只须对其中每一部分证明相应的结论．因此可以一开始就假定平行四边形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 的一条边 Q_1Q_2 在$\triangle ABC$的 BC 边上，而 Q_3 和 Q_4 分别在$\triangle ABC$的另两边上（见图Ⅰ—4—2）．再一次过三角形的某个顶点引平行四边形某边的平行线，则又可化成如图Ⅰ—4—3所示情形（不妨设 $AQ_3 \leqslant Q_3C$）．对这情形，过 Q_4 作 AC 的平行线，交 BC 于 Q_5（图Ⅰ—4—4）．



图Ⅰ—4—3



图Ⅰ—4—4

则易看出

$$
\begin{aligned}
&2(\square Q_1Q_2Q_3Q_4)\\
&=(\square Q_1Q_2Q_3Q_4)+(\square CQ_3Q_4Q_5)\\
&\leqslant(\triangle ABC).
\end{aligned}
$$

下面证明题目本身．设四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 在顶点 P_1，P_2，P_3，P_4 处的内角分别为 α，β，γ，δ（见图Ⅰ—4—5），则从

$$(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=360^\circ$$

可知至少有一对括号内的两角和不小于 180°，不妨设

$$\alpha+\beta\geqslant 180°.$$

又因

$$(\beta+\gamma)+(\delta+\alpha)=360°,$$

其中又有一对括号内的和不小于 180°，不妨设

$$\delta+\alpha\geqslant 180°.$$

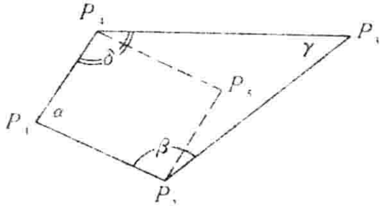


图 I －4－5

过 P_2 与 P_4 分别作 $P_2P_5 /\!/ P_1P_4$ 与 $P_4P_5 /\!/ P_1P_2$，则显然 $\square P_1P_2P_5P_4$ 含在四边形 $P_1P_2PP_3P_4$ 内，因而在 $\triangle ABC$ 内. 由前面证明的预备事实

$$(\square P_1P_2P_5P_4)\leqslant\frac{1}{2}(\triangle ABC).$$

因而

$$(\triangle P_1P_2P_4)\leqslant\frac{1}{4}(\triangle ABC).$$

解法二 将用到这样一个事实：底边相同而相对的顶点在同一条直线上的三个三角形，居中一个三角形的面积介于两侧两个三角形面积之间，即不超过两侧三角形面积较大者，也不小于面积较小者（见图 I －4－6）——这可以通过比较三个三角形的高来加以证明.

下面证明题目本身的结论. 不妨设 P_1 和 P_2 在 $\triangle ABC$ 的 BC 边上而 P_3 和 P_4 分别在 AC 和 AB 边上. 设 P_3 离 BC 比 P_4 离 BC 更远. 过 P_4 作 BC 平行线分别交 P_2P_3 于 Q，交 AC 于 R，过 R 作 AB 的平行线交 BC 于 T. 于是两三角形

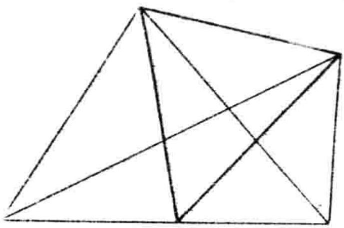


图 I —4—6

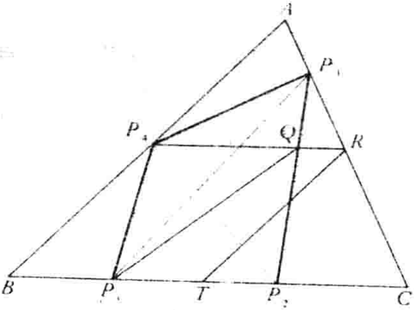


图 I —4—7

$\triangle P_1P_2P_4$ 与$\triangle P_1P_3P_4$ 中面积较小的一个不超过$\triangle P_1QP_4$ 的面积，而后者不超过$\square BTRP_4$ 面积的一半，用解法一中同样的办法可证明$\square BTRP_4$ 的面积不超过$\triangle ABC$ 面积的一半．这样，我们证明了：$\triangle P_1P_2P_4$ 与$\triangle P_1P_3P_4$ 中面积较小者不超过$\triangle ABC$ 面积的$\frac{1}{4}$．

5．**解法一** 将排成一行的 3972 个方格交替地染成黑白二色（奇数位置的方格染黑，偶数位置的方格染白）．如果题目所给的数能按要求排好，那么就将它们按排列顺序放到上述 3972 个方格中去．两个相等偶数中间相隔偶数个方格，因而这两偶数占据异色的格子．993 对偶数占据黑白二色的格子各 993 个．剩下 993 个黑格和 993 个白格．两相等的奇数占据同色的格子，所以按照题目的要求放置的 993 对奇数，必占据偶数个黑格与偶数个白格，无法放进剩下的 993 个黑格与 993 个白格之中，使每格恰有一个数．这一矛盾说明题目所要求的排列不能实现．