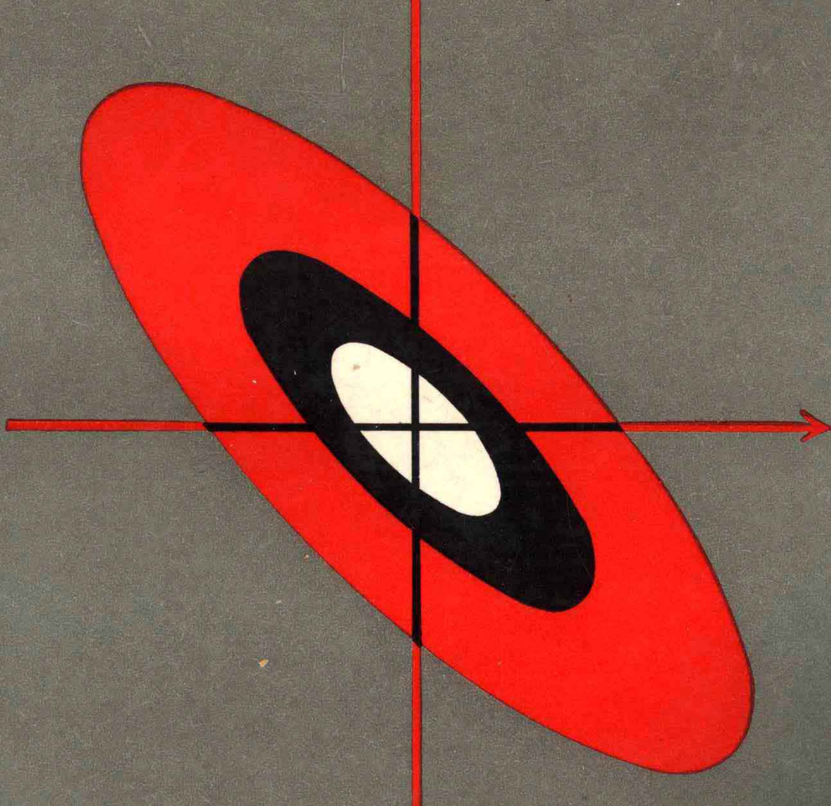
工程數學

下冊

楊家鑒編著



東華書局印行

工程數學

下　册

楊家鑒　編著

東華書局印行

中華民國六十二年十月初版

大專用書 **工 程 數 學**（全二冊）

下冊　定價新臺幣五十元整

（外埠酌加運費滙費）

編 著 者　楊　家　鑒

發 行 人　卓　鑫　淼

出 版 者　臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號

印 刷 者　中臺印刷廠股份有限公司
（臺中市公園路三十七號）

內政部登記證　內版臺業字第一〇三一號

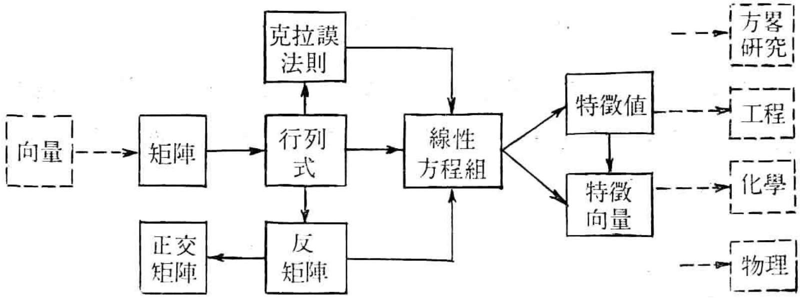
(61102)

工　程　數　學

下冊　目次

第九章

矩　　陣



—非問無以廣識—

在工程，物理，化學或方略研究 (*operation researh*) 等科學，常需求解冗長繁複的線性方程組，其形式上的冗長可藉矩陣符號表示，其求解過程的繁複也可由矩陣運算簡化之。今日對於龐大線性方程組，利用矩陣的數值解法於電腦作業，益使矩陣運算更顯示其在工程數學上的重要地位。

本章從基本定義(§9-1,2)開始，介紹反矩陣與正交矩陣(§9-3,4)等運算，進而討論線性方程組 (§9-5) 的基本解法，最後討論特徵值與特徵向量 (§9-6) 及與其有關的兩種數值方法 (§9-7,8)。

§ 9-1 基本定義

矩陣的研討築基於基本名詞的認識。本節概述矩陣理論常用的基本定義，及與之有關的基本運算特性。

***D*₁**: **m×n 階矩陣**: 如下列(1)爲一m列n行的矩形陣列，稱之。

(1) $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

在矩陣中 a_{jk} 稱爲**元** (*element*)，其中 j 及 k 表示該元所對應的列及行。通常用一字母表示矩陣，例如(1)中用 **A** 代表，或用其中的一元代替，如 (a_{jk})。

若矩陣的列數爲 $1(m=1)$，則該矩陣稱爲**列矩陣** (*row matrix*) 或**列向量** (*row vector*)；同理，若矩陣僅含一行 $(n=1)$，則稱爲**行矩陣** (*column matrix*) 或**行向量** (*column vector*)。

若矩陣的列和行數皆爲 n，則稱該矩陣爲 **n×n 階方陣** (*square matrix*)，或簡稱爲 **n 階方陣**。

當矩陣的每一元均爲實數，則稱爲**實矩陣** (*real matrix*)，否則稱爲**複矩陣** (*complex matrix*)。

***D*₂**: **矩陣的相等關係**: 假設矩陣 $\mathbf{A}=(a_{jk})$, $\mathbf{B}=(b_{jk})$ 爲同階；且$a_{jk}=b_{jk}$，則稱該二矩陣相等。記成 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$。

***P*₁**: **矩陣的加法**: 若矩陣 $\mathbf{A}=(a_{jk}), \mathbf{B}=(b_{jk})$ 爲同階，則 **A** 與 **B** 的和定義爲 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{jk}+b_{jk})$。

例 A: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & -5 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2+3 & 1-5 & 4+1\\ -3+2 & 0+1 & 2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -4 & 5\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

註: 加法的結合律和交換律均適用於矩陣。例如, 設 **A, B, C** 爲同階矩陣, ⇒

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A},\ \ \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$$

$\boldsymbol{P_2}$: **矩陣的減法:** 若 $\mathbf{A}=(a_{jk})$: $\mathbf{B}=(b_{jk})$ 爲同階矩陣, 則 **A** 減 **B** 的差定義爲 $\mathbf{A}-\mathbf{B}=(a_{jk}-b_{jk})$

例 B: 設 **A**,, **B** 矩陣同例 **A** ⇒

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2-3 & 1+5 & 4-1\\ -3-2 & 0-1 & 2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 3\\ -5 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{P_3}$: **矩陣乘以純量:** 若 $\mathbf{A}=(a_{jk})$ 爲一矩陣, λ 爲任何數或純量, 則定義 λ 乘 **A** 的乘積爲 $\lambda\mathbf{A}=\mathbf{A}\lambda=(\lambda a_{jk})$。

例 C: 設 **A** 同例 **A** 的矩陣, 而 $\lambda=4$ ⇒

$$\lambda\mathbf{A}=4\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 16\\ -12 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{P_4}$: **矩陣的乘法:** 若 $\mathbf{A}=(a_{jk})$ 爲 m×n 階矩陣, $\mathbf{B}=(b_{jk})$ 爲 n×p 階矩陣, 則定義 **A** 和 **B** 的乘積 **A·B** 或 **AB** 爲 $\mathbf{C}=(c_{jk})$, 其中 **C** 爲 m×p 階矩陣, 且

$$c_{jk}=\sum_{l=1}^{n}a_{jl}b_{lk}$$

D_3: **可乘** (*conformalbility for multiplication*)。矩陣相乘時，左因子的行數必須與右因子的列數相等，若矩陣符合上述，則稱該矩陣可乘。

例D: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $\Rightarrow$

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}(2)(3)+(1)(2)+(4)(4) & (2)(5)+(1)(-1)+(4)(2)\\ (-3)(3)+(0)(2)+(2)(4) & (-3)(5)+(0)(-1)+(2)(2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}24 & 17\\ -1 & -11\end{pmatrix}$$

註: 通常交換律不適用於矩陣乘法；但結合律及分配律適用於矩陣乘法。例如

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C},\ \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC},\ (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{CA}$$

$\mathbf{A}$ 爲一方陣 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ 可以自乘；$\mathbf{AA}$ 的乘積可以寫成 $\mathbf{A}^2$；同理，可定義方陣的乘冪，如 $\mathbf{A}^3=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^2$，$\mathbf{A}^4=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^3$，等等。

D_4: **轉置矩陣** (*transpose of a matrix*)：若將矩陣 $\mathbf{A}$ 的行列互調，所得矩陣稱爲$\mathbf{A}$的轉置矩陣，記爲 $\mathbf{A}^T$。卽 $\mathbf{A}=(a_{jk})\Rightarrow\mathbf{A}^T=(a_{kj})$。

例E: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

根據 D_1 與 D_4 不難證明下列運算公式的成立：

P_5: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$，$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$，$(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$

D_5: **對稱暨反對稱陣** (*symmetric and skew-symmetric matrices*)

任一方陣 $\mathbf{A}$，若 $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$ 則稱 $\mathbf{A}$ 爲**對稱矩陣**；若 $\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$ 則稱 $\mathbf{A}$ 爲**反對稱矩陣**。

例 F：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -4 & 3\end{pmatrix}$ 爲對稱矩陣，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ 爲反對稱矩陣。

***P*₆**：任意實矩陣都可藉一實對稱及一實反對稱矩陣的和表示之。

證：設 $\mathbf{A}$ 爲實矩陣，$\Rightarrow \mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)+\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T)$。其中：

$\because\quad (\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{A}=\mathbf{A}+\mathbf{A}^T,$

$\therefore\quad \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)$ 爲對稱矩陣。

$\because\quad (\mathbf{A}-\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}^T-\mathbf{A}=-(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T),$

$\therefore\quad \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T)$ 爲反對稱矩陣。故得證。

D_6：**複數共軛矩陣**(*complex conjugate of a matrix*)：矩陣 $\mathbf{A}$ 中諸元 a_{jk} 皆以其共軛複數 $\bar{a}_{jk}$ 代替，所得的矩陣稱爲 $\mathbf{A}$ 的複數共軛矩陣，記成 $\bar{\mathbf{A}}$。(實矩陣 $\mathbf{A}$ 的複數共軛矩陣卽其原來的 $\mathbf{A}$)

* **D_7**：**赫米特及反赫米特矩陣** (*Hermitian and skew-Hermitian matrices*)：若方陣 $\mathbf{A}$ 與其轉置複數共軛矩陣相等，卽 $\mathbf{A}=\bar{\mathbf{A}}^T$，則稱 $\mathbf{A}$ 爲**赫米特矩陣**；若 $\mathbf{A}=-\bar{\mathbf{A}}^T$，則稱 $\mathbf{A}$ 爲**反赫米特矩陣**；若 $\mathbf{A}$ 爲實矩陣則赫米特與反赫米特矩陣分別卽爲對稱矩陣及反對稱矩陣。

D_8：**矩陣主對角線與跡** (*principal diagonal and trace of a matrix*)：若 $\mathbf{A}=(a_{jk})$ 爲一方陣，則包含 $\forall\ a_{jk}$，其中 $j=k$，的對角線稱爲主對角線。主對角線上各元的和卽爲 $\mathbf{A}$ 的跡。

例 G: 方陣$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$的主對角線爲 5, 1, 2; 其跡爲 $5+1+2=8$。

D$_9$: **對角陣** (*diagonal matrix*): 若一方陣，除主對角線外，其他各元都爲零，則稱之。卽 $\forall a_{jk}=0$，其中 $j\neq k$。

D$_{10}$: **單位矩陣** (*unit matrix*): 主對角線上諸元皆爲 1 的對角陣稱爲單位矩陣。記成 $\mathbf{I}$。卽 $a_{jk}=\begin{cases} 0 & j\neq k \\ 1 & j=k \end{cases}$

P$_7$: $\mathbf{AI}=\mathbf{IA}=\mathbf{A}$，$\mathbf{I}^n=\mathbf{I}$，$n\in N$

D$_{11}$: **零陣** (*zero matrix*): 若一矩陣所有元皆爲零（卽$\forall a_{ij}=0$），則稱爲零陣或無陣。記成 $\mathbf{O}$ 或簡寫成 0。

P$_8$: $\mathbf{O}$ 與 $\mathbf{A}$ 爲同階矩陣 $\Rightarrow$ $\mathbf{O}+\mathbf{A}=\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$; $\mathbf{O}$ 及 $\mathbf{A}$ 均爲方陣 $\Rightarrow \mathbf{AO}=\mathbf{OA}=\mathbf{O}$。

矩陣代數中的零陣和一般代數中的數目零，具有同樣的地位。

練 習 9-1

1. 設 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) 驗證: $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2+\mathbf{BA}-\mathbf{AB}$，$(\mathbf{ABC})^T=\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$。

   (b) 求: $2\mathbf{A}-3\mathbf{B}-\mathbf{C}$，$(\mathbf{A}-2\mathbf{B})(\mathbf{C}+3\mathbf{B})$。

2. 設 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=(4\ \ -2)$，$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$求: (a) $\mathbf{AC}$，(b) $\mathbf{CA}$，(c) $\mathbf{BC}$，(d) $\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T$，(e) $\mathbf{C}(\mathbf{B}^T+\mathbf{C})$，(f) $\mathbf{BB}^T$。

3. 設 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -2\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$

求：(a) $\mathbf{C}^T\mathbf{A}$ (b) $\mathbf{A}^T\mathbf{C}$ (c) $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{C}$。

4. 設 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 4 & -1 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$

求：(a) $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$，(b) $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$，(c) $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$，(d) $\mathbf{AB}+\mathbf{B}^T\mathbf{A}$。

5. 對任意 $m\times n$ 階矩陣，證明：(a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$，(b) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$，(c) $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$，其中 λ 爲任意純量。

6. 求 x 和 y 值使得 $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

7. 若 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 爲方陣，證明若 $\mathbf{A}\neq 0$，$\mathbf{B}\neq 0$，則 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 亦可能爲零。當 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 不爲方陣時，是否有上述結果？

8. 若 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$，則 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$ 是否爲眞。試解釋之。

9. 設 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 爲同階方陣，證明：(a) $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{BC})\mathbf{C}$，(b) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$，(c) $(\mathbf{ABC})^T=\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$。並且推廣此結果。

*10. 證明任意方陣 $\mathbf{C}$ 均可表爲 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$，其中 $\mathbf{A}$ 爲赫米特矩陣，$\mathbf{B}$ 爲反赫米特矩陣。

§ 9-2 行列式

在 §1－8 已討論過次階及參階行列式的基本特性，本節將據前述，研討一般 n 階行列式的基本特性。

***D*$_1$：行列式** (*determinants*)：**若 $\mathbf{A}$ 爲 n 階方陣，將 $\mathbf{A}$ 對應成另一種函數如下列(1)，稱爲 $\mathbf{A}$ 的 n 階行列式，常簡寫成 Δ 或 $\det(\mathbf{A})$ 即**

$$(1)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\det(\mathbf{A})$$

D$_2$: 子行列式 (*minor*)：對 Δ 中的任一元 a_{jk}，將 Δ 的第 j 列和第 k 行略去，所遺留下來的元可以作成 $(n-1)$ 階行列式，此新行列式稱爲 Δ 在 a_{jk} 的子行列式。

例 A: 下列行列式 Δ_1 在第二列第三行的元 5 所對應的子行列式爲 Δ_2 卽

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

D$_3$: 餘因子 (*cofactor*)：將 a_{jk} 的子行列式乘以 $(-1)^{j+k}$，所成的結果稱爲 a_{jk} 的餘因子，記爲 A_{jk}。

例 B: 如例 A，對應 Δ_1 中 5 的餘因子爲 $(-1)^{2+3}$ 乘以其子行列式，卽

$$-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

D$_4$: 拉氏展開 (*Laplace expansion*)：行列式的值等於任何一行或列的各元，分別乘以其餘因子後的代數和；此方法稱爲拉氏展開。記爲 $\det(\mathbf{A})=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk}=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk}A_{jk}$

P$_1$: 任一行列式，無論取任一行或列，作拉氏展開，所得該行列式的值相同。（根據 ***D***$_4$ 其理甚明）

例 C: 用拉氏展開求 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值：(a) 取第一列；(b) 取第二列。

解：(a) $3\begin{vmatrix}2 & -3\\1 & 2\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}1 & -3\\4 & 2\end{vmatrix}+(2)\begin{vmatrix}1 & 2\\4 & 1\end{vmatrix}$

$$=(3)(7)-(-2)(14)+(2)(-7)=35$$

(b) $\Big|-(1)\begin{vmatrix}-2 & 2\\1 & 2\end{vmatrix}+(2)\begin{vmatrix}3 & 2\\4 & 2\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}3 & -2\\4 & 1\end{vmatrix}$

$$=-(1)(-6)+(2)(-2)-(-3)(11)=35$$

$\boldsymbol{P}_2$：行列式的行列互換，其值不變。即 $\det(\mathbf{A})=\det(\mathbf{A}^T)$

$\boldsymbol{P}_3$：行列式中任一行或列諸元僅有一爲非零，則該非零的元乘以其餘因子卽爲此行列式的值。若任一行或列諸元皆爲零，則該行列式的值爲零。

$\boldsymbol{P}_4$：行列式中任兩列（或兩行）位置互調，結果等於原行列式乘以-1。

$\boldsymbol{P}_5$：行列式中任一列（或行）乘以一數，則等於將行列式乘以該數。

證：設行列式爲 $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{k1} & a_{k2}\cdots & a_{kn}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

設將 Δ 中第 k 列的元乘以一常數 λ，得到

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2}\cdots & \lambda a_{kn}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

將 Δ 及 Δ_1 分別以第 k 列的元拉氏展開，得

$$\Delta=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}$$

$$\Delta_1=(\lambda a_{k1})A_{k1}+(\lambda a_{k2})A_{k2}+\cdots+(\lambda a_{kn})A_{kn}$$

由上顯然可知 $\Delta_1=\lambda\Delta$。

P_6: 行列式中有任何兩列（或兩行）相等或成比例，則此行列式爲零。

證: (a) 若有二列相等，將此二列交換位置，則此行列式值不變。然而，依照 P_4，行列式值必改變符號。卽 $\Delta=-\Delta$
$\therefore\quad \Delta=0$。

(b) 若二列成比例，依 P_5 可將該比例常數提出，然後如 (a) 可得知行列式爲零。

P_7: 行列式有一列（或行）的每一元可寫成二項的和，則此行列式可表成二個同階行列式的和。

證: 設行列式爲

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & \cdots a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中第一列的每一元可表成兩項的和。由拉氏展開得

$$\Delta=(a_{11}+b_1)A_{11}+(a_{12}+b_2)A_{12}+\cdots+(a_{1n}+b_n)A_{1n}$$

其中 $A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1n}$ 爲第一列中對應元的餘因子。上式可需成

$$\Delta=(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n})+(b_1A_{11}+b_2A_{12}+\cdots+b_nA_{1n})$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ a_{21} & a_{22}\cdots b_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

由上故得證。同理，於任意列與行都可證明其成立。

P_8: 行列式的某列（或行）諸元皆乘以 $\lambda \neq 0$, 而後依次加於另一列（或行）諸對應元上，則所得行列式值與原式值相等。

證: 設將行列式 Δ 中第二列的各元乘以 λ，加到第一列， 則此行列式可以寫成

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22}\cdots & a_{1n}+\lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22}\quad\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\quad\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由 P_8 知上式可寫成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22}\cdots\lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

上列第二行列式的第一、二兩列各元成比例由 P_6 知其爲零；而第一式爲原式，故得證。同理，取其他列或行時亦可證其成立。

例 D: 求行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$的值

解: 將第一列諸元先後皆乘以$-3,2,3$，再分別加於第二、三、四列得