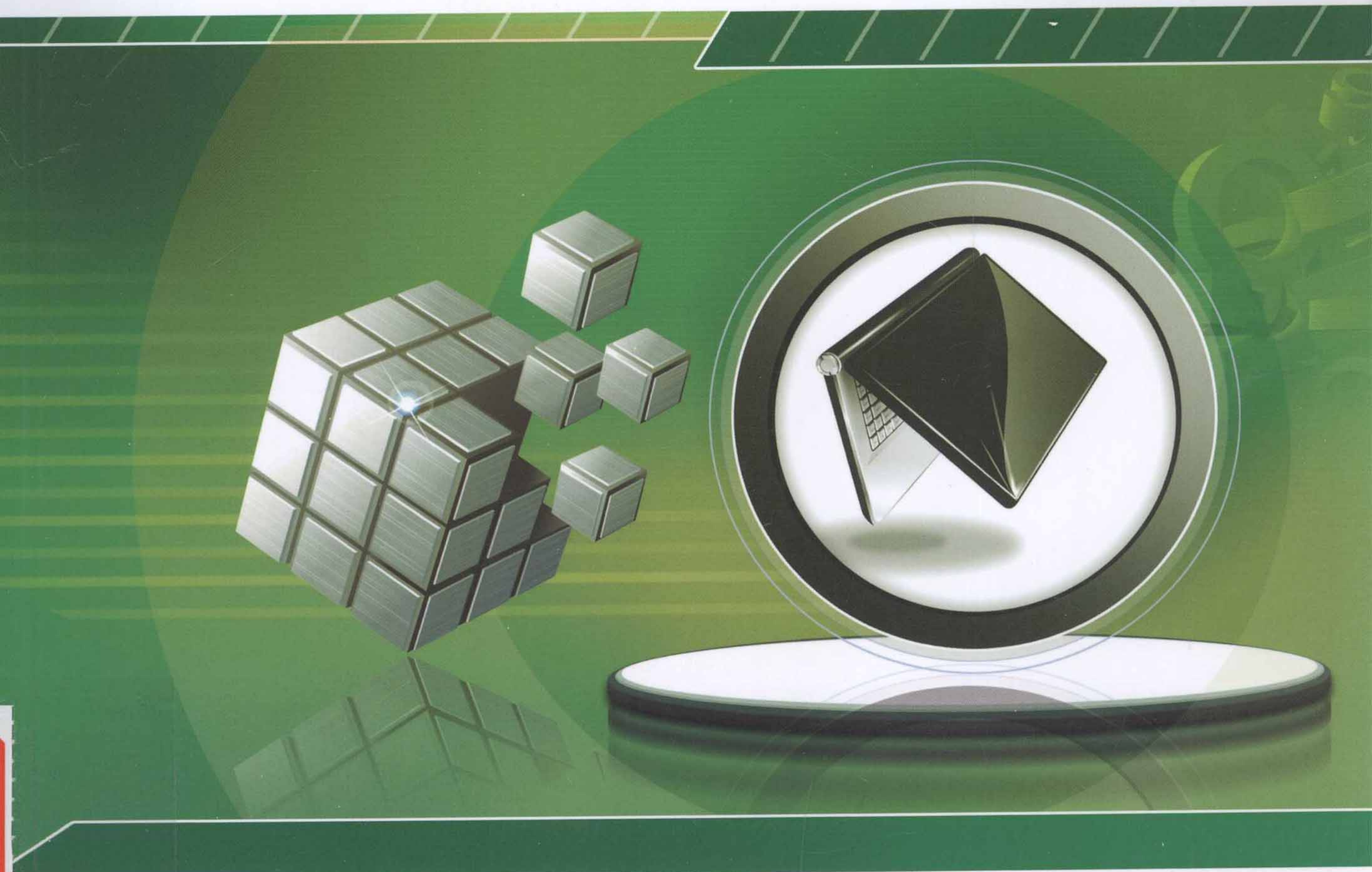
高等学校教材

高等数学

主编 秦宣云 李军英



中南大学出版社
www.csupress.com.cn

高等数学

主编　秦宣云　李军英

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/秦宣云,李军英主编. —长沙:中南大学出版社,2012.9
ISBN 978-7-5487-0672-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.①秦…②李…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 236788 号

高等数学

主编　秦宣云　李军英

□责任编辑　刘　辉
□责任印制　文桂武
□出版发行　中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路　邮编:410083
发行科电话:0731-88876770　传真:0731-88710482
□印　　装　长沙市华中印刷厂

□开　　本　787×1092　1/16　□印张 20.75　□字数 511 千字
□版　　次　2012 年 9 月第 1 版　□2012 年 9 月第 1 次印刷
□书　　号　ISBN 978-7-5487-0672-4
□定　　价　42.00 元

前 言

进入21世纪，现代通信技术和多媒体技术的应用揭开了现代远程教育发展的序幕，现代远程教育具有前所未有的适合性和灵活性，成为世界各国政府实现终身教育的第一选择，也成为信息技术改造传统教育的典范，正引领各国对教育领域进行全面变革。

我国实施现代远程教育试点工作以来，各试点高校对远程教育理念、教学管理模式、教育技术手段、教学资源制作、教材建设等方面进行了一系列有益的探讨与实践。现代远程教育以继续教育为宗旨，大量的研究和工作实践表明：继续教育学习与传统全日制学习相比，有不同的策略和取向。主要表现在成人学习是一个在环境分析的基础上、针对自身实际的选择性的学习过程，体现出自我导向式的学习特征。成人在学习内容的选择、学习方法的运用上主要是根据个人的自主判断，并依据环境的变化进行重新调整。这也是终身学习最基本的特征。

关注对实际工作的帮助、对学习内容的兴趣以及分析问题和解决问题能力的提高等，强调学习内容与个体自我经验的整合，注重不断改进认知策略即学会学习，喜欢合作、交往式的学习，等等，这些都是现代远程教育教材编写的思路。

随着数学的理论和方法越来越广泛地应用到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域，社会对各专业人才的数学素养要求越来越高。这门课程的思想和方法不仅提供了解决实际问题的有力数学工具，而且还给学生提供了一种思维方法，帮助学生提高实际应用中所必需的数学素质和文化修养。

本课程内容广，各专业具体情况和安排不相同，特别是针对网络教育的专门要求，许多从事高等数学教学的教师和学习高等数学的学生都希望有一本重点突出、内容精要、讲述清晰、通俗易懂、深入浅出的教材。我们组织多年从事高等数学教学与研究的教师，精心编写了这本能适合少学时、多专业使用的高等数学教材，以供网络教育不同文科专业灵活选用。

在编写过程中，我们结合多年来在教学中积累起来的经验和体会，在以下方面进行了努力：①在教学内容和体系结构上，将一元和多元函数的微分学及积分学做了相应的整合。与其他教材相比，在教学内容和体系结构上作了精心的取舍，既保证了教学内容和体系结构的连续性、严谨性，又突出了教学内容的精练。②特别强调了数学在经济管理中的应用。针对教材内容，引进概念时力求自然，尽量从实际问题引出抽象的概念，使读者知道概念的实际背景。③讲述概念力求语言准确、清楚。对一些重要定理或公式在证明的同时，尽量设法借助几何直观，使读者易于接受。④例题和习题来源广泛，既有几何、物理方面的，也有医学、经济管理及日常生活方面的。书中所选例题力求形式多样、典型，一个例题有时能说明多方面的问题。在每章的后面配有一定量的习题，并做了详细的解答，用以巩固和掌握基本理论和基本方法。

本书共15章，第1章至第7章内容为高等数学，第8章至第11章内容为线性代数，第

12 章至第 15 章内容为概率与统计。在教学过程中，教师可以根据教学大纲要求、学时多少及学生基础等具体情况，对教材内容做必要的增补和删减。

参加本教材编写、资料整理的有秦宣云、李军英、刘碧玉、刘旺梅等，秦宣云负责统稿和定稿。中南大学网络学院范太华、吴耀斌、朱颖、彭健俐等参与了该书从策划到成书的整个过程，数学科学与计算技术学院韩旭里教授审核了书稿，并提出了许多宝贵意见。

本书在编写过程中，参考了大量的相关教材和资料，选用了其中的部分有关内容、例题和习题，在此谨向有关作者、编者一并表示谢意。

由于作者水平有限，书中难免有一些疏漏、不妥与错误之处，恳请专家、同行和读者不吝指正。

编　者

2012 年 9 月

目　录

第 1 章　函数初步 ………… (1)

1.1　函数的概念 ………… (1)
1.2　复合函数与反函数 ………… (3)
1.3　初等函数与分段函数 ………… (5)
1.4　常用经济函数 ………… (9)

第 2 章　极限与连续 ………… (14)

2.1　极限的概念与性质 ………… (14)
2.2　极限的运算法则与存在准则 ………… (18)
2.3　无穷小量与无穷大量 ………… (23)
2.4　函数的连续性 ………… (26)

第 3 章　导数与微分 ………… (36)

3.1　导数概念 ………… (36)
3.2　求导法则 ………… (41)
3.3　高阶导数 ………… (46)
3.4　隐函数和由参数方程所确定的函数的求导法则 ………… (47)
3.5　微分与近似计算 ………… (50)
3.6　多元函数基础知识 ………… (54)
3.7　偏导数与高阶偏导数 ………… (59)
3.8　隐函数的偏导数 ………… (63)
3.9　全微分 ………… (63)
3.10　导数在经济学中的应用 ………… (64)

第 4 章　微分学的应用 ………… (76)

4.1　微分中值定理 ………… (76)
4.2　洛必塔法则 ………… (78)
4.3　单调性与凹凸性判别法 ………… (81)
4.4　一元函数的极值 ………… (84)
4.5　多元函数的极值 ………… (89)
4.6　经济分析中的优化问题 ………… (91)

第 5 章 积分学基本理论及应用 ………… (98)

5.1 不定积分的概念与性质 ………… (98)
5.2 不定积分的求法 ………… (101)
5.3 定积分的概念与性质 ………… (113)
5.4 定积分的计算 ………… (119)
5.5 广义积分 ………… (126)
5.6 二重积分 ………… (129)
5.7 积分应用 ………… (138)

第 6 章 无穷级数 ………… (148)

6.1 常数项级数 ………… (148)
6.2 级数的敛散性判别法 ………… (151)
6.3 幂级数 ………… (157)
6.4 函数展开成幂级数 ………… (162)

第 7 章 微分方程 ………… (173)

7.1 微分方程的基本概念 ………… (173)
7.2 一阶线性微分方程 ………… (174)
7.3 可降阶的高阶微分方程、高阶线性微分方程 ………… (180)
7.4 二阶常系数线性微分方程 ………… (183)

第 8 章 行列式与矩阵 ………… (195)

8.1 行列式 ………… (195)
8.2 矩阵及其运算 ………… (202)
8.3 矩阵的初等变换与标准形 矩阵的秩 ………… (213)

第 9 章 向量与向量组的线性相关性 ………… (226)

9.1 n 维向量的概念 ………… (226)
9.2 向量组的线性相关性 ………… (227)
9.3 向量组间的关系 ………… (229)

第 10 章 线性方程组 ………… (233)

10.1 线性方程组 ………… (233)
10.2 齐次线性方程组解的结构及其求解 ………… (234)
10.3 非齐次线性方程组解的结构及其求解 ………… (237)

第 11 章 方阵的特征值与特征向量 ………… (245)

第 12 章 随机事件与概率 …… (250)

12.1 随机事件与样本空间 …… (250)
12.2 随机事件的概率 …… (253)
12.3 条件概率及其公式 …… (257)
12.4 全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式 …… (259)
12.5 事件的独立性 Bernoulli 概型 二项概率公式 …… (261)

第 13 章 随机变量及其分布 …… (267)

13.1 随机变量 …… (267)
13.2 随机变量的概率分布 …… (268)
13.3 离散型随机变量的概率分布 …… (270)
13.4 连续型随机变量的概率密度 …… (273)

第 14 章 随机变量的数字特征与极限定理 …… (282)

14.1 数学期望 …… (282)
14.2 方差 …… (286)
14.3 矩的概念 …… (290)

第 15 章 数理统计基础 …… (295)

15.1 简单随机样本 …… (295)
15.2 抽样分布 …… (297)
15.3 参数的点估计与区间估计 …… (299)
15.4 正态总体均值与方差的假设检验 …… (304)

附录 …… (314)

附表 1 标准正态分布表 …… (314)
附表 2 泊松分布表 …… (315)
附表 3 t 分布表 …… (317)
附表 4 x^2 分布表 …… (319)

参考文献 …… (322)

第 1 章　函数初步

函数是微积分学的主要研究对象，也是研究经济学的重要工具. 本章主要介绍函数的基本知识，并给出常见的一些经济函数，为以后的学习奠定必要的基础.

1.1　函数的概念

函数的基础知识在中学里已学过，只简略介绍如下：

1.1.1　实数、区间、邻域

1. 实数

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数(正整数、零、负整数)}\\ \text{纯分数(正分数、负分数)}\end{cases}\\ \text{无理数(无限不循环小数)}\end{cases}$$

如无特别说明，我们研究的数的范围是实数. 本书中全体实数的集合为 $\boldsymbol{R}$，全体整数的集合为 $\boldsymbol{Z}$，全体自然数的集合为 $\boldsymbol{N}$.

2. 区间

称集合 $(a, b)=\{x|a<x<b\}$ 为开区间，集合 $[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间，$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 和 $[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 为半开半闭区间. 以上区间都称为有限区间. 且 $|b-a|$ 称为区间的长度. 类似地，有 $(-\infty, +\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，$(a, +\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$，$(-\infty, b)=\{x|-\infty<x<b\}$，等等称为无穷区间.

3. 邻域

设 x_0，$\delta\in R$，且 $\delta>0$，开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，即满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的实数 x 的全体称为点 x_0 的 δ 邻域. 点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 称开区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 为点 x_0 的左邻域，$(x_0, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的右邻域，$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的去心邻域(或空心邻域).

1.1.2　函数的定义

1. 函数的定义

在初等数学里，已经见过一些简单的函数：

线性函数 $y=kx+b$，二次函数 $y=ax^2+bx+c$，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 等，其中 x，y 是两个变量，一般地，有如下函数概念.

定义 1.1.1　设 x，y 为两个变量，x 的取值范围为非空实数集 D，f 为一个对应规则. 若对于每一个 $x\in D$，都能由对应规则 f 唯一确定一个实数值 y 与之对应，则称 f 为定义在实数集 D 上的一个函数，记作 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定

义域.

如果 $x_0 \in D$，则称函数 f 在点 x_0 处有定义；否则称函数 f 在点 x_0 处无定义，如果实数集 $I \subset D$，称函数 f 在集合 I 上有定义，对于每个 $x_0 \in D$，因变量 y 的对应取值 y_0 称为函数 f 在点 x_0 处的函数值，记为 $y_0 = f(x_0)$，全体函数值所成的集合称为函数的值域，记为 W，即 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

表示函数关系的方法通常有：解析法（公式法）、表格法和图像法.

2. 函数的定义域

自变量 x 的取值范围称为函数的定义域.

对于反映实际问题的函数，其定义域的确定要考虑所给问题的实际意义. 对于用解析法表示的函数，确定定义域应注意以下几点：

(1) 分式中，分母的值不能为零.

(2) $\sqrt[2n]{f(x)}$，n 为正整数，要求 $f(x) \geqslant 0$.

(3) $\log_a f(x)$，要求 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，$f(x) > 0$.

(4) $\tan f(x)$ 中，要求 $f(x) \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$；$\cot f(x)$ 中，要求 $f(x) \neq k\pi$（k 为整数）.

(5) $\arcsin f(x)$，$\arccos f(x)$ 中，要求 $|f(x)| \leqslant 1$.

(6) $y = f(x)^{g(x)}$ 中，要求 $f(x) > 0$.

确定函数关系有两个要素：定义域和对应规则. 当且仅当两个要素完全相同时，两个函数被认为是相同的函数. 如 $y = 1 + x^2$、$x = 1 + y^2$ 及 $s = 1 + t^2$ 均为同一函数；而 $y = x$ 与 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 不是同一函数，因为前者的定义域为 R，而后者定义域为 $x \neq 0$.

例 1.1.1 求函数 $y = \sqrt{4 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$ 的定义域.

解 x 取值应满足 $\begin{cases} 4 - x^2 \geqslant 0, \\ x - 1 > 0. \end{cases}$

解不等式组，得 $1 < x \leqslant 2$. 所以函数的定义域为 $(1, 2]$.

例 1.1.2 求函数 $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}}$ 的定义域.

解 x 取值应满足 $x \neq 0$，$1 + \dfrac{1}{x} \neq 0$，$1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} \neq 0$，解得定义域为 $x \neq 0$，-1，$-\dfrac{1}{2}$.

1.1.3 函数的基本特性

1. 函数的奇偶性

定义 1.1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对任意的 $x \in D$，恒有

(1) $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；

(2) $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

若 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数，则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数. 由定义可知，奇、偶函数

的定义域 D 必定关于原点对称. 奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

2. 函数的单调性

定义 1.1.3　设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义，若对于任意的 x_1，$x_2 \in D$，$x_1 < x_2$，恒有

(1) $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加；

(2) $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少.

区间 D 称为函数的单调递增（或减少）区间.

单调增加（或减少）函数的图形是沿轴的正向逐渐上升（或下降）的.

3. 有界性

定义 1.1.4　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，若存在常数 $M>0$，使得对任意的 $x \in D$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

函数 $f(x)$ 在 D 内有界，则曲线 $y=f(x)$ 在 D 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条水平直线之间.

4. 函数的周期性

定义 1.1.5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正常数 T，使得对任意的 $x \in D$，恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，满足上式的最小正数 T_0 称为 $f(x)$ 的周期.

例如，三角函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，$\tan x$ 与 $\cot x$ 都是周期为 π 的周期函数；函数 $a\sin(kx+b)$ $(a \neq 0, k>0)$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{k}$.

一个周期函数的图形在每个周期内有相同的形状.

例 1.1.3　设 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中 a，b，c 为常数，且 $|a| \neq |b|$，求证 $f(x)=-f(-x)$.

证　以 $\dfrac{1}{x}$ 代入已知表达式得，$af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$，

两式联立可求得，$f(x)=\dfrac{c}{a^2-b^2}\left(\dfrac{a}{x}-bx\right)$，

而 $f(-x)=\dfrac{c}{a^2-b^2}\left(-\dfrac{a}{x}+bx\right)=-\dfrac{c}{a^2-b^2}\left(\dfrac{a}{x}-bx\right)=-f(x)$，

所以，$f(x)=-f(-x)$.

1.2　复合函数与反函数

1.2.1　复合函数

引例　某厂的利润 L 是总收益 R 的函数，利润 = 总收益 × 利润率. 而总收益 R 又是产量 Q 的函数，R = 单价 × 产量，通过 R 得利润 L 是产量 Q 的函数.

定义 1.2.1　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=g(x)$ 的值域为 Z_g. 如果 $Z_g \cap D_f$ 非空，则称函数

$$y=f[g(x)],\ x\in D=\{x\mid g(x)\in D_f\}$$

为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数. 这里 y 为因变量，x 为自变量，而 u 称为中间变量.

一般来说，复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域 D 为函数 $u=g(x)$ 的定义域 D_g 的子集，而其值域 W 为函数 $y=f(u)$ 的值域 W_f 的子集(见图 1－1).

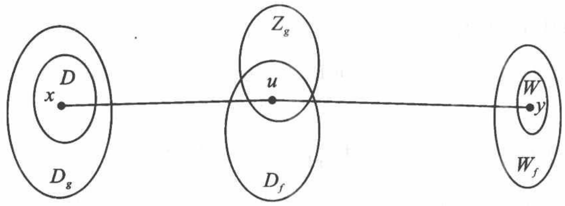


图 1－1

如函数 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 可构成复合函数 $y=\sin x^2$，其定义域仍为 $(-\infty,\ +\infty)$；函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=\sin x$ 可构成复合函数 $y=\sqrt{\sin x}$，其定义域为 $\{x\mid 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\ k\in Z\}$；函数 $y=\lg(u-1)$ 与 $u=\sin x$ 不能构成复合函数.

经常出现需考虑多个函数复合的情况. 例如，3 个函数 $y=\sqrt{1+u}$，$u=v^2$，$v=\tan x$ 可构成复合函数 $y=\sqrt{1+\tan^2 x}$.

例 1.2.1 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$g(x)=\dfrac{x}{1+x}$，求 $f(1+x)$，$f[g(x)]$，$f[1+f(x)]$.

解 $f(1+x)=\dfrac{1}{1+(1+x)}=\dfrac{1}{2+x}$，

$$f[g(x)]=\frac{1}{1+g(x)}=\frac{1}{1+\dfrac{x}{1+x}}=\frac{1+x}{1+2x}.$$

因为 $1+f(x)=1+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{2+x}{1+x}$，故

$$f[1+f(x)]=\frac{1}{1+[1+f(x)]}=\frac{1}{1+\dfrac{2+x}{1+x}}=\frac{1+x}{3+2x}.$$

例 1.2.2 设 $f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$，求 $f(x^2-1)$.

解 因为 $f(x^2+1)=x^4+2x^2+1+3x^2+3-1=(x^2+1)^2+3(x^2+1)-1$，

令 $x^2+1=u$，则得 $f(u)=u^2+3u-1$，故 $f(x)=x^2+3x-1$，

从而 $f(x^2-1)=(x^{2t}-1)^2+3(x^2-1)-1=x^4+x^2-3$.

1.2.2 反函数

定义 1.2.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域与值域分别为 D_f 与 W_f，如果对于每个 $y\in W_f$，都有唯一的对应值 $x\in D_f$，满足 $y=f(x)$，则变量 x 是变量 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，并记为

$$x=f^{-1}(y),\ y\in W_f.$$

由定义可知，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 $y=f(x)$ 的值域 W_f，而其值域为 $y=f(x)$ 的定义域 D_f.

显然，$x=f^{-1}(y)$ 的反函数就是 $y=f(x)$，即两者互为反函数，且有 $f^{-1}[f(x)]=x$，$f[f^{-1}(y)]=y$，其中 $x\in D_f$，$y\in W_f$.

习惯上，自变量用 x 表示，而因变量用 y 表示，故 $y=f(x)$ 的反函数常记为 $y=f^{-1}(x)$.

例 1.2.3　求 $y=2x+3$ 的反函数，并作图.

解　由 $y=2x+3$ 得，$x=\dfrac{y-3}{2}$，写成 $y=\dfrac{x-3}{2}$，如图 1－2.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

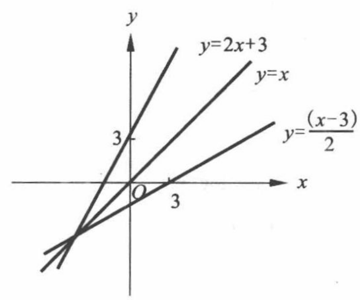


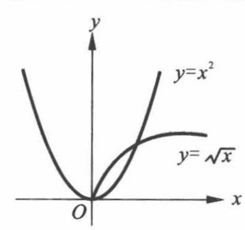
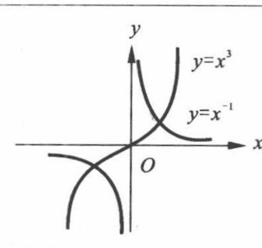
图 1－2

1.3　初等函数与分段函数

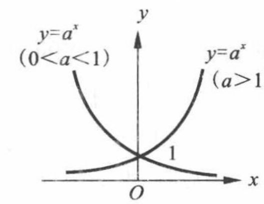
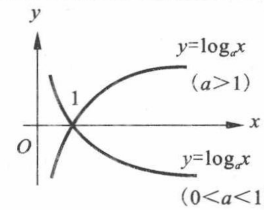
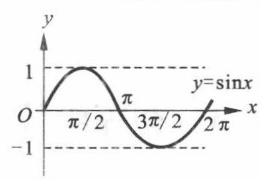
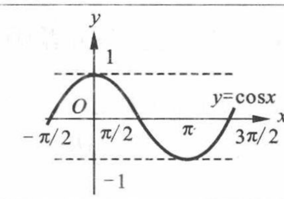
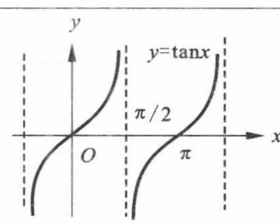
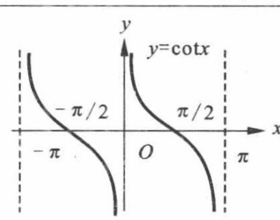
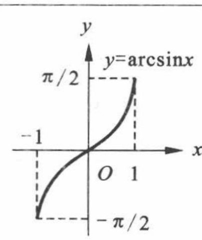
1.3.1　基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数 6 大类. 它们的分析表达式、定义域、值域以及图像见表 1－1.

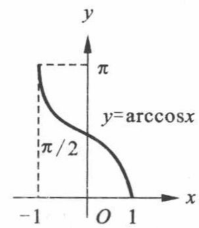
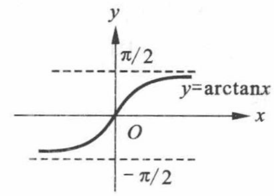
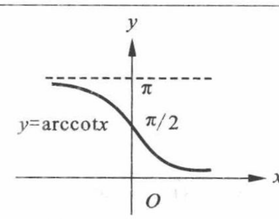
表 1－1　基本初等函数（除 $y=c$ 外）总表

	函数	定义域	值域	图　象
幂函数	$y=x^2$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	
幂函数	$y=x^3$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	
	$y=x^{-1}$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	

续表 1－1

	函数	定义域	值域	图　　象
指数函数	$y=a^x$ $a>0,\ a\neq1$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(0,\ +\infty)$	
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0,\ a\neq1$	$(0,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$	
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$[-1,\ 1]$	
	$y=\cos x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$[-1,\ 1]$	
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$	$(-\infty,\ +\infty)$	
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$	$(-\infty,\ +\infty)$	
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1,\ 1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$	

续表 1－1

	函数	定义域	值域	图　　象
反三角函数	$y=\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	
	$y=\arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$	
	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$	

1.3.2　初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的并可用一个解析式表示的函数，称为初等函数，例如

$$y=2\sin x+\cos^2 x,\ y=\sqrt{\sin\frac{1}{x}},$$

$$y=x^x=e^{x\ln x},\ y=|x|=\sqrt{x^2}$$

都是初等函数.

在未赋予实际意义且未指明定义域时，初等函数的定义域是使得该函数的解析表达式有意义的自变量的取值范围.

1.3.3　分段函数

设 D_1 与 D_2 为两个互不相交的实数集合，函数 $\varphi(x)$ 与 $\phi(x)$ 分别在 D_1，D_2 上有定义，则

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x),\ 若\ x\in D_1,\\ \phi(x),\ 若\ x\in D_2.\end{cases}$$

定义了一个函数 $f(x)$，其定义域为 $D=D_1\cup D_2$，称 $f(x)$ 为一个分段函数. 分段函数的定义域可分为任意有限个数集以至无穷多个数集. 例如，绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$$

符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

都是分段函数.

分段函数通常不是初等函数，但在其定义域的各个子集上都用初等函数来表示，故仍可用初等函数来进行讨论.

例 1.3.1 用$[x]$表示不超过x的最大整数，如$[1.2]=1$，$[-0.2]=-1$.

解：函数

$$f(x)=[x]=\begin{cases}\cdots\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ \cdots\end{cases}$$

是一个定义在$(-\infty, +\infty)$内的分段函数，称为取整函数，其图形如图 1－3 所示.

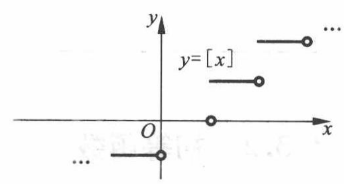


图 1－3

例 1.3.2 已知$f(x)=\begin{cases}x-1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ x^2+1, & x>0.\end{cases}$

求：(1) 函数$f(x)$的定义域；

(2) $f(-\frac{1}{2})$，$f(0)$，$f(2)$.

解 (1) $f(x)$的定义域为

$D=[-1, 0)\cup\{0\}\cup(0, +\infty)=[-1, +\infty)$.

(2) 因为$-\frac{1}{2}\in[-1, 0)$，所以$f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$.

又因为$0\in\{0\}$，所以$f(0)=0$. 而$2\in(0, +\infty)$，所以$f(2)=2^2+1=5$.

函数$f(x)$的图形如图 1－4 所示.

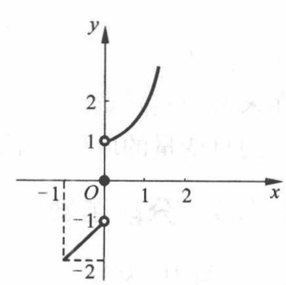


图 1－4

例 1.3.3 已知$y=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ \ln x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2e^{x-1}, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求反函数.

解 当$-1\leqslant x<0$时，由$y=x^2$得，$y\in(0, 1]$，且$x=-\sqrt{y}$，写成$y=-\sqrt{x}$，$x\in(0, 1]$.

当 $0<x\leqslant 1$ 时，由 $y=\ln x$ 得，$y\in(-\infty,0]$，且 $x=e^y$，写成 $y=e^x$，$x\in(-\infty,0]$.

当 $1<x\leqslant 2$ 时，再由 $y=2e^{x-1}$ 得，$y\in(2,2e]$，且 $x=1+\ln\dfrac{y}{2}$，写成 $y=1+\ln\dfrac{x}{2}$，$x\in(2,2e]$.

分段函数也是微积分中常碰到的一类函数. 读者要特别注意到分段函数是整个定义域上的一个函数，而不是几个函数，只是在定义域的各个不相交子集上，计算函数值的公式不同而已.

例 1.3.4　某两城市之间的长途电话费在最初的 3 分钟是 2.10 元，以后的每一分钟（不足一分钟以一分钟计）另加 0.55 元. 试求长途电话费 C 与通话时间 t 之间的函数关系.

解　当 $0\leqslant t\leqslant 3$ 时，$C=2.1$；

当 $t>3$ 且 t 为整数时，$C=2.1+0.55(t-3)=0.55t+0.45$；

当 $t>3$ 且 t 为非整数时，$C=2.1+0.55([t]+1-3)=1+0.55[t]$.

所以

$$C=\begin{cases}2.1, & 0\leqslant t\leqslant 3,\\ 0.55t+0.45, & t>3\text{ 且 }t\text{ 为整数},\\ 0.55[t]+1, & t>3\text{ 且 }t\text{ 为非整数}.\end{cases}$$

1.4　常用经济函数

在经济学研究中，一个经济量往往受到多个经济量的影响. 例如影响某一商品需求量的因素，包括该商品的价格、消费者的收入、与该商品有关的其余商品的价格、广告投入、消费者的偏好及某些意外事件等. 为了讨论这些因素的影响，通常从最简单的情况研究起，即假定其余因素不变的前提下，分析某个自变量对因变量的影响.

1.4.1　需求函数与价格函数

市场经济中，需求是指消费者在一定时期内，在各种可能的价格下，愿意而且有能力购买的商品数量. 很多因素影响消费者对商品的需求，其中商品价格 P 是影响需求量 Q_d 的基本因素. 需求量 Q_d 对价格 P 的函数 $Q_d=f(P)$ 称为需求函数，它的反函数 $P=f^{-1}(Q_d)$ 称为价格函数. 一般地，售价上涨，需求量减少，售价下降，需求量增加. 所以 $Q_d=f(P)$ 为单调减少函数. 常见的需求函数有

$$Q_d=a-bP(a,b>0),\ Q_d=ae^{-bP}(a,b>0),$$

$$Q_d=\frac{a}{P+c}-b(a,b,c>0),\ Q_d=aP^{-b}(a,b>0).$$

例 1.4.1　某种服装，当每件售价 40 元时，每天可售出 800 件；如果每件降低 2 元，则每天可多售出 30 件. 试求卖出件数与售价的需求函数关系.

解　设价格为 P 元，每天卖出 Q 件，依题意，有

$$Q=800+\frac{40-P}{2}\cdot 30=1400-15P.$$