

# 美国大学生数学建模 竞赛题解析与研究

第 1 辑

西北工业大学数学建模课题组



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

# 美国大学生数学建模 竞赛题解析与研究

Meiguo Daxuesheng Shuxue Jianmo Jingsaiti Jiexi yu Yanjiu

第 1 辑

西北工业大学数学建模课题组



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本系列丛书是以美国大学生数学建模竞赛 (MCM/ICM) 赛题为主要研究对象, 结合竞赛特等奖的优秀论文, 对相关的问题做深刻细致的解析与研究。本辑针对 2007 年及 2008 年 MCM/ICM 竞赛的 6 个题目: 冰盖融化问题、数独谜题生成问题、医疗保健系统评估问题、选区划分问题、飞机就座问题以及肾移植问题进行了解析与研究。

本书内容新颖、实用性强, 目前国内尚无同类作品。本书可作为指导学生参加美国大学生数学建模竞赛的主讲教材, 也可作为本科生、研究生学习和准备全国大学生、研究生数学建模竞赛的参考书, 同时可供研究相关问题的教师和研究生参考使用。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

美国大学生数学建模竞赛题解析与研究. 第 1 辑 / 西北工业大学数学建模课题组. —北京: 高等教育出版社, 2012. 8

(美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书)

ISBN 978-7-04-033845-4

I. ①美… II. ①西… III. ①数学模型-竞赛题-研究 IV. ①O141.4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 156135 号

策划编辑 刘 英  
插图绘制 尹 莉

责任编辑 冯 英  
责任校对 金 辉

封面设计 李卫青  
责任印制 朱学忠

版式设计 范晓红

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
印 刷 涿州市星河印刷有限公司  
开 本 787mm × 1092mm 1/16  
印 张 17  
字 数 320 千字  
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landracom.com>  
<http://www.landracom.cn>  
版 次 2012 年 8 月第 1 版  
印 次 2012 年 8 月第 1 次印刷  
定 价 45.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物料号 33845-00

# 序

---

数学建模的训练与经验能使同学们在解决问题时更有创意，同时也能帮助同学们成为更为优秀的研究生。“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”的出版，将通过数学建模竞赛题目和概念的解析，帮助同学们掌握数学建模的技能，并为同学们在今后的工作中获得成功打下坚实的基础。

数学建模是一种过程，也是一种理念，或者说是一种哲学。作为过程，学生在理解及使用建模过程或框架时需要指导并积累经验。作为经验，学生需要使用不同的数学方法（离散、连续、线性、非线性、随机、几何及分析）构造数学模型，从中体验不同的细节及复杂程度。作为理念，学生需要发现各种相关的、具有挑战性的及有趣的实际问题，从中培养对数学建模的兴趣，并认识到数学建模在实际生活中的作用。数学建模的主要目的是指导学生用建模的方法解决实际问题。尽管在实际中，有些问题或许可以使用已有的算法和公式来求解，但数学建模的方法比简单使用已有算法和公式能解决更多的问题，特别是解决新的、没有固定答案及没有被解决过的问题。

为了积累经验，同学们应尽早地接受数学建模训练，至少应该在大学低年级时就开始，这样可以在以后的课程学习中进一步强化数学建模能力。由于数学建模的综合与交叉特性，所以各个专业的学生都能够从数学建模活动中受益。

本套丛书从将数学模型作为研究工具的角度出发，介绍模型的构造，分析建模过程，这些都是帮助学生更好地掌握数学建模技能的重要因素。数学建模是充满挑战的高级技能，更重要的是能够帮助学生更好地成长。当今世界需要解决的问题往往很复杂，所以建立的数学模型也很复杂，通常需要通过精细的计算和模拟才能获得解答或对模型结果的分析与检验。由于数据可视化技术的普及，解题方法的增加，所以现在的确是培养更多数学建模高手的最佳时期。

我希望同学们在数学建模探索中取得进步，也希望指导教师在使用这套丛书提供的例子及方法指导学生时取得很好的效果。尽管学生的层次可能不同，但我对你们的忠告是同样的：树立你的信心、发展你的技能，用你的才能解决社会中最具挑战及最重要的问题。祝各位建模好运！

Chris Arney, 博士  
美国西点军校数学系教授  
ICM 竞赛主席  
2011 年 10 月

# Forward

---

Undergraduate students who receive instruction and experiences in mathematical modeling become better and more creative problem solvers and graduate students. This book series is being published to prepare and educate students on the topics and concepts of mathematical modeling to help them establish a problem solving foundation for a successful career.

Mathematical modeling is both a process and a mindset or philosophy. As a process, students need instruction and experience in understanding and using the modeling process or framework. As part of their experience, they need to see various levels of sophistication and complexity, along with various types of mathematical structures (discrete, continuous, liner, nonlinear, deterministic, stochastic, geometric, and analytic). As a mindset, students need to see problems that are relevant, challenging, and interesting so they build a passion for the process and its utility in their lives. A major goal in modeling is for students to want to model problems and find their solutions. Recipes for structured or prescribed problem solving (canned algorithms and formulas) do exist in the real world, but mathematical modelers can do much more than execute recipes or formulas. Modelers are empowered to solve new, open, unsolved problems.

In order to build sufficient experience in modeling, student exposure must begin as early as possible—definitely by the early undergraduate years. Then the modeling process can be reinforced and used throughout their undergraduate program. Since modeling is interdis-

plinary, students from all areas of undergraduate study benefit from this experience.

The articles and chapters in this series expose the readers to model construction, model analysis, and modeling as a research tool. All these areas are important and build the students' modeling skills. Modeling is a challenging and advanced skill, but one that is empowering and important in student development. In today's world, models are often complex and require sophisticated computation or simulation to provide solutions or insights into model behavior. Now is an exciting time to be a skilled modeler since methodology to provide visualization and find solutions are more prevalent and more powerful than ever before.

I wish the students well in their adventure into modeling and I likewise wish faculty well as they use the examples and techniques in this book series to teach the modeling process to their students. My advice to all levels of modelers is to build your confidence and skills and use your talents to solve society's most challenging and important problems. Good luck in modeling!

Chris Arney, PhD

United States Military Academy at West Point

Professor of Mathematics

Director of the Interdisciplinary Contest in Modeling

October, 2011

# 丛书简介

---

美国大学生数学建模竞赛 (The Mathematical Contest in Modeling, MCM/The Interdisciplinary Contest in Modeling, ICM), 即“数学建模竞赛”和“交叉学科建模竞赛”, 是一项国际级的竞赛活动, 为现今各类数学建模竞赛之鼻祖。

1985年, 在美国教育部的资助下, 在美国针对在校大学生创办了一个名为“数学建模竞赛”的竞赛, 其宗旨是鼓励大学师生对不同领域的各种实际问题进行阐明、分析并提出解决方案。它是一种完全公开的竞赛, 参赛形式为学生三人组成一队, 在三天(72小时)(近年改为四天, 即96小时)内任选一题, 完成数学建模的全过程, 并就问题的重述、简化和假设及其合理性的论述、数学模型的建立和求解(及软件)、检验和改进、模型的优缺点及其可能的应用范围的自我评述等内容写出论文。MCM/ICM非常重视解决方案的原创性、团队合作与交流以及结果的合理性。由专家组成的评阅组进行评阅, 评出优秀论文。除了不允许在竞赛期间与团队以外的任何人(包括指导教师)讨论赛题之外, 允许使用图书资料、互联网上的资料、任何类型的软件等各种资料和途径, 从而为参赛学生提供了广阔的创作空间。第一届竞赛时, 只有美国的158个队参加, 其中只有90个队提交了解答论文。2012年MCM/ICM共有5 026个队参加, 其中MCM有3 697个队, ICM有1 329个队, 遍及五大洲。MCM/ICM已经成为最著名的国际大学生竞赛之一, 影响极其广泛。

近年来, 已有越来越多的中国学生组队参加美国大学生数学建模竞赛, 其中不乏被评为最优论文(Outstanding Winners)的佼佼者, 这充分显示了中国大学生参加MCM/ICM竞赛的积极性与实力。学生在准备竞赛的时候, 除了在指导教师的帮助下阅读和研究以往竞赛的优胜论文以外, 普遍希望能有一些专门针对美国大学生数学建模竞赛的书籍, 指导和帮助备赛。

“美国大学生数学建模竞赛指导丛书”就是为了满足读者的这一需求而出版的, 目的是帮助学生从全局出发, 不受固定模式的限制, 用建模的手段解决开放性问题的研究方法, 并提高写作能力。丛书的读者对象包括参赛学生以及对数学建模与算法感兴趣的研究生、专业人员和业余爱好者。

我们邀请到美国麻省大学罗威尔分校王杰教授担任丛书主编，他曾为 MCM/ICM 命题，对竞赛具有很多独到的认识。丛书作者来自各高校，他们都是有经验的指导教师或参加过竞赛的优秀成员。丛书包括一本《正确写作美国大学生数学建模竞赛论文》和若干辑《美国大学生数学建模竞赛题解析与研究》，前者为一本指导学生如何正确写作 MCM/ICM 论文的工具书，后者中和每一辑将讨论若干赛题，包括问题的背景、分析技巧、建模与测试方法及算法设计，并引导读者列出进一步研究的课题。目标是培养学生多方面的能力，如数学、编程、写作及课题研究等的训练，提高学生分析问题、解决问题的水平。

丛书的出版计划得到了美国建模专家的广泛支持，ICM 主席（也是 ICM 的发起人）、美国西点军校数学系教授 Chris Arney 博士受邀担任丛书顾问并为丛书作序。

我们热切希望通过本套丛书的出版，进一步活跃我国大学生参加 MCM/ICM 的积极性，提高他们的自信心，并最终取得满意的成绩。更为重要的，提高学生的研究解决实际问题的能力。



# 前言

---

美国大学生数学建模竞赛 (MCM/ICM) 作为一项国际性数学赛事, 尤其受到中国大学生们的青睐。历年赛题的题材广泛, 其应用性、探究性、开放性和挑战性或许是吸引学生眼球并积极参赛的重要原因, 同时也引发了国内不少大学数学教师的兴趣。

2007 年和 2008 年的赛题就有这些特点。2007 年 MCM 的 A 题 “Gerrymandering” 是因探讨美国州众议员选举的公平性而引发的选区划分的社会学研究问题, 该年 MCM 的 B 题 “The Airplane Seating Problem”, 则为研究飞机登机时间的最优化问题。2007 年 ICM 的 C 题 “Organ Transplant: The Kidney Exchange Problem”, 要研究如何建立一个有效机制, 以保证有效利用与开发肾源。2008 年 MCM 的 A 题 “Take A Bath” 要求研究因北极冰雪消融所导致的一系列环境、生态等方面的问题, 该年 MCM 的 B 题 “Creating Sudoku Puzzles” 研究的是数独游戏的反问题: 数独谜题难度级别的划分与生成算法及其复杂性分析。2008 年 ICM 的 C 题 “Finding the Good in Health Care Systems”, 则是研究在医疗保健领域中, 如何科学合理地评价服务系统方面的问题。

这些赛题的前沿性和现实性乃至趣味性十分明显。对于问题背景的归纳表述和所提出的希望解决的问题, 都相当贴近原始问题, 在专业上的简化和在数学上的提炼都比较少, 问题实际、明了。有些问题本身就是一个研究课题, 还没有成熟的研究成果, 甚至即使有研究结论, 也尚存争议, 未有定论, 有不少值得进行探索和研究的方面, 极具挑战性。这些赛题往往要求参赛学生自己查询、获取充分的相关信息和数据。针对赛题的数学建模与算法多种多样, 开放性强, 参赛学生能够发挥的空间大。

分析这两年 MCM/ICM 获奖的优秀论文, 它们具有下面的一些特点: 或侧重于模型和方案的新颖性, 自成一统; 或建模分析中对于问题的理解和解决有独特的视野和观点; 或表现出有价值的外延与扩展。论文在建立数学模型解决问题过程中, 或者对于问题的全局及各因素的复杂关系有较好的分析与把握; 或者未必做得全面, 却往往对其中一两个问题颇有特色的有层次的深入的研究。对计算结果似乎比较淡化, 然而强调有说服力的量化结论。尤其注重新见

解、新观点、新意或创新性。

MCM/ICM 的这些特点, 无疑对于培养大学生优良的科学素质、独立的研究能力、创造性能力都是有益的。就大学数学教学而言, 或多或少推动着传统数学教学模式的变化, 使得大学校园里的数学课程的教与学, 变得生动有趣、富有活力。师生走出课堂, 走出书本, 走向实际问题, 走向应用探索, 致力于开放教学, 致力于自主学习。

本辑就 2007、2008 年 MCM/ICM 的 A、B 与 C 题共 6 道赛题的若干数学建模方法, 结合当年获奖的优秀论文进行介绍和评析, 希望有益于大学的数学建模教学和竞赛活动。书中不免有诸多不妥之处, 敬请读者批评指正。本辑抛砖引玉, 希冀有更多、更好的相关书籍问世。

本辑的第 1 章由孙中奎撰写, 肖华勇撰写第 2 章, 徐根玖撰写第 3 章, 雷佑铭撰写第 4 章, 郭千桥撰写第 5 章, 吕全义撰写第 6 章。叶正麟负责组稿和统稿。

这套丛书是由美国麻省大学罗威尔分校计算机科学系王杰教授主编, 王杰教授对于数学模型与算法有很深刻的研究, 对美国大学生数学建模竞赛和学生的科学素质培养饶有兴趣。在本辑的撰写过程中, 王教授给予了富有启示的建议, 西安交通大学领导提供了诸多便利, 高等教育出版社刘英副编审做了鼎力策划, 冯英女士做了认真辛勤的编辑工作, 得到了西北工业大学教务处领导及李辉副处长和应用数学系孙浩教授的有力支持, 在此一并表示诚挚的感谢。很欣赏 ICM 主席、美国西点军校数学系教授 Chris Arney 博士所作的序, 并深表感谢。

叶正麟

2012 年 6 月于西安

# 目录

---

<b>第 1 章 冰盖融化问题</b> .....	1
1.1 问题的综述 .....	1
1.2 问题的背景资料 .....	2
1.2.1 全球气候正在变暖 .....	2
1.2.2 气候变暖的影响 .....	4
1.2.3 为什么是北极 .....	6
1.3 问题的数学模型与结果分析 .....	7
1.3.1 模型一：多元线性回归模型 .....	7
1.3.2 模型二：初等数学模型 .....	21
1.4 问题的综合分析与进一步研究的问题 .....	25
1.4.1 问题的综合分析 .....	25
1.4.2 进一步研究的问题 .....	28
参考文献 .....	29
<b>第 2 章 数独谜题生成问题</b> .....	30
2.1 数独的概念 .....	30
2.2 问题的提出 .....	31
2.3 问题的背景与现状 .....	32
2.4 人工求解数独的规则 .....	34
2.5 数独难度的划分方法 .....	52
2.5.1 方法一：步数法 .....	52
2.5.2 方法二：评分法 .....	57
2.5.3 方法三：次数加权法 .....	59
2.5.4 方法四：机器求解客观法 .....	64
2.6 数独的生成问题 .....	77
2.6.1 终盘生成问题 .....	77

2.6.2	不同级别数独问题的生成	77
2.7	问题的综合分析与进一步研究的问题	78
2.7.1	问题的综合分析	78
2.7.2	进一步研究的问题	79
2.7.3	其他数独	79
	参考文献	83
<b>第3章</b>	<b>医疗保健系统评估问题</b>	<b>85</b>
3.1	问题的综述	85
3.2	问题的背景资料	88
3.3	医疗保健系统评价模型及求解	90
3.3.1	模型一：基于层次分析法的灰色关联评估模型	90
3.3.2	模型二：输入输出系统评估模型	103
3.3.3	模型三：医疗保健系统概率模型	114
3.4	问题的综合分析与进一步研究的问题	120
3.4.1	三个评估模型的对比	120
3.4.2	其他评估方法分析	121
3.4.3	进一步研究的问题	126
	参考文献	127
<b>第4章</b>	<b>选区划分问题</b>	<b>129</b>
4.1	问题的综述	129
4.1.1	问题的提出	129
4.1.2	问题的背景资料	130
4.2	问题的数学模型与结果分析	133
4.2.1	模型一：拓扑划分模型	133
4.2.2	模型二：Voronoi图划分模型	139
4.2.3	模型三：增长分割模型	149
4.3	问题的综合分析与进一步研究的问题	158
4.3.1	问题的综合分析	158
4.3.2	进一步研究的问题	159
	参考文献	159
<b>第5章</b>	<b>飞机就座问题</b>	<b>161</b>
5.1	问题的综述	161
5.1.1	问题的提出	161

5.1.2 问题的背景资料 .....	162
5.2 问题的数学模型与结果分析 .....	164
5.2.1 模型一：随机模型 .....	164
5.2.2 模型二和模型三：数组模型和图论模型 .....	177
5.2.3 模型四：元胞自动机模型 .....	184
5.2.4 模型五：模拟（仿真）模型 .....	193
5.2.5 下机模型 .....	204
5.3 问题的综合分析与进一步研究的问题 .....	206
5.3.1 问题的综合分析 .....	206
5.3.2 进一步研究的问题 .....	209
参考文献 .....	209
<b>第6章 肾移植问题</b> .....	<b>212</b>
6.1 问题的综述 .....	212
6.2 问题的背景资料 .....	217
6.2.1 肾移植概况 .....	217
6.2.2 影响移植的因素 .....	218
6.2.3 扩大肾源的方法 .....	219
6.2.4 肾移植的伦理与政策问题 .....	220
6.3 问题一：美国移植网络的模拟 .....	221
6.3.1 方法一：随机排队服务模型 .....	222
6.3.2 方法二：多排队多服务模型 .....	225
6.3.3 方法三：带约束微分方程模型 .....	229
6.3.4 计算结果与分析 .....	230
6.3.5 政策的改进 .....	230
6.3.6 几种方法的评价 .....	232
6.4 问题二：其他国家的移植政策及影响 .....	232
6.4.1 欧洲各国的移植政策 .....	233
6.4.2 关于当前肾移植政策的建议 .....	233
6.5 问题三：肾循环交换 .....	235
6.5.1 环与链 .....	235
6.5.2 优化模型 .....	236
6.5.3 算法 .....	237
6.5.4 计算结果与分析 .....	238
6.5.5 肾源的进一步利用 .....	238
6.5.6 优化方法的进一步讨论 .....	239

---

6.6	问题四：患者的选择 .....	240
6.6.1	方法一：期望存活时间目标 .....	240
6.6.2	方法二：期望存活时间动态处理 .....	242
6.6.3	方法三：考虑存活5年的概率 .....	243
6.6.4	三种方法的评价 .....	244
6.7	问题五：伦理与政策问题 .....	244
6.7.1	伦理问题 .....	244
6.7.2	政策问题 .....	245
6.7.3	结论 .....	247
6.8	问题六：捐赠者的决定 .....	248
6.8.1	方法一：消费决定模型 .....	248
6.8.2	方法二：考虑风险模型 .....	251
6.8.3	两种方法的评价 .....	253
6.9	问题的综合分析 with 进一步研究的问题 .....	253
6.9.1	问题的综合分析 .....	253
6.9.2	进一步研究的问题 .....	253
	参考文献 .....	254

# 第 1 章 冰盖融化问题

---

## 1.1 问题的综述

“Take a Bath”是 2008 年美国大学生数学建模竞赛 (The Mathematical Contest in Modeling, MCM2008) 的 A 题, 研究的是北极冰雪消融所导致的一系列环境、生态等方面的问题。该题目如下。

大陆遭受侵蚀

研究因全球气温升高所造成的北极冰盖融化对大陆的影响。具体而言, 为未来 50 年中每 10 年因北极冰盖融化对佛罗里达州海岸所造成的影响建立模型, 尤其要关注对大型都市所造成的影响。就此问题给出适宜的回答, 对所用数据作详细讨论应是重要的组成部分。

问题的原文如下:

Take a Bath

Consider the effects on land from the melting of the north polar ice cap due to the predicted increase in global temperatures. Specifically, model the effects on the coast of Florida every ten years for the next 50 years due to the melting, with particular attention given to large metropolitan areas. Propose appropriate responses to deal with this. A careful discussion of the data used is an important part of the answer.

(题目来源: <http://www.comap.com/undergraduate/contests/mcm/contests/2008/problems/>)

显然, 出题人希望参赛者能够收集与北极冰雪变化相关的数据, 讨论北极冰雪融化对佛罗里达州海岸今后 50 年的影响。看到题目, 可能每个人都会产生这样的两个疑问: ①为什么研究的是北极冰雪融化的影响? 毕竟南极冰盖无论从规模上还是面积上都远远超过北极。②为什么是对美国佛罗里达州海岸的影响? 众所周知, 受到海平面上升影响最大的是荷兰以及太平洋上的一些岛国。第二个问题很容易回答, 因为出题人是美国人, 而且佛罗里达州海岸是美国人

享受海滩度假的最大的和最佳的地点之一，同时也是美国发生飓风最频繁的地区之一。第一个问题的答案则隐藏在下面的数据和资料中。

## 1.2 问题的背景资料

越来越多的证据表明，全球气候正在变暖，“我们正居住在一个急速变暖的地球上！”实际上，早在1992年，科学家关怀社会联盟的1700位世界顶尖科学家包括大多数诺贝尔科学奖得主，就已经在极力呼吁世界各国联手遏制全球暖化，“地球上的二氧化碳浓度已逼近警戒线！”“我们可以避免灾难发生的时间已经剩下不到十年抑或几十年”“我们所面临的威胁一旦无法挽救，人类的希望将非常渺茫。”<sup>[1]</sup>

全球升温会带来什么影响？英国作家林纳斯所著的《6度变化，一个愈来愈热星球变化的未来》一书中呈现了该景象：如果全球

升温1℃，无冰海域吸收更多的热气，加速全球暖化效应；地球表面1/3的水资源流失；低海岸地区遭海水淹没。

升温2℃，欧洲居民中暑而亡；森林被大火吞噬；处于逆境的植物开始释放碳，不再具备吸碳功能；有1/3的物种濒临灭绝。

升温3℃，从植物和土壤中排出的碳物质，加速全球暖化效应；亚马逊热带雨林荡然无存；超级飓风袭击沿海城市；非洲闹饥荒。

升温4℃，永冻土无止境地溶解，造成全球暖化效应一发不可收拾；英国大部分地方也因严重的水患而不适合居住；地中海区域成为废墟。

升温5℃，甲烷从海床窜出，加速全球暖化效应；两极冰层融化；人类逐食物而居，但徒劳无功，形同野生动物在这片土地上苟延残喘。

升温6℃，地球上的生物会在狂风、山洪暴发、硫化氢毒气及带着原子弹般威力的甲烷火球流窜地表的灾难中完全灭迹；唯一存活下来的只有霉菌。

这是危言耸听吗？

现在有三个问题：全球气候是否在变暖？如果全球变暖，会有什么影响？因变暖所造成的冰雪融化最严重的是哪些地方？

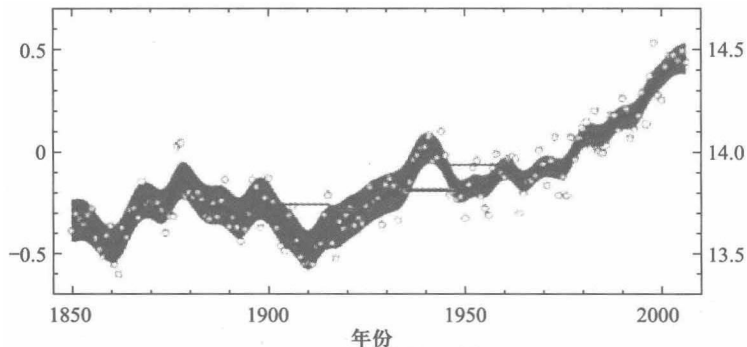
### 1.2.1 全球气候正在变暖

时至今日，仍然有很多人在质疑一个问题：全球气候真的在变暖吗？联合国政府间气候变化专门委员会（Intergovernmental Panel on Climate Change, IPCC）的回答是：“气候系统变暖是毋庸置疑的，目前从全球平均气温和海温升高，大范围积雪和冰融化，全球平均海平面上升的观测中可以看出气候系统变暖是明显的”（IPCC 2007年评估报告<sup>[2]</sup>）。根据IPCC的结论和观测数据，自1850年以来，在1995—2006年的12年中，有11个年份位列最暖的12个年份

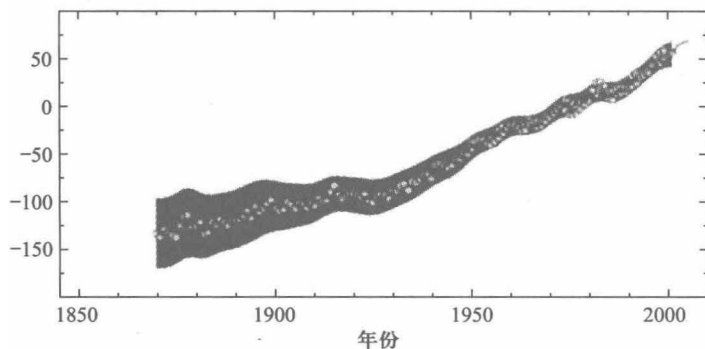


之中。而在 1906—2005 年的 100 年中，温度以  $0.74\text{ }^{\circ}\text{C}$  的趋势线性增长。

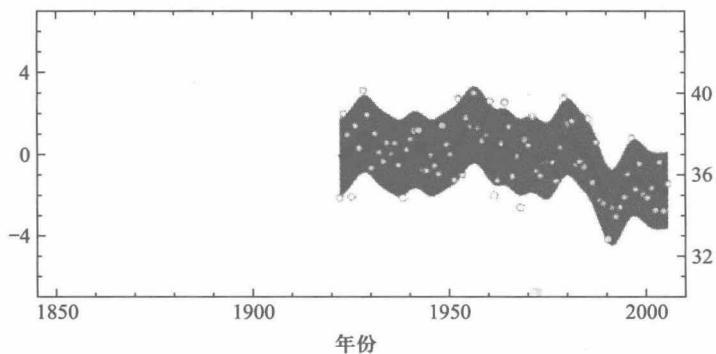
在图 1-1 中，已观测到全球平均地表温度、分别来自验潮仪（深色）和卫星（浅色）的全球平均海平面以及 3—4 月北半球积雪的变化。图中所有变化差异均相对于 1961—1990 年的相应平均值。各平滑曲线表示 10 年平均值，各圆点表示年平均值。阴影区为不确定性区间，根据已知的不确定性和时间序列综合分析估算得出（图和数据均来源于文献 [2]）。



(a) 全球平均温度/ $^{\circ}\text{C}$



(b) 全球平均海平面高度差/mm



(c) 北半球积雪面积/ $10^6\text{km}^2$

图 1-1 温度、海平面和北半球积雪变化

(图片来源: IPCC 2007 年评估报告)