高校体育教育专业试用教材

体育测量与评价

主编 李佑文

苏州大学出版社

高校体育教育专业试用教材

体育测量与评价

主　编　李佑文
副主编　柳方祥　柏人哲

苏州大学出版社

体育测量与评价
主编　李佑文
苏州大学出版社出版发行
江苏省新华书店经销
丹徒县印刷厂印刷
开本 787×1092　1/16　印张 11.25　字数 250 千
1996 年 12 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1 - 5000
ISBN 7 - 81037 - 296 - 3/G·129(课)　定价:11.00 元

总　　序

长期以来，江苏省高等院校体育教育专业由于缺乏适用的配套教材，教学的规范化、系统化和人才培养质量的提高受到了一定的影响。

江苏省教委为了推动体育教育专业的教育改革，充分发挥本省在体育师范教育方面的人才优势，促进体育教育专业的教材建设，于1995年成立了“江苏省普通高等学校体育教育专业教学指导委员会”。

在江苏省教委体卫处的直接领导下，经过将近两年的努力，我们终于完成了《人体解剖学》、《人体生理学》、《体育保健学》、《学校体育学》、《运动心理学》、《体育测量与评价》、《田径》、《篮球》、《排球》、《足球》、《武术》和《体操》等12门课程的教材编写工作。

这套教材是按照国家教委关于二年制体育教育专业专科教学计划与大纲的要求，并参照国家教委体育卫生司关于“普通高等学校本科体育教育专业十一门课程基本要求”编写的。从培养目标出发，联系教学实际，吸取已有教材的优点和体育科学的新成果是这套教材的主要特点。为了确保教材编写的质量，编写组采用主编负责制、分工编写和审阅分离的原则，力求新编的教材思想观点正确，科学性强，密切联系体育专业和中学实际，融知识性、科学性和实践性为一体。

这套教材的编写工作，得到了国内同行专家、教授的大力支持。王祖俊、华明、李震中、孙煜明、邵纪森、陈骏良、周土枋、林锡乾、张义盛、范德泓、浦民欣、袁贤群等教授（以姓氏笔划为序）参加了教材审阅工作，在此表示衷心的感谢！

这套教材的编写还得到了苏州大学、南京师范大学、扬州大学、徐州师范大学、南京体育学院、盐城师专、南通师专、淮阴师专等单位领导的关心与支持。教材的出版又得到了苏州大学出版社的热情支持。在此一并表示感谢。

我们计划这套教材出版以后，先经试用，再作补充和修订，最后请全国高校体育教学指导委员会组织同行专家、学者审定，推广应用。

编写教材是一项艰巨的工程，由于时间仓促，经验不足，缺点与错误在所难免，恳请读者及同行批评指正。

江苏省普通高等学校体育教育专业
教学指导委员会
1996年3月

编 写 说 明

《体育测量与评价》是一门新兴的应用学科，并已列入高等师范院校体育教育专业的教学计划，为体育系本、专科学生的主要课程之一。尽管目前国内已有多种版本的体育测量与评价的著作和教材，但将统计内容系统纳入体育测量与评价教材体系，尚属尝试。

本书系统介绍了体育测量和评价的基础理论、基本知识和常用方法。考虑到数理统计是体育测量和评价中不可缺少的工具，本书第二、三章重点介绍体育统计基本知识和常用体育统计方法，以体现教材的完整性。其它各章主要介绍测量与评价的理论知识，和学校体育中常用的人体形态、机能、身体素质、营养及身体成份以及体育知识的测量与评价的方法，并附有各项测量(验)指标的评价标准，以供教学中参考。在教材编写过程中，编写组结合我省中学体育教学和训练实际，吸收国内外体育测量和体质研究的成果，突出了教材的科学性、师范性和实用性，力求形成新教材独立而完整的学科体系。

《体育测量与评价》一书，适合高等师范院校体育系本科和专科学生使用，也可供广大体育教师、教练员、科研人员和其它体育工作者学习参考。

参加本书编写的人员(按编写章节为序)有：李佑文(第一、九章)，柳方祥(第二章)，柏人哲(第三章)，仇建生(第四章)，张世林(第五、十一章)，周兵(第六章)，王亚斌(第七章)，张钧(第八、十章)。初稿完成后，由李佑文对第一、四、五、六、七、八、九、十和十一章进行了统稿，柏人哲对第二、三章进行了统稿，最后由李佑文对全书作了串编和定稿。

本书承蒙华南师范大学陈骏良教授审阅，并提出了宝贵的修改意见，在此致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，尤其对如何将体育统计和测量两部分内容，有机地结合在一起缺乏经验，故难免有不尽如人意的地方，或出现错漏之处，恳请读者批评指正。

《体育测量与评价》编写组

1996 **年** 6 **月**

目　　录

第一章 绪 论

第一节 体育测量与评价概述

一、体育测量与评价的概念

体育测量与评价是用科学的方法和手段，对体育范畴内的人体各种属性（形态、机能、素质、运动能力、智力、运动技能等）及有关因素的特征，进行数量描述和价值判断的一门应用学科。简单地说，体育测量与评价是研究体育教学、训练和竞赛中各种因素、属性和特征的测量与评价的理论与方法问题的一门应用学科。

学校体育中各种信息的产生、反馈，都需要体育教师去收集、处理和评价，在这过程中，必然会涉及一系列的理论与方法问题，体育测量与评价正是适应体育科学发展的需要产生的一门新兴学科。

在学校体育工作中，作为教育对象的学生，其各种属性：形态、机能、身体素质、运动能力、接受能力、健康状况及心理因素等，通过测量都可以获得定量化数据，为评价提供依据。

体育测量与评价属于方法学范畴。科学而有效地测量与评价人体的各种属性及有关因素，是检查体育教学和训练效果，主动调控体育过程，进而研究其规律的必不可少的手段。

二、体育测量与评价的学科基础

体育测量与评价跟教育测量学、心理测量学、解剖学、运动生理学以及各项运动的技术和理论等学科有极其密切的关系。

体育测量学是教育测量学的一个分支，它的基本原理和方法来源于教育测量学和人体测量学。

在体育测量与评价过程中，均要使用统计知识。从测量、统计和评价三者之间的关系来看，测量是前提，是基础；统计是手段，是方法；评价是目的，是结果。

通过测量获得的大量数据（信息），只有通过正确统计方法的处理，才能得出有价值的结果，并作出准确的评价。由此可见，统计学知识对测量和评价工作是十分重要的。

随着现代科学技术的发展，体育测量与评价也已进入一个新的发展阶段，其最明显的标志是，电子计算机已成为体育测量与评价研究中不可缺少的工具。随着电子计算机技术的广泛应用以及各种先进统计方法的出现，体育测量与评价这门新兴学科必将得到迅速的发展。

第二节 体育测量与评价的目的任务和作用

一、体育测量与评价的目的任务

通过学习，全面认识和掌握测量与评价过程的规律，掌握它的基本理论和方法。在学校

体育中，通过测量获得的有关学生体质、健康水平和体育成绩的各种信息，有利于教师科学地指导学生进行合理的体育锻炼，改进体育教学和训练方法，提高教学训练质量和运动技术水平，有效地改善学校的体育工作，以达到增强学生体质，增进健康的目的。

同时，运用体育测量与评价的基本理论和方法，可以为建立适合我国国情的体育测量指标、方法和评价标准体系，以及为提高体育工作者的科学研究能力和水平服务。

二、体育测量与评价的作用

1．为修订体育教学大纲和国家体育锻炼标准提供依据

学校体育教学和训练中，通过对学生与体育有关的属性的测量，了解学生的生长发育、机能水平、身体素质和运动能力等信息，为确定体育教学的目标和任务，选择教学内容、教学方法、训练方法和手段以及制订国家体育锻炼标准评分表提供依据。

2．掌握学生体质和健康状况的基本信息

青少年儿童正处于生长发育阶段，他们的体质状况和健康水平，直接关系到我国下一世纪的发展目标能否顺利实现。国家通过定期的对学生进行体质和健康调研，可及时了解他们的生长发育状况、特点和规律，掌握他们的身体素质和运动能力发展水平，并能预测将来的发展趋势，为政府部门制定有关政策提供依据。

3．改善和调控体育教学训练过程

体育教学和训练过程中获得的反馈信息，使体育教师能及时了解学生在参加体育活动后身体素质、运动能力、技术、知识、判断能力、兴趣爱好、态度以及身体各器官系统的变化情况，这对正确选择教学内容，改进教学方法，因材施教以及加强学校的体育管理都是必不可少的。

4．激励学生体育锻炼的积极性

体育教学过程中测量所获得的反馈信息，使体育教师、家长、学生以及学校行政领导，都能及时了解学生的体质状况和体育成绩水平，正确评价学生经过一段时间努力所取得的进步程度以及存在的问题，激励学生不断地向新的目标努力，调动他们参加体育锻炼的积极性和自觉性。

5．为运动训练和选材提供科学依据

通过科学方法，采用高科技手段对学生的各种体育属性进行测量，可以帮助教师和教练员指导学生选择他们最擅长、最有发展前途的运动项目，并且可以预测他们将来取得成绩和获得成功的可能性，减少运动选材中的淘汰率，提高成功率，为各级运动队输送更多优秀的体育人才。

第三节　体育测量与评价发展概况

一、体育测量发展的历史沿革

体育测量与评价这门学科虽然只有一百多年的历史，但测量的起源可以追溯到远古时代。从最早的历史记载开始，在各个社会，人们都会想出并运用这样或那样的测验来决定被认为是重要因素的人类能力，例如粗略地测定力量、速度、耐力和技巧等。

涉及人体结构比例的测量，可以追溯到古代的印度，那时曾有一篇文章，将身体划分为48个部分，并解释了每个部分的结构比例。古埃及人也曾把人体划分为19个相等的片段。

古希腊和古罗马的雕塑家塑造人体模型时，曾企图表现人体完美的比例和创造不同的人体造型。

体育测量来源于教育测量，它是在人体测量的基础上发展起来的。在有组织的体育计划中实施人体测量，最早开始于1860年，英国人克罗姆威尔(Cromwell)研究了曼彻斯特市8～18岁学生的生长模型，发现11～14岁女孩在身高和体重上超过男孩。

从18世纪中叶开始，体育测量的发展经历了人体形态测量、肌肉力量测量、心血管机能测量、运动能力测量以及综合性标准化测量五个发展阶段。到本世纪60年代，以1964年成立的“国际体力测定标准化委员会”(ICPFR)为起点，体育测量已进入标准化、规范化的新的发展阶段。

二、国内外体育测量发展概况

美国是现代体育测量的发源地，早在1861年，希契科克(E. Hitchcook)在阿默斯特学院进行了精确的测量，并制定了年龄、身高、体重、胸围和上肢肌力的测定标准，后来，他又制定了50多个人体测量比例标准。在其后的一百多年中，美国在人体测量、力量测验、循环呼吸系统测验、运动能力测验、身体适应性测验和运动技能(巧)测验方面，研究和设计了用于体育测量的各种测量方案和方法，并建立了比较完善的体育测量与评价学科的理论和方法体系，如著名的哈佛台阶试验、一般运动能力测验和库珀测验等，已被世界各国广泛采用。值得一提的是，1974年美国通过了《巴克利修正案》，进一步促进了学校教育测量和体育测量的发展。

日本早在1898年就颁布了“中小学身体检查规程”，每年进行一次全国性的统一体力测定，将近一百年来，积累了完整而又系统的日本青少儿体育测量资料。1979年日本又开始实施“学校保健统计调查”。

苏联在开展“劳卫制”测验方面积累了丰富的经验，先后多次对测验项目和标准进行了修订，并在中小学体育教育大纲中，规定了新生入学测验的项目。1975年在莫斯科中央体育学院，首先开设了与体育测量与评价相类似的课程“运动计量学”。

解放前，我国仅有少数学者在学校体育中进行过一些学生身体形态、机能和运动能力的测验，在少数学校也曾开设过体育测验与统计课程。

新中国成立后，我国先后推行过“劳卫制”体育测验标准、“青少年体育锻炼标准”、“国家体育锻炼标准”。1990年又颁布了“国家体育锻炼标准施行办法”，同时，规定了测验项目和评分标准。

1979年和1985年，我国先后两次对全国几十万青少年和儿童，进行了大规模的体质健康调研，取得了丰硕的成果。在此基础上，建立了全国性的学生形态、机能和身体素质的评价标准。

体育测量与评价作为一门学科引入我国，还是在本世纪80年代初。1982年我国首次在广州举办了全国“体育测量与评价”学习班。1984年原教育部又将原定的“人体测定”正式更名为“体育测量学基础”。其后，国内有些体育院、校相继开设“体育测量与评价”课程。1988年，我国高师第一本体育测量与评价学科的统编教材《体育测量学基础》问世。同年，国家教

委颁发的《全国普通高等学校体育本科专业目录》中，将体育测量与评价列为体育教育专业的主要课程，即必修课。

复习思考题

1. 试述体育测量与评价的学科性质。
2. 体育测量与评价的目的任务和作用是什么？
3. 简述体育测量与评价的发展概况。

第二章　体育统计基本知识

体育统计是利用数理统计提供的理论和方法，研究体育领域中客观现象的数量特征以获得对体育现象的规律性认识的科学。它是体育测量和评价的强有力的分析工具。从学科要求来讲，体育统计是学习体育测量与评价的必不可少的基础知识，因此，我们根据教学大纲的要求，在本教材中，用两章的篇幅介绍体育统计的基本知识、基本概念，以及常用的统计分析方法。

第一节　概率与概率分布

概率论是体育统计的理论基础，为了便于理解和掌握体育统计的知识和方法，我们首先讲一讲概率论的基本概念和知识。

一、随机事件及其概率

（一）确定事件与随机事件

客观世界中存在着两类性质不同的现象。第一类：在一定条件下，其结果完全确定，称之为确定性现象。例如，在标准大气压下水加热到 100℃会沸腾；在没有外力作用或合外力为零的条件下，物体的运动状态不变；第二类：在一定条件下，其结果不可能完全预测到，或者其结果可能不止一个，我们称这类现象为随机现象。随机现象的结果是通过观察或实验得到的，事先不能预测其结果的试验称为随机试验。随机试验最简单而基本的结果，称为该试验的基本事件，基本事件的组合称为随机事件。例如，掷一枚质地均匀的骰子一次，可能出现 1 点，2 点，……6 点。这 6 个可能结果，每一个就是一个基本事件。而"掷一枚骰子，观察出现偶数点"就是一个随机事件，它由三个基本事件"出现 2 点"，"出现 4 点"，"出现 6 点"所构成。以后，我们用大写英文字母 A，B，C 等表示随机事件，简称事件。

在一次试验中，一定发生的事件，称为必然事件，记为 Ω。在一次试验中，一定不发生的事件，称为不可能事件，记为 Φ。

在事件的运算中，若事件 A 发生，则事件 B 不发生；反之，若事件 B 发生，则事件 A 不发生，则称事件 A 和 B 为互不相容事件。例如，从混合装有盾牌、宇宙牌、箭牌三种不同品牌乒乓球的袋中任取一只乒乓球，若事件 A＝"摸到的球是盾牌球"；事件 B＝"摸到的球是宇宙牌球"；事件 C＝"摸到的球是箭牌球"，则 A、B、C 两两互不相容。另外，若事件 A 和事件 B 有一个发生且仅有一个发生，则称事件 A 和 B 为对立事件。例如，下雨和不下雨，及格与不及格，"$a \geqslant b$"和"$a < b$"等等都是相互对立的事件。

（二）随机事件的概率

一般来说，一个事件在每次试验中可能发生也可能不发生，这是具有偶然性的。但在实践中我们也发现，不同的事件，其发生的可能性大小是不同的，有的事件发生的可能性大，有的事件发生的可能性小。就是说，事件发生的可能性大小是事件的一种确定的属性。例如，

一箱乒乓球中，若坏球较多，则随机地从中取出一只，得到坏球的可能性就大。反之，若箱中的好球较多，则随机地从中取出一只，得到坏球的可能性就小。研究随机事件，就是要研究随机事件发生的可能性大小。将这种可能性用一个数值表示，称此数值为随机事件的概率，通常用符号 $P(A)$，$P(B)$，……来表示。

如何计算事件的概率呢？这里我们介绍两种概型的计算方法。

1．古典概型　古典概型有以下几个特点：

（1）一次试验只有有限个可能结果 $A_1, A_2 \cdots A_n$。

（2）基本事件 $A_1, A_2 \cdots A_n$ 的发生是等可能的。

（3）$A_1, A_2 \cdots A_n$ 是互不相容的。

在这种概型中，设事件 A 含有 k 个基本事件，则 A 的概率是：

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含基本事件数 }k}{\text{基本事件总数 }n}$$

例 2.1　口袋里有 3 个新乒乓球，2 个旧乒乓球，从口袋中任取一球，所取的球为旧球的概率。

$P(\text{“所取的球为旧球”})=\frac{k}{n}=\frac{2}{5}$

然而在许多实验中，难以保证试验的结果都是等可能的，或者总体的情况不清楚，即 k 和 n 的数值不知道，如何得到事件发生的概率呢？

2．统计概型　若在相同条件下，重复做 n 次试验，设事件 A 在 n 次试验中出现了 m 次，当 n 充分大时，事件 A 出现的频率 $f=\frac{m}{n}$ 逼近于一个极限值 p，则称 p 为事件 A 的概率，即：

$$P(A)=p$$

例 2.2　在抛掷硬币的实验中，设 A 表示“掷一次硬币正面朝上”这件事，且设在 n 次试验中 A 发生了 m 次。即设掷 n 次硬币有 m 次正面朝上，若掷了 10 次、8 次，或一、两百次，频率 $\frac{m}{n}$ 的值并不稳定，但随着试验次数增加，频率 $\frac{m}{n}$ 值将趋于稳定值 0.5，从而有

$$P(A)=0.5$$

3．事件的独立性　如果事件 A 发生与不发生都不影响事件 B 发生的概率，同样，事件 B 发生与不发生都不影响事件 A 发生的概率，则称 A 和 B 是相互独立的。

例如，一口袋中装有 5 只乒乓球，3 只新球，2 只旧球，令从中任摸两次，每次摸一只球。设事件 A＝“第一次摸到新球”，B＝“第二次摸到新球”。考察事件 B 发生的概率。

这里有两种情况：

（1）不重复抽样，即不放回抽样。第一次摸后，记下是新球还是旧球，不将球放回口袋。此时，$P(B)$ 依赖于事件 A 是否发生，若 A 发生，则 $P(B)=\frac{2}{4}$；若 A 不发生，则 $P(B)=\frac{3}{4}$。

（2）重复抽样，又叫放回抽样。第一次摸后，记下新旧，再放回口袋混匀，摸第二次，此时，$P(B)$ 不受 A 发生与否的影响，即 $P(B)=\frac{3}{5}$，亦即 A、B 独立。

4．概率的性质

（1）对于任何事件 A，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$。

（2）必然事件的概率等于 1，不可能事件的概率等于 0。

(3) 如果事件 A 与 B 为互不相容事件，则事件 A 和 B 至少有一个发生的概率，即 $A+B$ 的概率等于事件 A 的概率加上事件 B 的概率，亦即

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{2.1}$$

这就是概率的可加性。$P(A+B)$是指事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的概率。

(4) 如果事件 A 与事件 B 是相互独立的，则事件 A 与事件 B 同时发生的概率，即 $A\times B$ 的概率等于两个事件概率的乘积，即：

$$P(A\times B)=P(A)\times P(B) \tag{2.2}$$

这就是概率的可乘性。

例 2.3　有 10 名运动员组成一个代表队，其中短跑 3 名，跳高 2 名，跳远一名，标枪 2 名，铁饼 2 名，若从这 10 名运动员中任选一名，问这名运动员是投掷选手的概率为多少？

解：令 A=标枪选手，B=铁饼选手，可知：$P(A)=\dfrac{2}{10}$，$P(B)=\dfrac{2}{10}$。

选出一名运动员，A 和 B 不可能同时出现，所以 A 和 B 互不相容，则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{10}+\frac{2}{10}=0.4。$$

例 2.4　某省 1995 年报考体育专业的考生，70%过文化考试线，85%过体育加试线。若从这批考生中任选一名考生，试问该考生文化、体育双过线的概率是多少？

解：设事件 A=“该考生文化过线”

　事件 B=“该考生体育加试过线”，则有

$$P(A)=0.7 \qquad P(B)=0.85$$

考生文化、体育加试双过线的概率为

$$P(A\times B)=P(A)\times P(B)=0.7\times 0.85=0.595$$

二、随机变量与分布

(一) 随机变量

在前面所举的例子中，有些随机事件可以直接用数值表示。例如，我们从装有 3 个新球和 2 个旧球的袋中任取 2 个球，观察所取的 2 个球中含有旧球的个数。结果可以取 0，1，或 2 三个值。每一次试验结果取得 1 个数值，试验结果不同，所取的数值也不同，因此，我们可以用一个变量 X 来表示该试验的结果。例如，当 $X=1$ 时，表明“所取的 2 个球中含有 1 个旧球”这一事件。如此，X 可能取 0，1 和 2 三个值，表示三个不同的事件。我们把这种取值依赖于随机试验结果的变量，称为随机变量，一般用 X、Y、Z……，来表示。

另外，有些试验结果，不对应任何数值。例如，定点投篮一次，可能有两种结果，投中与投不中。为了便于研究，我们可以将其量化，用一变量 X 表示其结果：当投中时，X 取值为 1；投不中时，X 取值为 0。

在体育统计中，一般只考察两类随机变量，即离散型随机变量和连续型随机变量。取值为有限个或虽不为有限个但可以一一列举出来，这样的随机变量称为离散型随机变量。例如脉博、仰卧起坐次数等。连续型随机变量所有可能取的值连续地充满某一区间。例如，人的身高、体重及各项田径成绩等都是连续型随机变量。

(二) 随机变量的分布

研究随机变量，不但要知道它可能取哪些值，更重要的是要知道它取这些值的可能性多

大。随机变量取某个值的可能性大小称为随机变量取该值的概率。随机变量的取值及取值的概率构成了随机变量的分布。

1. 离散型随机变量的概率分布

设 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 是随机变量 X 可能取的值，$P(x_1), P(x_2), \cdots\cdots P(x_n)$ 是取对应值的概率，则离散型随机变量的概率分布可用下面的表格表示：

X	x_1	x_2	……	x_n
P	p_1	p_2	……	p_n

此表格称为随机变量的分布列。

例 2.5　抛硬币

如前所述，该试验的结果用随机变量 X 表示，徽面朝上取值为 0，值面朝上取值为 1，则 X 的概率分布可用分布列表示为：

X	0	1
P	0.5	0.5

例 2.6　掷两颗骰子

掷出的点数用变量 X 表示，掷出各点数的概率用 P 表示，则有分布列：

X	2	3	……	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	……	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

由概率的基本性质可知，离散型随机变量的分布列须满足下面两点：

(i) X 取任何值时，其概率非负，即：

$$P(x=x_i)=p_i \geqslant 0 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots n)$$

(ii) X 遍取所有可能值，诸概率之和等于 1，即：

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$

常见的离散型随机变量分布有 0—1 分布及二项分布。

(1) 0—1 分布

如果随机变量 X 只取两个值 0 和 1，且 $P(X=0)=p, P(X=1)=q, p+q=1$，则称 X 服从 0—1 分布，或叫两点分布。其分布列为：

X	0	1
P	p	q

例 2.5　就是 0—1 分布的例子。

(2) 二项分布

研究这样一种实验，每次试验只有两种可能的结果：成功与失败。假设成功的概率为 p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$，失败的概率为 $q=1-p$。在一组不变的条件下重复做 n 次试验，观察其成功的次数。称这种实验为 n 次独立试验序列。

对于独立试验，各次试验的成功与否是两两互不相干的。根据独立事件概率的可乘性，式(2.2)，做两次试验两次皆成功的概率为 $p \cdot p$，两次皆失败的概率为 $q \cdot q$。而一次成功一次失败的概率有两种情况，即第一次成功第二次失败和第一次失败第二次成功，概率分别为 $p \cdot q$ 和 $q \cdot p$，都可以写成 p^1q^{2-1}。合起来，做两次试验一次成功一次失败的概率就应该是两种情况的概率之和，即：

$$\begin{aligned} P(\text{“两次试验一次成功”}) &= p \cdot q + q \cdot p \\ &= 2 \times p^1 q^{2-1} \end{aligned}$$

继而，求做三次试验两次成功的概率。若用 A 表示成功，B 表示失败，就会出现三种情况：AAB，ABA，BAA，概率分别为 ppq，pqp，和 qpp，都可以写成 p^2q^{3-2}。三种情况的概率即为它们的概率之和。也就是说，三次试验两次成功的概率为：

$$\begin{aligned} P(\text{“三次试验两次成功”}) &= P(AAB) + P(ABA) + P(BAA) \\ &= p^2q^{3-2} + p^2q^{3-2} + p^2q^{3-2} \\ &= 3p^2q^{3-2}。\end{aligned}$$

系数 3 正是从 3 个元素中取 2 个的组合数，即 $3 = C_3^2$。

推而广之，做 n 次独立试验，成功 k 次的概率当由下式给出：

$$P_k = P(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{2.3}$$

其中，成功的次数是一个随机变量，用 X 表示。

(2.3) 式正是二项式 $(p+q)^n$ 的展开式中的第 $k+1$ 项，即有：

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1$$

所以，这种分布被称为二项分布。式中的 n 和 p 为二项分布的参数。随机变量 X 服从二项分布常可表示为

$$X \sim B(n, p)$$

二项分布在以下条件下成立：

(*i*) 实验仅有两个对立结果，概率分别为 p 和 q，且 $p+q=1$。

(*ii*) 每次试验独立。

例 2.7　某射手，射击一次中靶概率为 0.96，求射击 5 次命中 3 次的概率。

由题意知，$p=0.96$，　　$q=0.04$。

则　$$\begin{aligned} P_3 &= P(X=3) = C_5^3 p^3 q^2 \\ &= 0.0142 \end{aligned}$$

2. 正态分布

对于在某一区间 $[a,b]$ 内连续取值的随机变量 X，如身高，体重，田径成绩等，求 X 取某一个值的概率是无意义的。我们关心的是 X 在区间 $[a,b]$ 内取值的概率，即 $a \leqslant x \leqslant b$ 的概率。

(1) 概率密度函数

一般说来，如果存在一个非负的可积函数 $f(x)$，使得：

$$P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{2.4}$$

则称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数，称

$$F(X) = P(X \leqslant x) \tag{2.5}$$

为 X 的分节函数。如此，则有：

$$P(a \leqslant X \leqslant b)=\int_a^b f(x)dx$$

$$=F(b)-F(a) \quad (2.6)$$

这就是说，X 落在区间$[a,b]$上的概率等于密度函数在区间$[a,b]$上的积分或曲线 $f(x)$在$[a,b]$上的曲边梯形的面积，如图 2-1。

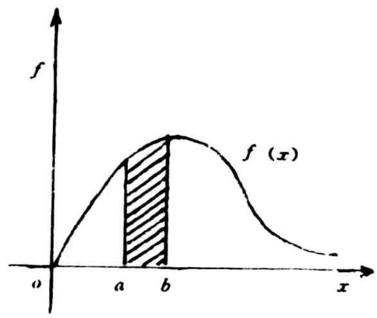

图 2-1 概率密度函数

$f(x)$的特性：

(i) 非负，其图形在 X 轴上方。

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$，即由曲线 $f(x)$ 与 X 轴所围的面积等于 1。

(2) 正态分布

如果随机变量 X 有如下形式的密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.7)$$

其中，μ、σ 都是常数，且 $\sigma>0$，$-\infty<X<\infty$，则称 X 服从参数为 μ,σ^2 的正态分布，记为：

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

图 2-2 给出了正态分布的密度函数曲线。

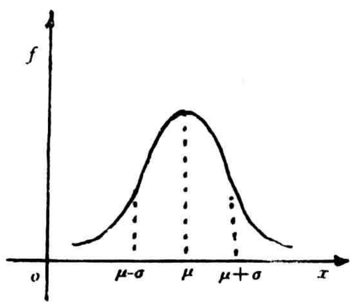

图 2-2 正态分布的密度函数

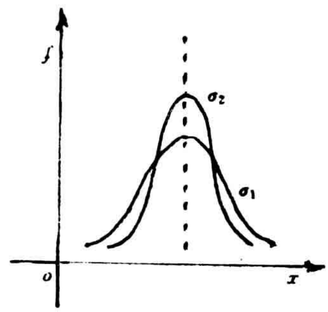

图 2-3 正态分布的性质

正态分布具有以下性质：

(i) 曲线呈钟形，单峰，在 $x=\mu$ 处取最大值$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$。

(ii) 图形位于 X 轴上方，以 $x=\mu$ 为对称轴，在 $\mu\pm\sigma$ 处有拐点，并以 X 轴为渐近线。

(iii) 曲线与 X 轴所围的面积为 1。

(iv) σ 越大，曲线越平缓；σ 越小，曲线越陡峭，如图 2-3 所示。

显然，对于正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X 落在区间$[a,b]$上的概率即是定积分

$$P(a \leqslant X \leqslant b)=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \quad (2.8)$$

(3) 标准正态分布

当 $\mu=0,\sigma=1$ 时的正态分布 $N(0,1)$称为标准正态分布，其密度函数为：

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$$