

布尔代数及其在
计算机设计中的应用

布尔代数及其在 计算机设计中的应用



上海纺织工学院
1979.3.

说 明

为使电子计算机技术普及应用于我国的纺织工业，根据教学工作的需要，利用寒假匆忙编写了此本讲义，由于水平有限，时间匆促，故未能系统地编选，脱节现象尚为严重，敬请读者指正为盼，若本讲义能为读者以后进一步钻研有所帮助，则本人也深为之欣慰。

编 者

一九七九、二、

目 录

第一章	布尔函数的基本概念
§ 1	逻辑变号
§ 2	基本逻辑运标
§ 3	逻辑函数
§ 4	几个特殊函数
§ 5	组合函数
第二章	布尔函数的基本公式、规则及常用公式
§ 1	基本公式
§ 2	关于等式的若干规则
§ 3	布尔代数的常用公式
第三章	布尔代数与命题逻辑
§ 1	命题
§ 2	集合
第四章	运标
§ 1	并、交、补
§ 2	蕴含
§ 3	布尔差、禁止、集合差
§ 4	等值、等价、全等
§ 5	异值、异价、异等
§ 6	Peirce 函数
§ 7	Sheffer 函数
第五章	基本运标组
第六章	永真命题和永假命题
第七章	代入规则和推理规则
第八章	逻辑问题的描述与逻辑网络的建立
§ 1	逻辑表达式的建立
§ 2	从逻辑图列出逻辑表达式

第九章	布尔函数的标准形式和展开式	
§ 1	最小项和最大项	
§ 2	函数的展开	
第十章	布尔函数的代数化简法	
第十一章	文氏图化简法	
§ 1	文氏图的基本概念	
§ 2	用文氏图表示基本逻辑运算	
§ 3	三元文氏图	
§ 4	文氏图的应用——化简逻辑表达式及其缺陷	
第十二章	卡诺图化简法	57
§ 1	最小项的概念	57
§ 2	卡诺图的一般画法	57
§ 3	新卡诺图画法	65
§ 4	逻辑函数的卡诺图化简	68
第十三章	奎因—麦克鲁斯基法	79
第十四章	布尔矩阵	84
§ 1	布尔矩阵的基本概念	84
§ 2	布尔函数的矩阵表示	86
第十五章	应用举例	92

布尔代数及其在计算机设计中的应用 (一)

第一章 布尔函数的基本概念

电子计算机，由于具有快速可信，信息存储量大，正在被人们普遍引起重视，自从1945年第一台计算机问世以来，迄今有了突飞猛进的发展，尤其是计算机技术的不断深入广泛应用于军事工业、民用上，更显得其价值的必要。神秘的机口，并不神秘。一台计算机的设计，无非是系统设计、逻辑设计、工程设计、工艺设计，工程调试。在此我们关心的乃是逻辑设计。布尔代数则是逻辑代数的工具。

英国数学家乔治·布尔 (George Boole 1815-1864) 提出了描述思维的逻辑数学，研究了所谓“不是真便是假”的语句，于1854年发表“思维定律的研究”一文，叙述了用于逻辑问题的符号标记法和处理符号语句的数学，1938年贝尔实验室的克劳德·香农 (Claude Shannon) 利用布尔代数分析了开关网路，从而使之成为一种特别适用于描述开关线路及选取最佳设计方案的数学工具。

§ 1. 逻辑变量

逻辑变量与普通代数的变量一样，也用字母表示，但其值仅取“0”或“1”在二个变号值之间转换，可以逻辑代数十分简单。

而且“0”“1”取值对应于自然界的开关的通断；灯亮或灯灭，状态的有无，这种稳定的状态决定了二进制代数系统在设计控制线路和计算机开关线路中的优选和特殊地位，其优点归纳为如下三关。

(1) 逻辑代数能相当完美地反映开关线路的实现。

(2) 运用逻辑代数对开关线路进行描述分析变换，判断它设计是否完善，线路是否最简，形式是否合理。

(3) 反之，为实现某逻辑功能也可用布尔代数对所给定的原始逻辑函数用适当方法作相应变换，以完成独立单元（基本线路）表示，以便直接用相应元件来实现。

§ 2 基本逻辑运算

任何复杂的开关线路一般是由最基本的开关元件通过三种最基本的关系所组成，这种联系反映在数学上就是三种基本逻辑运算。

(1) 逻辑“或”

任意二个逻辑变量 A 、 B ，其逻辑“或”运算规则必须符合如表 1-1 所示，记作 $F = A + B$ （亦写作 $F = A \vee B$ ）

表 1-1 或运算真值表

A	B	$F = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

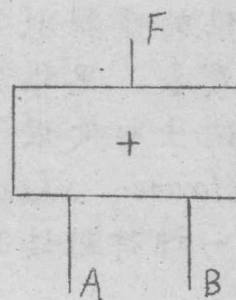


图 1-1 或运算示意图

相应逻辑电路中用“或门”实现此种逻辑关系，其符号如图 1-1 所示，输入端有二个逻辑变量输入，只要有一个为“1”则 F 为“1”同理可推广到有 n 个变量输入，只要有一个输入变量为“1”则输出为“1”。

对 n 个逻辑变量的逻辑函数的逻辑“或”关系为：

$$F = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

(2) 逻辑“与”

任意二个逻辑变量 A 、 B ，其逻辑“与”的运算规则必须符合如表 1-2 所示，记作 $F = A \cdot B$ （亦 $F = A \wedge B$ ）

相应逻辑电路的“与门”其符号如表 1-2 所示，仅当

二个输入同时为1时，F才为1。同理可推广到n个变量输入，只有当所有个输入同时为“1”时F才会为“1”反之F等于0，对几个逻辑变量逻辑函数的逻辑“与”关系为：

$$F = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$$

表1-2 与运算真值表

A	B	$F = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

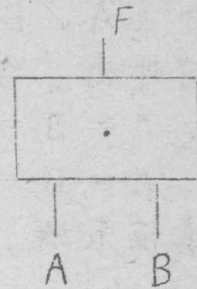


图1-2 与运算示意图

3. 逻辑“非”

对任意一个逻辑变量A，其“非”运算规则如表1-3所示。称 $\bar{A}$ 为对A进行的“非”运算，记作 $F = \bar{A}$ ，逻辑电路中的反相器，就反映了这种逻辑关系。

表1-3 非运算真值表

A	$F = \bar{A}$
0	1
1	0

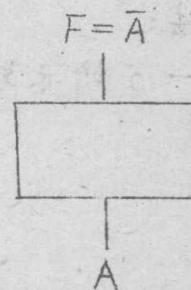


图1-3 非运算示意图

§ 3. 逻辑函数

(1) 定义：设 $F = F(x_1 \cdots x_n, \cdot, +, -, 0, 1)$ 仅当 $(x_1, \cdots, x_n, \cdot, +, -, 0, 1)$ 唯一确定时，F也唯一确定则称F为 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数，它们的这种关系为逻辑函数关系或称布尔关系，此式又称为布尔关系式。

由于逻辑变量取值仅“0”，“1”所以有限个(n)变量的集合 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可构成 2^n 个数码组合，而逻辑函数F的值也

相应取“0”“1”。

(2) 逻辑函数关系表示方式。

楼梯路灯，通常设上下两只开关，线路如图 1-4 所示。此逻辑函数关系可用多种方式描述：

① 文字描述：

当开关 A、B 同时向上，或同时向下时，灯便亮，否则灯不亮。

$$\left. \begin{array}{l} \text{即 } A = B = 1 \\ \text{或 } A = B = 0 \end{array} \right\} F = 1$$

② 真值表法，如表 1-4 所示

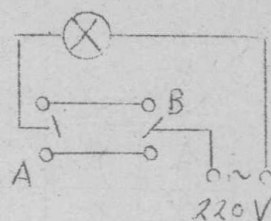


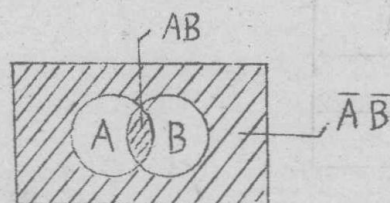
图 1-4

表 1-4

A	B	$F = A \oplus B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

③ 图示法：

如图 1-5 所示划斜线为灯亮



④ 数学表达式

$$F = AB + \bar{A}\bar{B}$$

(3) 逻辑“函数的”等值

设 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为一组逻辑变量， $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 、 $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的逻辑函数，如对应于 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 任一取值 F 与 G 值都相同，则称 F 和 G 是等值的，或者说 F 和 G “相等”记作 $F = G$ ，显然它们有相同的真值表。因此同一函数关系，可有许多个相同的表达式，这就给人们带来了逻辑化简与变换的问题。

例：

$$F = A \cdot (B + C)$$

$$G = A \cdot B + A \cdot C$$

求证 $F = G$ 。

证明：根据函数定义，函数相等，要求它们任何组取值， F 与 G 值完全相等，现列出真值表，即将它们可能的取值全部列出，并比较之，可见各组值完全相同。见表 1-5。

$$\therefore F = G$$

表 1-5 F/G 函数真值表

A	B	C	$F = A \cdot (B + C)$	$G = AB + AC$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

§ 4 · 几个特殊函数

除上述三个基本函数外，下面六个函数（特别是前四个函数）也是常用的，在下面，我们可以看到它们很容易由逻辑集成电路实现。

1. “与非”函数 (YF)

个变量先与后非运算

$$F(A, B) = \overline{A \cdot B} \quad (= \overline{A \wedge B})$$

2 个输入号 (A, B) 不同时为 1 时，输出 F 总为 1 显然“YF”与“”相反，如表 1-6 所示。

推广：对几个输入的“YF”函数

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = \overline{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_n}$$

“或非”函数 (HF)

个变量先进行或运算，然后进行非运算。

表 1-6 YF 函数真值表

A	B	$F = \overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F(A, B) = \overline{A + B}$$

其真值表如表 1-7

仅当两个输入同时为 0 时，输出才为“1”，它与“或”相反。

推广：对几个输入变量的“或非”函数

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = \overline{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

(3) “异或”函数 (半加)

这种函数是布尔函数所特有的，为 2 进制加法，而不取进位。

$$F(A, B) = A \oplus B = A\bar{B} + \bar{A}B$$

当并且仅当 A 或 B 为 1，
(可能同时为 1) 时输出才为 1，
其真值表如表 1-8 所示。

(4) 符合函数

$$F(A, B) = A \oplus B = A \odot B$$

当两个输入具有相同值时，
输出为“1”，即两个输入相符合，
“符合”与“异或”是相矛盾的
的一对函数，其真值表见表 1-9 所示。

(5) 隐含函数

$$F(A, B) = \bar{A} + B$$

如 $F = 1$ ，称 A 隐含 B，
记作 $A \leq B$ ，此关系可用不等式表示。

$A \leq B$ 其意思是：

如 $B = 0$ ，则 $A = 0$

如 $B = 1$ ，则 $A = 1$

或 $A = 0$ ，其真值表见表 1-10 所示。

(6) 阈值函数

$$F(A, B, C) = AB + BC + CA$$

表 1-7 HF 函数真值表

A	B	$F = \bar{A} + \bar{B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

表 1-8 异或函数表

A	B	$F = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 1-9 符合函数表

A	B	$F = A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 1-10 隐含函数表

A	B	$F = \bar{A} + B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

当3个输入变量中至少有2个等于1时，则 $F=1$ 记作：

$$F(ABC) = M a \uparrow (ABC)$$

其真值表如表1-11所示

表 1-11 阈值函数表

A	B	C	$F = AB + BC + CA$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

§ 5. 组合函数

2个或多个函数所组合，成为一个复合函数
例

$$X(A, B) = A \oplus B$$

$$Y(C, D) = C + D$$

$$Z(E, F) = EF$$

$$\text{则 } Z(X(A, B), Y(C, D)) = Z(A, B, C, D) = (A \oplus B)(C + D)$$

为了求此组合函数值，只要象普通代数那样将自变量值代入即可，但布尔代数中自变量取值仅“0”，“1”。此外，布尔代数也有与普通代数的“先乘除后加减”相类似的优先规则：

- (1) “非”算符加在表达式上时，是对整个表达式作非运算，
- (2) 求括号内的表达式，先内层而容外层，按下列次序进行：

行：

a) 先从左到右求“非”的值。

b) 然后从左到右求组成“与”对的值（相当于乘）

c) 再从左到右求组成“或”对的值。（相当于加）

(3) 把从括号内表达式得到的值代入余下的表达式中，再按同样的次序求值。即先“非”再“与”最后“或”。

例1，求 $F = (AB + \overline{BC})D + A\overline{B} + \overline{CD}$

$$\text{当 } A=1, B=1, C=0, D=1$$

$$\begin{aligned}\text{解: } F &= (AB + \overline{BC})D + \overline{A\overline{B} + \overline{CD}} \\ &= (1 \cdot 1 + \overline{1 \cdot 0}) \cdot 1 + \overline{1 \cdot \overline{1} + 0 \cdot 1} \\ &= (1 + 0) \cdot 1 + \overline{0 + 1} \\ &= 1 + 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

(待后面讲到布尔代数的基本公式后先化简再代入, 则是一件十分简单的事).

$$\text{例 2 求 } F = AC + B\overline{C}\overline{D} + (\overline{A}\overline{B} + BC)D$$

$$\text{其中 } A=B=1, \quad C=D=0$$

$$\begin{aligned}\text{解: } F &= AC + B\overline{C}\overline{D} + (\overline{A}\overline{B} + BC)D \\ &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot (0 \cdot 1) + (1 \cdot 0 + 1 \cdot 0) \cdot 0 \\ &= 0 + 1 + 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

第二章 布尔代数的基本公式、规则及常用公式

§ 1. 基本公式

布尔代数与初等代数有许多相同处，也有很大差别。

(1) 关于变号及带号关系的公式。

$$A + 0 = A \quad A \cdot 0 = 0$$

$$A + 1 = 1 \quad A \cdot 1 = A$$

$$A + A = 1 \quad A \cdot A = A$$

(2) 满足交换律，结合律，分配律。

$$\left. \begin{aligned} A + B &= B + A \\ A \cdot B &= B \cdot A \end{aligned} \right\} \text{ (交换律)}$$

$$\left. \begin{aligned} (A + B) + C &= A + (B + C) \\ A(B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C \end{aligned} \right\} \text{ (结合律)}$$

$$A + BC = (A + B)(A + C) \quad \text{(加时乘分配律)}$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{(乘时加分配律)}$$

(3) 布尔代数的一些特殊规律：

$$\left. \begin{aligned} A + A &= A \\ A \cdot A &= A \end{aligned} \right\} \text{ (重叠律)}$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{A + B} &= \overline{A} \cdot \overline{B} \\ \overline{A \cdot B} &= \overline{A} + \overline{B} \end{aligned} \right\} \text{ (反演律) (亦称摩根定律)}$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A + AB = A \quad \text{(吸收律)}$$

上述等式，可用真值表直接记出，这里对其中几个关系不太明确的等式给予证明：

求证: $A + BC = (A+B)(A+C)$

证明: $\because (A+B)(A+C) = AA + AB + AC + BC$

$$= A + AC + AB + BC \quad \because AA = A$$

$$= A + AB + BC \quad \because A + AC = A$$

$$= A + BC \quad \because A + AB = A$$

对于摩根定律 $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ 及 $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ 用真值表来进行求证:

表2-1 摩根定律真值表

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

摩根定律是布尔代数中特有的, 也即是一般代数中没有的。

求证: $A + AB = A$

证明: $A + AB = A \cdot (1+B) = A \cdot 1 = A$

此公式表明: 如果一乘积项是另一乘积项的因子, 则包含这个因子的乘积项是多余的, (被前一项所“吸收”)

§ 2. 关于等式的若干规则

布尔代数有三个重要规则:

(1) 代入规则:

任有一个含有变数 A 的等式, 如果将所有出现 A 的位置都代之以一个逻辑函数 F , 则等式自然成立。

例 1. 已知 $A \cdot (B+C) = AB + AC$.

将所有出现“ C ”处代之以“ $C+D$ ”则等式仍成立:

$$\text{即 } A \cdot [B + (C+D)] = AB + A \cdot (C+D)$$

$$A[B + (C+D)] = AB + AC + AD$$

例 2. 已知 $A + \overline{A}B = A + B$ (此式相等的证明后而将叙述).

将所有出现“ A ”处全代之以“ AC ”, 则等式仍成立:

$$AC + \overline{AC}B = AC + B$$

代入规则的作用是可等式中的变数用任意函数代替, 从

而扩大等式应用范围

(2) 反演规则:

将等式 F 中的 “ $\cdot$ ” $\rightarrow$ “ $+$ ”, “ $+$ ” $\rightarrow$ “ $\cdot$ ”, “ 0 ” $\rightarrow$ “ 1 ”, “ 1 ” $\rightarrow$ “ 0 ”
 $A \rightarrow \bar{A}$, $\bar{A} \rightarrow A$ 则所得表达式为 $\bar{F}$ 。

例 $F = \bar{A} \cdot \bar{B} + C \cdot D$

利用反演规则可直接得到 $\bar{F} = (A+B) \cdot (\bar{C} + \bar{D})$, 同样利用笨拙的基本公式化简也可得到

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \overline{\bar{A} \cdot \bar{B} + C \cdot D} \\ &= \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}} \cdot \overline{C \cdot D} \\ &= (\bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}}) \cdot (\bar{C} + \bar{D}) \\ &= (A+B) \cdot (\bar{C} + \bar{D})\end{aligned}$$

例 $F = A+B+\bar{C}+D+\bar{E} = A+(B+\bar{C}+D+\bar{E})$

$$\bar{F} = \bar{A} \cdot (B+\bar{C}+D+\bar{E})$$

又可: $\bar{F} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} \cdot E$

注意运算符的优先顺序: 先括号 $\rightarrow$ 非 $\rightarrow$ 与 $\rightarrow$ 或。

(3) 对偶规则

设 F 为一个表达式, 如将 F 中可有 “ $+$ ” $\rightarrow$ “ $\cdot$ ”, “ $\cdot$ ” $\rightarrow$ “ $+$ ”, “ 1 ” $\rightarrow$ “ 0 ”, “ 0 ” $\rightarrow$ “ 1 ” 则可得新式 F' 就为 F 的对偶式

在 § 2-1-2 中我们熟知了布尔代数的基本公式, 其中

$$\left. \begin{aligned}x + y &= y + x \\ x \cdot y &= y \cdot x\end{aligned} \right\} \text{交换律}$$

$$\left. \begin{aligned}x + y + z &= x + (y + z) \\ x \cdot y \cdot z &= x \cdot (y \cdot z)\end{aligned} \right\} \text{结合律}$$

$$\left. \begin{aligned}x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ x + y \cdot z &= (x + y) \cdot (x + z)\end{aligned} \right\} \text{分配律}$$

仔细分析不难发现它们是成对地出现, 恰巧将原来的加号变为乘号, 原来的乘号变为加号, 变号不变, 这就为对偶公式。那么

$$\left. \begin{aligned}x + 1 &= 1 \\ x \cdot 0 &= 0\end{aligned} \right\} \text{则一定成立 (利用对偶公式)}$$

$$\text{例: } F = A \cdot (B + \bar{C})$$

$$F = A + B \cdot \bar{C}$$

$$F = A \cdot B + A \cdot (C + 0)$$

$$F = (A + \bar{B}) \cdot (A + C \cdot 1)$$

$$F = \overline{\overline{A + B + C}}$$

$$F = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$$

$$F' = A + (B \cdot \bar{C})$$

$$F' = A \cdot (B + \bar{C})$$

$$F' = (A + \bar{B}) \cdot (A + C \cdot 1)$$

$$F' = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$$

$$F' = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$$

$$F' = \overline{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}}$$

由上例可見， F 与 F' 是互为对偶式的。

有些对偶式是其自身。

$$F = \bar{A}$$

$$F' = \bar{A}$$

$$F = A$$

$$F' = A$$

通常 $F' \neq F$ ，但在特殊情況下， $F' = F$ 的。

$$\text{例: } F = A \bar{B} + C \bar{D}$$

$$F' = (A + \bar{B}) \cdot (C + \bar{D})$$

$$\bar{F} = (\bar{A} + B) \cdot (\bar{C} + D)$$

$$\left. \begin{array}{l} F' = (A + \bar{B}) \cdot (C + \bar{D}) \\ \bar{F} = (\bar{A} + B) \cdot (\bar{C} + D) \end{array} \right\} \therefore F' \neq \bar{F}$$

$$\text{例: } F = A \bar{B} + \bar{A} B$$

$$F' = (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B)$$

$$\bar{F} = (\bar{A} + B) \cdot (A + \bar{B})$$

$$\left. \begin{array}{l} F' = (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B) \\ \bar{F} = (\bar{A} + B) \cdot (A + \bar{B}) \end{array} \right\} F' = F$$

定理：如果 2 个布尔函数式 $F = G$ ，则它们的对偶式 $F' = G'$ 。

$$\text{例: 若 } A \cdot (B + C + D) = AB + AC + AD$$

$$\text{则 } A + (B \cdot C \cdot D) = (A + B)(A + C)(A + D)$$

§ 3. 布尔代数的常用公式

$$(1) \quad AB + A\bar{B} = A$$

$$\text{证明: } AB + A\bar{B} = A(B + \bar{B}) = A \cdot 1 = A.$$

$$(2) \quad A + AB = A$$

$$\text{证明: } A + AB = A \cdot (1 + B)$$

$$= A \cdot 1$$

$$= A$$

(说明：在一个“与或”式中，如果一乘积项是另外一乘积项的因子，则包含这个因子的乘积项是多余的。)