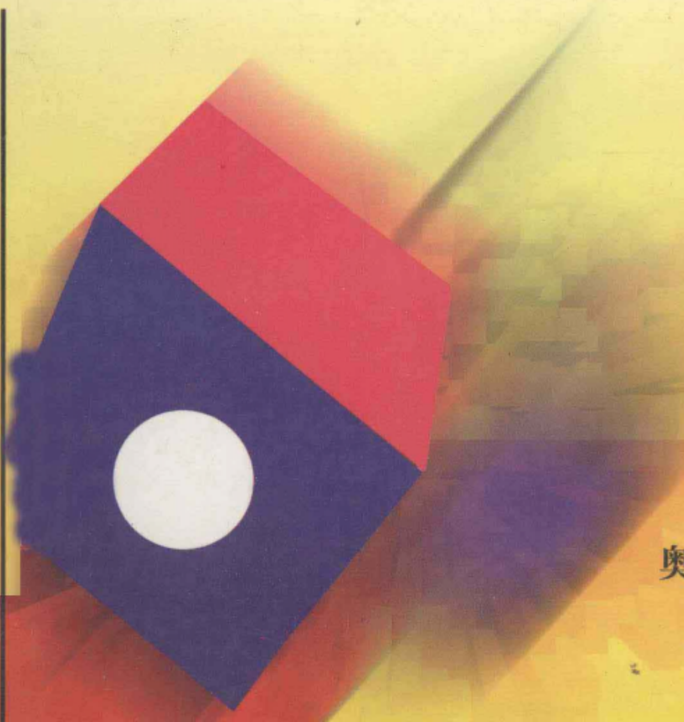
北京阶梯素质教育研究所
中小学学科奥林匹克编辑部 组编

奥林匹克典型题

一题多解

高中卷·数学



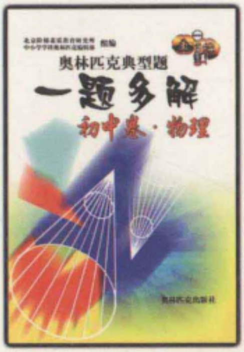
奥林匹克出版社

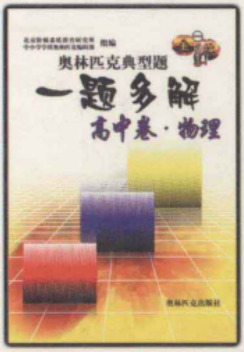
责任编辑：荷　风
封面设计：周春林

奥林匹克典型题一题多解

系列丛书

初中卷·物理





高中卷·物理

全套定价：55.00元

小学卷·数学

初中卷·数学

高中卷·数学

ISBN 7-80067-114-3
9 787800 671142 >

ISBN 7-80067-114-3/G·28

定价 11.00元

奥林匹克

典型题一题多解

（高中卷·数学）

主　编　项昭义　屠新民　陈　斌

编　委　尹建堂　王建设　叶正道
陈友文　袁有霞　张恩宏
刘德存　李素寅　武文潢

编　者　项昭义　屠新民　陈　斌
尹建堂　王建设　叶正道
陈友文　袁有霞　张恩宏
刘德存　李素寅　武文潢
李锦萍　栗加顺　丁连义

奥林匹克出版社

责任编辑：荷　风
封面设计：周春林

图书在版编目(C I P)数据

奥林匹克典型题一题多解·高中卷·数学/项昭义 主编.
—北京：奥林匹克出版社，2001.1
ISBN 7－80067－114－3

Ⅰ.数…　Ⅱ.项…　Ⅲ.课程—中小学—解题. Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 82750 号

奥林匹克出版社出版发行
(北京西城西外北滨河路 11 号)
邮政编码：100044
新　华　书　店　经　销
北京国防印刷厂印刷
*
850×1168 毫米　32 开本　10 印张　180 千字
2001 年 1 月第 1 版　2001 年 1 月第 1 次印刷
印数 1－5000
ISBN 7－80067－114－3/G·288
定价：　11.00 元

前　　言

这套书是在该学科基本题目基础上延伸发展出来的，它有两大特点。

一是典型题：数学练习题多如烟海，烟海之中不免使许多学生无所适从，我们从上千道数学竞赛试题中精选提炼出具有典型性的试题，按知识点分类成册。这样做的目的是给学生提供极富典型性的练习题，启发引导学生去举一返三、触类旁通、更好地掌握中小学数学的各项内容，跳出茫茫题海，以实现从应试教育向素质教育的转变。

二是一题多解：要想学好数学，首要的是要掌握数学解题的基本方法；数学解题的基本方法是相通的，小学数学解题的某些基本方法，初中数学也要用到，高中数学也要用到，后面更高层次的数学学习也要用到。数学典型题的一题多解是最能体现数学解题基本方法的。所谓一题多解，就是用不同的思维分析方法，多角度多途径地解答问题。因此，这一类练习题的解法极富技巧性、趣味性，有数学兴趣的学生可从中提高自己的数学素养，并得到美的享受；没有数学兴趣的学生可从中逐渐培养自己的数学兴趣。认真研读体味本书提供的各种解题技巧和方法，就会居高临下，对课堂数学教学产生极强的指导作用。

书中的失误和不足，敬请同行和读者斧正（信寄：河南省郑州市河南省实验中学，邮编 450002）。

作　者

目　　录

第一部分

1. 集合、映射与函数

1-1-1 集合 A、B 的并集 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$，当 $A\neq B$ 时，(A,B) 与 (B,A) 视为不同的对，则这样的 (A,B) 对的个数有 (　　)

(A)8　　(B)9

(C)26　　(D)27

(1993 年全国高中数学联赛试题)

【解法一】 若 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，则满足题意的 B 有：$B=\varnothing$；$\{a_1\}$；$\{a_2\}$；$\{a_3\}$；$\{a_1,a_2\}$；$\{a_1,a_3\}$；$\{a_2,a_3\}$；$\{a_1,a_2,a_3\}$，即这时的配对个数有：

$C_3^3\cdot(C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3)=8$

仿此，若 $A=\{a_1,a_2\}$（或 $\{a_1,a_3\}$，若 $\{a_2,a_3\}$），满足题意的 B 的个数，即配对个数有：

$C_3^2\cdot(C_2^0+C_2^1+C_2^2)=12.$

于是，全部配对个数有：

$C_3^3\cdot(C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3)+C_3^2\cdot(C_2^0+C_2^1+C_2^2)+C_3^1\cdot(C_1^0+C_1^1)+C_3^0\cdot(C_0^0)=27.$

故应选(D).

【解法二】 $A=B$ 且 $A\cup B=P$ 的情形只有 1 个配对：$A=P$ 且 $B=P$. 而 $A\neq B$ 的配对个数必是偶数. ∴全部配对个数为奇数.

又粗略计数后知，配对个数不少于 16.

可选(D).

【评注】 (1)本题涉及的知识点：并集，组合，计数，奇偶性.

(2)两种解法反映的是一种数学思想：配对思想. 解法一是分类讨论；解法二是估算法.

1-1-2 若 $M=\{(x,y)\mid |\mathrm{tg}\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是 ( )

(A)4 (B)5

(C)8 (D)9

(1993 年全国高中数学联赛试题)

【解法一】 由非负数的和为零的条件，得

$$\begin{cases}\mathrm{tg}\pi y=0\\ \sin\pi x=0\end{cases}$$

$$解得\begin{cases}x=k(k\in Z)\\ y=h(h\in Z)\end{cases}$$

即集合 M 为坐标平面上整点的全体.

又由 $x^2+y^2\leqslant 2=(\sqrt{2})^2$

得集合 N 为以原点为中心 $\sqrt{2}$ 为半径的闭圆内点所组成的点集.

画图表明，闭圆内部共有 9 个整点.

故应选(D).

【解法二】 (说明：本大题的解 2 为适应于选择题的不太严谨的解法).

可以看出，$M\cap N$ 即交集是关于两坐标轴对称的点集，且原点属于此交集，∴(A)、(C)不合.

分别统计坐标轴上，第 1 象限内，$M\cap N$ 中的点的个数，再

利用对称性得 $M\cap N$ 的元素个数为 $1+1\times4+1\times4=9$.

故选(D).

【评注】 (1)本题涉及的知识点:最简单的三角方程,圆域;非负数和为零的条件,交集,坐标平面上图形的对称性.

(2)解法二为验证法.

(3)本题可归属于题型:一个集合为离散点,另一个集合为闭或开区域,求其交集的点数.

1-1-3 已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$($a$、$b$ 为实数)且 $f(\lg\log_3 10)=5$,则 $f(\lg\lg 3)$的值是 ( )

(A)-5 (B)-3

(C)3 (D)随 a、b 取不同值而取不同值

(1993 年全国高中数学联赛试题)

【解法一】 $f(x)-4=a\sin x+b\sqrt[3]{x}$ 是奇函数的和,为奇函数,

$\therefore\quad f(-x)-4=-[f(x)-4]$,

即 $f(-x)=-f(x)+8$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(\lg\lg 3)&=f(-\lg\log_3 10)\\&=-f(\lg\log_3 10)+8\\&=3.\end{aligned}$$

故应选(C).

【解法二】 取 $a=0$,为使 $f(\lg\log_3 10)=5$,

得 $b=\dfrac{5-4}{\sqrt[3]{\lg\log_3 10}}$,

则 $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{\lg\log_3 10}}+4$.

$$\therefore\quad f(\lg\lg 3)=\sqrt[3]{\frac{\lg\lg 3}{\lg\log_3 10}}+4$$
$$=-1+4$$
$$=3.$$

故可排除(A)、(B).

仿此取 $b=0$,仍得 $f(\lg\lg 3)=3$,可选(C).

【评注】 (1)本题涉及的知识点:奇函数,对数性质,对数换底公式,求函数的值.

(2)上述两种解法均佳,解题的关键是发现 $\lg\lg 3=-\lg\log_3 10$ 和 $f(x)-4$ 为奇函数.

(3)本题可归属于题型.

$f(x)-k$(k 为常数)为奇或偶函数,已知 $f(t)=m$,求 $f(-t)$的值.其中$-t$ 与 t 只差一个符号的关系是隐秘着的.

1-1-4 设 x,y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$,$S=x^2+y^2$,则$\frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}=$?

(1993 年全国高中数学联赛试题)

【解法一】 设 $y=mx$,

可以得到 $x^2=\frac{5}{4m^2-5m+4}$,

$$y^2=\frac{5m^2}{4m^2-5m+4}.$$

$$\therefore x^2+y^2=\frac{5m^2+5}{4m^2-5m+4}$$
$$=\frac{5}{4}+\frac{5m}{4(4m^2-5m+4)}$$

$$=\frac{5}{4}\left(1+\frac{5}{4m+\frac{4}{m}-5}\right)$$

由 $m+\frac{1}{m}\geqslant 2$ 或 $m+\frac{1}{m}\leqslant -2$ 以及函数的单调性可知 $\left(m+\frac{1}{m}\right)_{\min}=2$ 或 $\left(m+\frac{1}{m}\right)_{\max}=-2$.

$$\therefore\quad S_{\max}=(x^2+y^2)_{\max}=\frac{5}{4}\left(1+\frac{5}{4\times 2-5}\right)=\frac{10}{3},$$

$$S_{\min}=(x^2+y^2)_{\min}=\frac{5}{4}\left(1+\frac{5}{4\times(-2)-5}\right)=\frac{10}{13},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}=\frac{3}{10}+\frac{13}{10}=\frac{8}{5}.$$

【分析二】 由 $S=x^2+y^2$，所以容易联想到 $\rho^2=x^2+y^2$，可尝试用极坐标法来求解.

【解法二】 设 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta\ (\theta\in R)$

代入 $4x^2-5xy+4y^2=5$ 得到

$$4\rho^2\cos^2\theta-5\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta+4\rho^2\sin^2\theta=5,$$

$$\therefore\quad \rho^2(4-5\sin\theta\cos\theta)=5,$$

$$\therefore\quad \rho^2=\frac{10}{8-5\sin 2\theta},$$

$$\therefore\quad S=x^2+y^2=\rho^2=\frac{10}{8-5\sin 2\theta},$$

$\therefore \quad \sin 2\theta=-1$ 时，$S_{\min}=\frac{10}{13}$，

$\sin 2\theta=1$ 时，$S_{\max}=\frac{10}{3}$，

$\therefore \quad \frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}=\frac{13}{10}+\frac{3}{10}=\frac{8}{5}$.

【分析三】 由解法一设 $y=mx$ 可联想到：也可以这样设 $y=x+m$，同样可以把二元转化为一元来解.

【解法三】 设 $y=x+m$，则代入已知关系式得

$3x^2+3mx+4m^2=5$，

而 $\quad S=2x^2+2mx+m^2$

从二式消去 x，得 $5m^2=10-3S$，

即 $\quad S=\frac{10}{3}-\frac{5}{3}m^2$，因 $m^2\geqslant 0$，

故 $S\leqslant\frac{10}{3}$，$S_{\max}=\frac{10}{3}$.

为求 $S_{\min}$，则应考虑方程 $3x^2+3mx+4m^2-5=0$ 中，m 的取值应满足 $9m^2-12(4m-5)\geqslant 0$ 才能使 x 为实数，故得 $m^2\leqslant\frac{20}{13}$，代入 $S=\frac{10}{3}-\frac{5}{3}m^2$，有：

$S\geqslant\frac{10}{3}-\frac{5}{3}\cdot\frac{20}{13}=\frac{10}{13}$，即 $S_{\min}=\frac{10}{13}$.

于是 $\frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}=\frac{3}{10}+\frac{13}{10}=\frac{8}{5}$.

【分析四】 由解法三设 $y=x+m$，进一步联想，我们还可作双换元变换，设 $x=u+v$，$y=u-v$. 同样可以获得答案.

【解法四】 作变换 $x=u+v$，$y=u-v$，由已知等式，得

$4(u+v)^2-5(u+v)(u-v)+4(u-v)^2=5$，即

$$\frac{u^2}{5/3}+\frac{v^2}{5/13}=1,$$

由椭圆的范围知 $0\leqslant u^2\leqslant\frac{5}{3}$,从而

$S=(u+v)^2+(u-v)^2=2(u^2+v^2)=2(u^2+\frac{5-3u^2}{13})=\frac{20}{13}u^2+\frac{10}{13}$,

显见,当 $u^2=0$ 时,$S_{\min}=\frac{10}{13}$,

当 $u^2=\frac{5}{3}$ 时,$S_{\max}=\frac{10}{3}$.

故 $\frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}=\frac{3}{10}+\frac{13}{10}=\frac{8}{5}$.

【评注】 四种解法各尽其妙.解法一、三、四都属于变量代换法,但稍有不同:解法一和三属于单变量代换;解法四属于双变量代换.解法二属于极坐标法,思路清晰流畅,过程简单,运算简便.顺便说明,解法二也可叫做三角代换,可见数学平行各科(例如三角学和平面解析几何)之间的知识有深刻的内在联系.一题多解的功能就在于揭示这种内在联系,培养发散性思维能力.

1-1-5 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$论证是否存在一个函数 $f:N\to N$ 使得 $f(1)=2,f(f(n))=f(n)+n$对一切 $n\in N$ 成立,$f(n)<f(n+1)$对一切 $n\in N$ 成立.

(1993 年第 34 届国际中学生数学奥林匹克竞赛试题)

【解法一】 存在,首先有一条链

$$1\to2\to3\to5\to8\to13\to21\to\cdots \qquad ①$$

链上每一个数 n 的后继是 $f(n)$,f 满足

$$f(f(n))=f(n)+n \qquad ②$$

即每个数是它前面两个数的和. 这种链称为 f 链.

对于①中的数 $m>n$，由①递增易知有

$$f(m)-f(n)\geqslant m-n \qquad ③$$

我们证明自然数集 N 可以分拆为若干条 f 链，并且对任意自然数 $m>n$，③成立（从而 $f(n+1)>f(n)$，并且每两条链无公共元素）. 方法是用归纳法构造链（参见单墫教授著:《数学竞赛研究教程》江苏教育出版社）

设已有若干条 f 链，满足③. 而 $k+1$ 是第一个不在已有链中出现的数. 定义

$$f(k+1)=f(k)+1 \qquad ④$$

这链中其余的数由②逐一确定.

对于 $m>n$，如果 m、n 同属新链，③显然成立. 设 m、n 中恰有一个属于新链.

若 m 属于新链，在 $m=k+1$ 时，

$$f(m)-f(n)=f(k)+1-f(n)\geqslant k-n+1=m-n.$$

设对于 m，(3)成立，则

$f(f(m))-f(n)=f(m)+m-f(n)\geqslant m-n+m\geqslant f(m)-n$（由②易知 $2m\geqslant f(m)$）.

即对新链上一切 m，③成立.

若 n 属于新链，在 $n=k+1$ 时，

$$f(m)-f(n)=f(m)-f(k)-1\geqslant m-k-1=m-n.$$

设对于 n，③成立. 在 $m>n$ 时，m 不为原有链的链首. 记 $m=f(s)$，则在 $m>f(n)$时，

$$\begin{aligned}f(m)-f(f(n))&=s+m-(f(n)+n)\\&=m-f(n)+(s-n).\end{aligned}$$

而在 $s\leqslant n$，$f(n)-f(s)\geqslant n-s\geqslant 0$，与 $m>f(n)$矛盾，所以 $s>n$，

$f(m)-f(f(n))\geqslant m-f(n)$. 即对新链上一切 n,③成立.

因而添入一条新链后,③仍成立.

这样继续添加,直到所有自然数均在链中出现,所得函数 $f:N\to N$ 即为所求.

【解法二】 令 $f(n)=[\beta(n+1)]+n$,其中 $\beta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $[x]$表示 x 的整数部分.

显然 $f(n)$严格递增,并且 $f(1)=2$.

又由于 $\beta(\beta+1)=1$,所以

$f(f(n))=f(n)+[\beta(f(n)+1)]$

$=f(n)+\{\beta[\beta(n+1)]+\beta(n+1)\}$

$=f(n)+\{\beta^2(n+1)-\beta[\beta(n+1)]+\beta(n+1)\}$

($\{x\}=x-[x]$为 x 的分数部分)

$=f(n)+\{n+1-\beta[\beta(n+1)]\}$

$=f(n)+n$.

因此$[\beta(n+1)]+n$ 就是满足要求的函数.

1-1-6 若函数 $y=\log_3(x^2+ax-a)$的值域为 R,则实数 a 的取值范围是______.

(1994 年第 5 届"希望杯"全国数学邀请赛题)

【解法一】 根据函数值域定义,对于任意实数 y,关于 x 的方程

$\log_3(x^2+ax-a)$,

即 $x^2+ax-a-3^y=0$ 恒有解,

因此,$\triangle=a^2+4(a+3^y)$

$$=a^2+4a+4\cdot 3^y\geqslant 0 \quad ①$$

恒成立.

$\because$ $4\cdot 3^y>0$，$\therefore$①式成立的充要条件是 $a^2+4a\geqslant 0$，

解得 $a\leqslant -4$ 或 $a\geqslant 0$.

【解法二】 根据对数函数和二次函数的性质，$f(x)=\log_3(x^2+ax-a)$的值域为 R 的充要条件是

$$u(x)=x^2+ax-a(x\in R)$$

的最小值不大于 0，即

$$-a-\frac{a^2}{4}\leqslant 0\text{，解得 } a\leqslant -4 \text{ 或 } a\geqslant 0.$$

【评注】 解法一运用转化思想把对数函数转化为指数形式(关于 x 的二次方程)获得解答；解法二运用对数函数和二次函数的性质获得思路，两法均较简便.

1-1-7 设集合 $A=\{\frac{n}{2}|n\in Z\}$，$B=\{n|n\in Z\}$，$C=\{n+\frac{1}{2}|n\in Z\}$，$D=\{\frac{n}{3}+\frac{1}{6}|n\in Z\}$，则在下列关系中，成立的是（　　）

(A)$A\subset B\subset C\subset D$

(B)$A\cap B=\varnothing$，$C\cap D=\varnothing$

(C)$A=B\cup C$，$C\subset D$

(D)$A\cup C=B$，$C\cap D=\varnothing$

(1995 年第 6 届“希望杯”全国数学邀请赛题)

【解法一】 $\because A=\{\frac{n}{2}|n\in Z\}$，$B=\{n|n\in Z\}$，$C=\{n+\frac{1}{2}|n\in Z\}$，$D=\{\frac{n}{3}+\frac{1}{6}|n\in Z\}$

$\therefore A=B\cup C$，$C\subset D$. 故应选(C).

【解法二】 如果把 A,B,C,D 与角的集合相对应，令

$$A'=\{\frac{n\pi}{2}|n\in Z\},$$

$B'=\{n\pi | n\in Z\}$,

$C'=\{n\pi+\frac{\pi}{2} | n\in Z\}$,

$D'=\{\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{6} | n\in Z\}$

结论仍然不变,显然 A' 为终边在坐标轴上的角的集合,B' 为终边在 x 轴上的角的集合,C' 为终边在 y 轴上的角的集合,D' 为终边在 y 轴上及在直线 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上的角的集合,故应选(C).

【评注】 解法一为直接法,解法二运用转化思想把已知的四个集合元素均转化为角的集合,研究角的终边,思路清晰,易懂,实属妙思佳解.

1-1-8 实数 x,y 满足 $x^2-3xy+y^2=2$,则 x^2+y^2 的值域是______.

(1995 年第 6 届"希望杯"全国数学邀请赛题)

【解法一】 设 $S=x^2+y^2$,由 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$,得

$$-\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2} \quad ①$$

又由已知,得 $xy=\frac{1}{3}(S-2)$ ②

②代入①,得

$$-\frac{S}{2}\leqslant\frac{1}{3}(S-2)\leqslant\frac{S}{2},$$

解得 $S\geqslant\frac{4}{5}$.

$\therefore x^2+y^2$ 的值域是$[\frac{4}{5},+\infty)$.

【解法二】 令 $S=x^2+y^2$,由已知得 $xy=\frac{1}{3}(S-2)$.