

余仲宇 虞 绍 连培文

列方程
解应用题·方法·思路
Lie Fang Cheng
JieYingYongTi FangFa SiLu



河南教育出版社

列方程解应用题·方法·思路

编著 余仲宇 虞 绍 连培文

河 南 教 育 出 版 社

列方程解应用题·方法·思路

编著 余仲宇 虞 绍

连培文

责任编辑 张国旺

河南教育出版社出版

河南偃师县印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 8.375印张 175千字

1991年5月第1版 1991年5月第1次印刷

印数1—6,826册

ISBN7—5347—0910—5/G·757

定价 2.80元

序

在培养人才的工作中，教师起着关键性的作用，对于中、小学生来说，尤其是如此。一本好书，就是一个好教师；由于它集中了丰富的内容和前人的经验，往往比一个教师对学生的作用要大得多。

近些年来，随着国民经济的发展和科学技术的进步，人们越来越重视中等数学教育的工作，因为这是人才成长过程的基础阶段。与此相应地，出版了大量的关于中学数学教学的书籍和刊物，其中许多是很好，很有价值的，为我国中等数学教育的发展，为提高青少年的数学素质，做出了贡献。

要学好数学，必须演算大量的问题，从中领会和掌握各种运算技巧，这就是“熟能生巧”。一个好的教师，又总是善于引导学生在演算题目的同时去总结和概括典型的数学方法和规律，使他们有一个质的方面的提高，这就是“举一反三”。这是数学教学中必不可少的相辅相成的两个部分。同样地，一本好的中学数学参考书，不但要有大量的多种类型的例题

或习题，还应该详略适当的分析和综合性的评述，以使读者通过演算掌握更多的数学方法，提高解决问题的能力，加深对基本概念的理解。这样，才不至于成为一本仅是罗列问题的习题集，才能真正起到一个好教师的作用。

由余仲宇同志等编写的《列方程解应用题·方法·思路》一书，旨在帮助中学生系统学习解决应用题的方法，他们不但编集了难易程度不同的题目，而且分析和讲解了各种方法的特点与使用。这本书的出版，无疑会使读者，特别是中学生和自学者，得到许多益处。

据我所知，为这本书的出版，河南教育出版社的编辑同志（特别是张国旺同志）给予了热情的支持，付出了艰辛的劳动。对于热心于数学教育事业的出版界同志，我们确实应该致以衷心的感谢，也希望他们为广大青少年再多出一些好书。

于秀源

1990年1月于杭州

编者的话

培养学生利用数学知识解决各种实际问题的技能、技巧，是中学数学教学极其重要的任务。然而，教学实践表明，列方程解应用题是中学代数教学中一个最为薄弱的环节。有些学生往往是解答一题，丢掉一题。忽视积累解题经验，总结解题规律。对于比较简单的问题尚能依样画葫芦，见到稍有变化的问题常常是乱碰乱撞，带有很大的盲目性，遇到难度较大的问题，更是束手无策，无从下手。为了帮助初中学生和其他读者系统学习、巩固列方程解应用题的知识，我们根据以往教学实践的一些体会，并参阅有关资料，组织编写了这本适合初中教学的应用题解题指导书。

全书分为解答应用题的基础知识、解应用题的常用分析方法、典型例题分类解析三个部分。本书主要是向广大读者介绍几种较为有用的分析思考方法，重点帮助读者解决“拿到题目不知该从哪里下手”这个问题。这些分析方法，不但对解答应用题有用，而且对今后进一步学习其它知识也是非常有用的。在第三部分里，我们依据课本内容及历届中招试题的主要题型，精选了富有代表性、启发性的题例进行分类解析，引导读者掌握各类问题的解题技巧、解题规律，提高分析问题、解决问题的能力。为了便于读者及时巩固所学知识，我们选配了一些相应的练习题，同时考虑到读者自学的需要，替全部练习题给出了提示或答案。但应注意，非到山

穷水尽的地步，请不要急于去看答案，一定要独立思考。即使思路不对、解题失败，也要想想为什么不对？吃一堑长一智，在解题中接受教训和总结经验是具有同等重要意义的。

本书可供中学生和自学青年阅读，也可供学生家长、数学教师辅导时参考。我们希望本书能使广大青少年读者学习应用题时，少走弯路，省去摸索时间，提高教学效果。

在本书的编写过程中，我们得到了同志们热情的帮助。在此，我们谨致谢意。书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。

余仲宇

1988年10月

目 录

第一章 解答应用题的基础知识	(1)
一、应用题的特点.....	(1)
二、列方程解应用题的一般步骤.....	(3)
三、布列方程的两种基本方法.....	(28)
第二章 解应用题的常用分析方法	(33)
一、译式法.....	(33)
二、列表法.....	(38)
三、线示法.....	(46)
四、图解法.....	(52)
五、演示法.....	(60)
六、分解法.....	(68)
七、类比法.....	(74)
八、矩形法.....	(79)
九、参数法.....	(85)
十、设“1”法.....	(91)
第三章 典型例题分类解析	(101)
一、和倍差倍问题.....	(102)
二、等积变形问题.....	(111)
三、行程问题.....	(115)
1. 相遇问题.....	(115)
2. 追及问题.....	(125)
3. 环行问题.....	(133)

4. 变速及其他问题.....	(144)
四、流速、风速问题.....	(154)
五、比例分配问题.....	(163)
六、劳力调配问题.....	(168)
七、工作问题.....	(175)
1. 工作问题.....	(176)
2. 工程问题.....	(182)
3. 注水、放水问题.....	(191)
八、配料问题.....	(198)
1. 浓度问题.....	(198)
2. 合金问题.....	(207)
九、数字问题.....	(215)
十、时钟问题.....	(222)
十一、年龄问题.....	(227)
十二、几何问题.....	(231)
十三、增长率问题.....	(236)
十四、杂题.....	(243)
答案.....	(252)

第一章 解答应用题的基础知识

应用题一般是指需要运用数学方法来解决的实际问题或其他一些学科的问题。列方程解应用题是利用数学知识解决实际问题的一个重要方法，它是初中阶段的重点内容。然而，应用题的条件和问题千变万化，解答方法也常“变幻莫测”，有时使我们感到不知所措。那么，应用题教学的重要性究竟何在？难又到底难在哪里？要学会解应用题，应该了解、熟悉的是什么？应该掌握的又是什么？在这一章里，我们先对应用题教学的重点与难点作些必要的分析，然后再具体谈谈列方程解应用题的一般步骤和基本方法。常用的分析方法我们将在第二章中给予介绍。

一、应用题的特点

应用问题大都是现实生活中的实际问题，它涉及到工业、农业、国防、科学技术以及日常生活各个方面，内容十分丰富。现行初中代数教材，从某种意义上来说，是以方程为其主要内容，数和式是为方程作准备，为方程服务的。而方程中的列方程解应用题，不仅可为学习物理、化学等其它学科服务，而且还可以直接为现实生活服务。其次，列方程解应用题是培养分析问题和解决问题能力的好题材。事实上，列方程解应用题需在错综复杂的数量关系中，去寻找已知与未知

之间的内在联系，这就要求我们对问题中所涉及的各种数量关系作精细的分析，要求我们运用科学的方法进行正确的思维。因此，通过列方程解应用题的教学，可以发展我们的逻辑思维能力，而这正是中学数学教学目的之一。以上事实表明，列方程解应用题在教学中占有十分重要的地位。

列方程解应用题是教学中的一个重点，同时也是教学中的一个难点，它既难教又难学，具体地说有以下三个方面：

(1)应用题与一般的化简题、计算题不同。计算题或化简题由运算符号直接指明运算方法和运算顺序；但应用题一般只有具体的内容，而没有直接指明解题方法、运算顺序什么的，有时甚至连等量关系也是隐晦的。因此，解应用题比做计算题、化简题困难得多。

(2)布列方程并不象解方程那样有法可循，即使对于同一个题，由于思路不同，也可以列出不同的方程，一步考虑不到或思考不周，就会陷入困境之中。而且由于客观实际的内容是丰富多彩的，其形式又是千变万化的，反映在数量关系上更显得是多种多样，企图用一个公式或法则去解决它是不可能的。这就要求我们对具体问题作具体分析，而初学者对此的困难则是很大的。

(3)应用题来自实际，每一道题目都有具体的内容，有反映工业、农业生产的，有反映国防、科学技术的，也有反映日常生活的，内容既具体、又广泛。如果对所给应用题的内容不熟悉、不理解，我们就无法进行分析推理，从而无法列出方程。有时，一道应用题解不出来，往往是题目中所涉及到的好些东西，我们不熟悉，无法弄清题意所造成的。而且，应用题大都使用有关名词、术语来表达题意。例如，

关系词：“多”、“少”；“快”、“慢”；“提前”、“落后”；“超过”、“剩余”；“和”、“差”、“倍”；“增加”、“增加到”……专用词语：“亩产量”、“单价”、“速度”、“相遇”、“追及”、“环行”、“效率”、“浓度”、“超额”、“亏损”……如果对这些词语理解不透或对相应的基本数量关系模糊不清，题目就会做错。

然而，事物总是一分为二的，列方程解应用题虽然有这样或那样的困难，但是，我们应该认识到应用问题是很有趣的，解答应用题，有时比参加一个游艺活动更有趣味。在教学中，我们可以适当地把常见的一些应用题进行归类，通过对典型例题的分析、解答，逐步熟悉常见的数量关系，熟悉确立相等关系的一些语句，由此可揭示一些解题规律，发现一些解题技巧。这样，我们一旦掌握了各类应用问题的基本数量关系和常用的几种分析思考方法，就能象飞鸟那样，在应用题这个辽阔的天地里任意翱翔。

二、列方程解应用题的一般步骤

在小学数学里，我们解应用题通常使用的是算术方法，即根据题目给定的条件，先找出一个用四则运算符号把已知数联结而成的式子，然后，按运算顺序求出其结果。这个结果就是所求的未知数。

例1 联桥村1987年粮食平均亩产量达到1288斤，比1957年平均亩产量的4倍还多64斤。求这个村1957年的粮食平均亩产量。

i) 用算术方法解：

由题意可知，从1288斤中减去64斤刚好是1957年亩产的4倍，从而1957年平均亩产量为：

$$\begin{aligned}(1288-64) \div 4 & \qquad \qquad \qquad \textcircled{1} \\ &= 1224 \div 4 \\ &= 306(\text{斤})\end{aligned}$$

ii) 用布列方程的方法解：

设这个村1957年粮食平均亩产量为 x 斤。

由题意，得

$$1288 = 4x + 64$$

解这个方程

$$1224 = 4x$$

$$x = 306.$$

答：这个村1957年粮食平均亩产量是306斤。

上面①式中把“倍数”作了“除数”；②式中才用“倍数”去“乘”。显然，②式较①式顺理。这样，我们在解决实际问题时，就有了较四则运算为简便的方法，并且可以解决一些算术方法不可能解决的实际问题。

由上例的解答可以看出，用布列方程的方法（亦称代数方法）解应用题，是先用字母代表题目中的某些未知数；再根据题中包含的已知数与未知数间的相等关系列出方程（或方程组）；解这个方程（组），求出未知数的值；最后根据问题的实际意义进行检验，得出所要求的结果。

显然，代数解法与算术解法是两种不同的解法，但二者并非毫无联系。事实上，利用代数解法列出方程后，如果不破坏原数据进行还原，用一式子表示出所求的未知数（如 x ），那么这个式子往往就是算术解法中的算式。所以，二

者不是互相孤立的，从某种意义上讲，算术解法是代数解法的基础，而又寓于代数解法之中，是代数解法的特殊情形。然而，二者的解题思路确有着本质上的区别：

用算术方法解应用题时，只是已知数参与运算，而未知数始终是作为一个“目标”，不参与运算，处于被动求解的地位。其思维过程是由已知到未知，或是从未知到已知。已知数就是已知数，未知数就是未知数，未知数难以发挥其应有的作用。所以，用算术方法解应用题，算式不易列出，题目越复杂，思考求解就越困难。

用布列方程的方法解应用题，情况就不同了，未知数的地位起了变化。解题时，首先以字母代替未知数，让它们与已知数一起参与运算，通过代数式，等式来揭示题目中的数量关系。其思维过程则是由代数式到等式，或是从等式到代数式。这里，未知数一旦用字母来表示以后，就可以把他们作已知数看待，大胆地使用，使其发挥主动作用。这是列方程解应用题的一大优越性。

实际上，算术解法列式时，必须把求解的过程也考虑在内，思考起来比较困难，显得“道路曲折”；而代数解法是把“列式”与“求解”分开，先不考虑解的过程，只须根据问题中的等量关系平铺直叙地列出方程，而解方程则是有规律可循的。因此，用布列方程的方法解应用题，思考比较单纯、易于掌握，是一种理想的方法。列方程解应用题，一般有以下五个步骤：

1. 仔细审题

平时，我们看到一道应用题，不要匆匆忙忙拿起笔来就

做，首先应该认真读题，弄清题目的意思，搞清题目的结构以及各数量之间的关系。一位科学家说过：“回答一个你尚未弄清的问题是愚蠢的。”如果没有仔细审题，把题目看错了或者把题意理解错了，就会列出错误的方程，从而得出错误的答案。所以说，审题是解题的基础，我们对这一步工作必须给予足够的重视。

审题的时候，应注意默读，时间允许的话，可反复多读几遍，边读边思考。其中，第一次可以粗读，即作了解性的读题，了解题目中叙述的是一件什么事，属于何种类型；已知条件是什么，要求的问题是什么？第二次则应细读，具体分析题目所给的条件，认真弄清题目中关键性或易被混淆词语的正确含意，明确题中涉及了哪些基本量，它们彼此之间有些什么关系？需要考察哪些变化过程或基本情况？这里可以引入适当的一些符号，画一个比较直观的示意图或作些简单的演示，也可以根据问题所涉及的基本量和所要考察的变化过程、基本情况，设计一张相应的数量关系表，以便把题目中的条件与问题清楚地表示出来。对于一些数量关系比较复杂的应用题，则可想法进行分解或作类比转化。在此，该特别注意的是一些关键词、易混词，例如：“与”、“比”、“是”、“一样”、“同时”、“分别”、“同向”、“相向”……；“多”、“少”；“快”、“慢”；“提前”、“落后”；“超过”、“剩余”、“亏损”；“增加（是指超过原来基数的那部分，同义词有：增加了、增长、增长了、多、多了、提高、提高了等等）”、“增加到（是指原来基数与增加部分的和数，同义词有：增加为、增长到、增长为、达到、提高到、提高为等等）”、“减少（是指与原来基数相差的

部分)”、“减少到(是指原数与减少数的差)”；“降低”、“降低到”；……有关各类应用题特有的术语，我们将在第三章中分别给出必要的解释。

例2 甲乙两人分别从相距24公里的A、B两地出发，相向而行。如果甲先出发1小时，那么他们在乙出发2小时后相遇；如果是同时出发，那么两人在离A地9.6公里处相遇，求甲乙两人各自的速度。

审题时，由“粗读”即可了解到这是一个行程方面的相遇型问题，涉及速度、时间、路程三个基本量；题中分两种情况进行考察(所考察的每个变化过程或基本情况，一般是由“若”或“如果”引出，而末尾则常标有符号“；”或“。”)。第二次阅读时，应对题目所给出的条件作具体的分析。

由“分别”应明确：甲是从A地出发，乙是从B地出发；

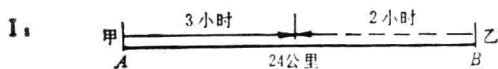
由“相向”、“相遇”应联想到两人行程之和与全程的关系，而全程已知；

由“先”可知，这个问题中甲所用时间比乙多；

由“同时”应注意到：相遇时，甲乙两人所行的时间相等；

由“离A地”可推知“离B地”。

这里可借用线示图和数量关系表来揭示其题设条件，以便进一步分析题意。寻找等量关系。如图所示。



		速 度	时 间	路 程
相遇 I	甲			
	乙			
相遇 II	甲			
	乙			

事实上，审题工作是贯串于整个解题过程之中的。这一点，我们可以在下面几个步骤的分析中清楚地看到。

2. 合理设元

我们在对题意有了比较深刻的理解后，就应考虑把题目所叙述的实际问题转化为代数问题来解决。一般可以选择一个适当的未知数作为基本未知数——元，假设它的值为 x （也可以用其他字母表示）；随后，根据题目中的有关条件，用含 x 的代数式表示另一些未知数。这里，所设语句应尽可能完整，并要求注明单位。对于含有多个未知数的应用题，虽然可以把任何一个设为 x ，但是应注意避繁就简，使问题便于分析，列出的代数式、方程简单易解。例如，对于“已知甲数比乙数小3，而丙数是乙数的 $\frac{4}{5}$ ”，设乙数为 x 比较适宜，这是因为甲、丙两个数表述时都是以乙数作为标准数的。

设元的方法有两种，直接设元法和间接设元法。对于一些比较简单的应用题，通常是采用直接设元法，即题目中问什么就设什么；有几个未知数，就设几个未知数。其优点是