华东师范大学函授教材

解析几何讲义

（第三册）

华东师范大学数学系
几何教研組
編

华东师范大学函授部

华东师范大学函授教材

解析几何講义

第三册

华东师范大学数学系几何教研組編

华东师范大学函授部

1959年

目　　录

第七講　空間解析几何学

空間坐标法及向量代数学基础

本講开始先講空間笛氏坐标系，然后引进向量的概念以及向量代数的基础知識。

§7.1　笛氏直角坐标

空間坐标法是平面坐标法的推广，我們在第二講里已經学习了平面上笛氏坐标系的建立，現在祇要把以前的方法加以扩充，就可建立空間坐标系了。通过空間一点 O 作互相垂直的三直綫 OX，OY，OZ——坐标軸，O 称为原点，軸 OX 簡称 x-軸，它的正向是由后向前（指向讀者）軸 OY 簡称 y-軸，它的正向是自左向右，軸 OZ，簡称 Z-軸，它的正向是自下而上，如图（1）

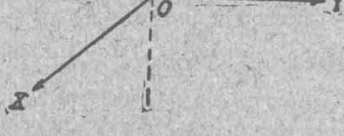


图 1

三坐标軸 OX，OY，OZ，两两决定一平面，就是平面 YOZ，ZOX，XOY，称为坐标平面，最后，选取一定長的綫段为單位長度，于是空間任意一点的位置，就可用三个实数来决定，設 M 为空間任意一点，过 M 作平面垂直于三坐标軸 OX，OY，OZ，并交这些軸于 A，B，C，三点，这三点就是点 M 在各軸上的射影。現令 $x=OA$，$y=OB$，$z=OC$，那末，这三个数 x，y，z，是由点 M 所决定，这里 OA，OB，OC 分别表示有向綫段 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 的值。数 x 称为点 M 的第一坐标，或称横标；数 y 为第二坐标，或称縦标；数 z 为第三坐

标，或称直标。总起来說 x,y,z，称为点 M 的空間直角坐标，并用記号 $M(x,y,z)$ 来表示，习惯上，x 写在第一位，y 写在第二位，z 写在第三位。

如上所述，空間的每一个点，决定三个实数 x,y,z。

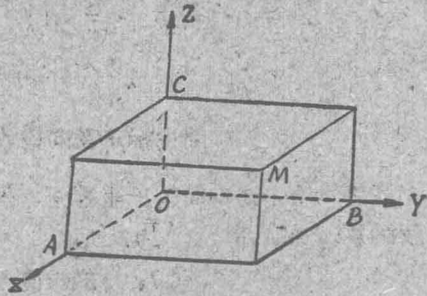


图 2

反之，对于任意的三个实数 x,y,z，便能在空間确定一个点，使得它的横标为 x，縱标为 y，直标为 z，方法是这样的：在 x-軸上截取綫段 $\overrightarrow{OA}$，使它的値 $OA=x$，在 y-軸上截取綫段 $\overrightarrow{OB}$，使它的値 $OB=y$，在 z-軸上截取綫段 $\overrightarrow{OC}$，使它的値 $OC=z$；过点 A 作平面垂直于 x 軸，过点 B 作平面垂直于 y-軸，过点 C 作平面垂直于 z-軸，这三平面相交于唯一的点 M，这个点就是所求的点，它的坐标是 (x,y,z)。因此，空間的一个点与三个实数 (x,y,z) 之間有着一一对应的关系。

三坐标平面 YOZ，ZOX，XOY，把整个空間划分为八个区域，每一区域称为一个卦限，例如 $O\text{-}XYZ$ 为第一卦限，$O\text{-}XYZ'$ 为第五卦限等，在每一卦限內，点的坐标的符号各有不同，现在用下表来表示：

卦限	1 OXYZ	2 OX′YZ	3 OX′Y′Z	4 OXY′Z	5 OXYZ	6 OX′YZ′	7 OX′Y′Z′	8 OXY′Z′
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

如果点在坐标平面 YOZ 上，那末，它的横标 $x=0$，同样，在坐标平面 ZOX 上的点，它的縱标 $y=0$，在坐标平面 XOY 上的点，它的直

标 $z=0$。

在 x-軸上的点，它的 $y=0$，$z=0$，在 y-軸上的点，它的 $x=0$，$z=0$，在 z-軸上的点，它的 $x=0$，$y=0$，至于原点 O 的坐标显然是 $(0,0,0)$。以上所講的坐标系，称为空間的笛氏直角坐标系。

§7、2 数量与向量

在我們日常生活中，常常会碰到兩种不同类型的量，其中一种量，例如时間，温度，田地的面积，土方的体积等，是可以由一个数来完全表示，这样的量，称为数量；另外还有一种量，例如火車輪船的速度，加速度，以及水力，火力等，它們不但有大小，而且还有方向，这样的量，称为向量。

我們以前所講的有向綫段就是向量的几何表示，因此以后就称有向綫段为向量。

兩个向量，如果它們的長度相等且方向相同，則称为相等。

一个向量有起点和終点，如果对調它們的位置，我們就得到另一个向量，例如以 A 为起点，B 为終点的向量与以 B 为起点，A 为終点的向量，并不相等，因为它們的長度虽然相同，但方向是相反的。

在本講內，我們用兩个字母冠以箭头来表示一个向量，其中第一字母表示向量的起点，第二字母表示它的終点，或者仅用一个粗写字母表示向量，例如，以 A 为起点，B 为終点的向量写为 $\overrightarrow{AB}$ 或仅用一个字母 $\boldsymbol{a}$ 来示

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$$

如图(3)

如果一个向量的終点重合于它的起点时，这向量称为零向量，零向量的方向不确定。

向量的長度称为它的模数，(也称它的絕对值)例如向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模数用 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 来表示，同样，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模数用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示，零向量的模数显然为零。

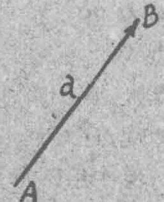


图3

当一个向量的起点可以任意选取时，也就

是說，它的起点可以放在空間任意一点时，那末，这样的向量，我們称它为自由向量，一个自由向量可以用与它相等的向量来代替。在本講內，除特别声明外，都是自由向量。

§7、3　向量的和、差及向量与数量的乘积

定义1．設$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为已知二向量，把向量$\boldsymbol{b}$的起点放在向量$\boldsymbol{a}$的終点上，于是以向量$\boldsymbol{a}$的起点为起点而以$\boldsymbol{b}$的終点为終点的第三向量，称为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$二向量之和，并可用来$\boldsymbol{c}$表示，

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

如图（4）

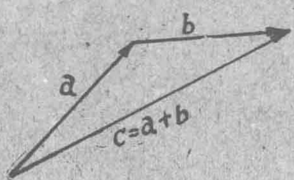


图4

关于求二向量之和，一般用平行四边形法則：把向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的起点放置在同一点O上，于是以二向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为兩边的平行四边形的对角綫就是二向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，如图（5）

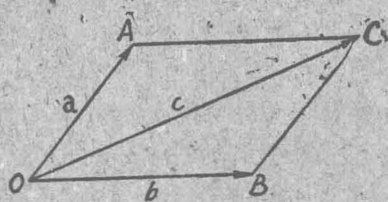


图5

令$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，作平行四边形$OABC$，因$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$故

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$$

以上的平行四边形法則，当然可以推广到求任意多个向量的和，設$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\cdots\cdots\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a}_n$为$n$个向量，要求它們的和，可以把向量$\boldsymbol{a}_2$的起点放在$\boldsymbol{a}_1$的終点上，然后再將向量$\boldsymbol{a}_3$的起点放在$\boldsymbol{a}_2$的終点上，依此类推，直到向量$\boldsymbol{a}_n$的起点放在$\boldsymbol{a}_{n-1}$的終点上，于是以向量$\boldsymbol{a}_1$的起点为起点而以$\boldsymbol{a}_n$的終点为終点的向量就是和$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\cdots+\boldsymbol{a}_n$。

現在用图形表示如下：設$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，$\overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_3$，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，于是

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{OA_2}$　$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{OA_3}$，依

此类推，

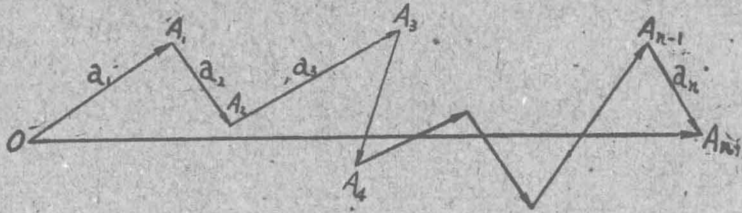


图6

$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

得　　$$=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\cdots\cdots+\boldsymbol{a}_n。$$

其中 $\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{A_1A_2}\cdots$，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$称为分向量，$\overrightarrow{OA_n}$称为它們的封閉向量，所以如果有$n$个向量，其中每个向量的起点放在它前一个向量的終点上，那末，它們的和就是封閉向量。（注意：这些分向量可以不在同一平面上）。

向量的加法滿足交換律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的順序可以交換，設 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$

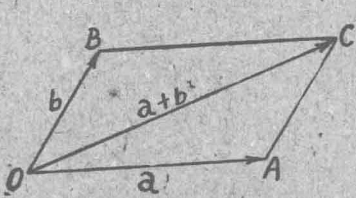


图7

那末
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

向量的加法也滿足結合律，即

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$$

如图(8)

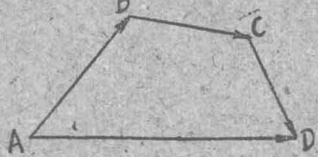


图8

因为 $$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

上面已經定义了向量的和,现在我們要定义兩个向量之差。

定义2. 設有二向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$,要求第三向量$\boldsymbol{c}$,如果把它加到向量$\boldsymbol{a}$上时,便可得到向量$\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$$

那末,称向量$\boldsymbol{c}$为向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差,并写为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

向量差的作图法則如下:令 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$

如图(9)

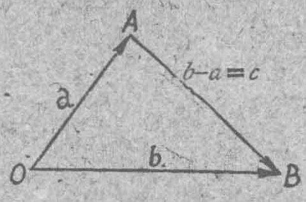


图9

因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, 所以 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$

因此 $$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$$

所以有共同起点的二向量之差,是以"減向量"的終点为起点而以"被減向量"的終点为終点的向量。

如果在 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ 中,点B重合于点O,則 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{0}$,

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=0$$

上式中，向量 $\overrightarrow{AO}$ 与向量 $\overrightarrow{OA}$（或 $\boldsymbol{a}$）有相同的長度，但方向相反，我們称向量 $\overrightarrow{AO}$ 为向量 $\overrightarrow{OA}$ 的逆向量，并用 $-\overrightarrow{OA}$ 来表示，或

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\qquad \overrightarrow{AO}=-\boldsymbol{a}$$

定义 3. 設一个向量 $\boldsymbol{a}$ 与任意实数 λ 相乘，它他的积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍然是一个向量，它的長度为原向量 $\boldsymbol{a}$ 的 $|\lambda|$ 倍，它的方向則須看 λ 的正負而定，如果 λ 为正数，則 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向一致；如果 λ 为負数，則 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反。

根据上面的定义，立刻可以得出

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\lambda\mu\boldsymbol{a}$$

其中 λ 和 μ 为兩个任意实数，$\boldsymbol{a}$ 为任意向量。

向量与数的乘积，滿足乘法的分配律，即

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

現在我們用平行四边形法則来証明这性質

令 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及它他們的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 分別为平行四边形 $OBCA$ 的兩边及对角綫，如图(10)。

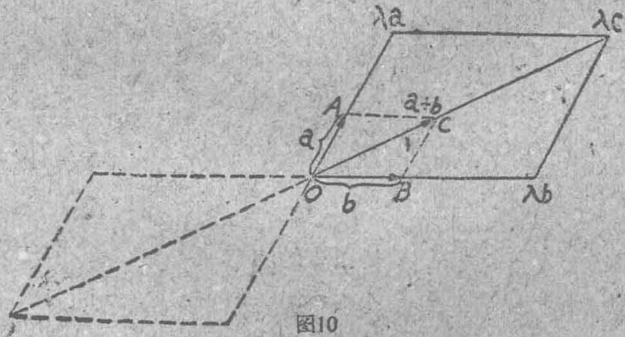


图10

如果 $\lambda>0$ 时，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 乘以 λ 后，則平行四边形的兩边及对角綫同时以同样的比例扩大或縮小 λ 倍，因此我們得到一个新的平行四边形，如果 $\lambda<0$ 时，那末，只要把所有向量的方向改变为相反的

方向，但这样做了之后，我們所得到一个平行四边形，与$\lambda>0$时一样，它的对角綫及兩边分别是向量$\lambda(a+b)$及λa与λb即

$$\lambda a+\lambda b=\lambda(a+b)$$

根据向量与数的乘积定义，当a和b二向量有下列关系时：

$$a=\lambda b \qquad (\lambda\text{为任意实数})$$

那末a和b一定平行　以后二向量平行时，称它們为共綫向量，（因为經过平移后，总可以把它們放在同一直綫上）。

§7、4 向量的射影

設有向量$\overrightarrow{AB}$及軸l，从A,B兩点引平面垂直于軸l，并交l于A'和B'兩点，那末有向綫段$\overrightarrow{A'B'}$的值，称为向量$\overrightarrow{AB}$在軸l上的射影：

$$\text{射影}_l\overrightarrow{AB}=A'B'$$

定理1.向量$\overrightarrow{AB}$在軸l上的射影为

$$A'B'=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi$$

其中φ为向量$\overrightarrow{AB}$与軸l間的夾角

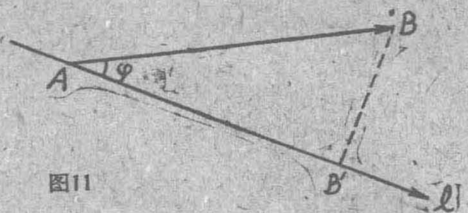


图11

証：因为我們所研究的是自由向量，把向量$\overrightarrow{AB}$的起点A放置在軸l上，于是向量$\overrightarrow{AB}$与軸l就在同一平面上，且点A的射影A'就是A

所以
$$A'B'=AB'=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi$$

推論：从（1）式，容易看到相等的向量在同軸上有相等的射影。

定理 2. 向量和的射影等于各向量的射影和（在同一軸上）

設$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_n$为$n$个向量那末

射影$_l(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)=$射影$_l a_1+$射影$_l a_2+\cdots+$射影$_l a_n$

証：如同上节一样，我們把分向量$a_1,a_2,\cdots a_n$作成有向折綫，把向量a_2的起点放在a_1的終点上，然后再把a_3的起点放在a_2的終点

上，依此类推，直到向量 $\boldsymbol{a}_n$ 为止，并令 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$， $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2\cdots$，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$ 于是

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{OA_n}$$

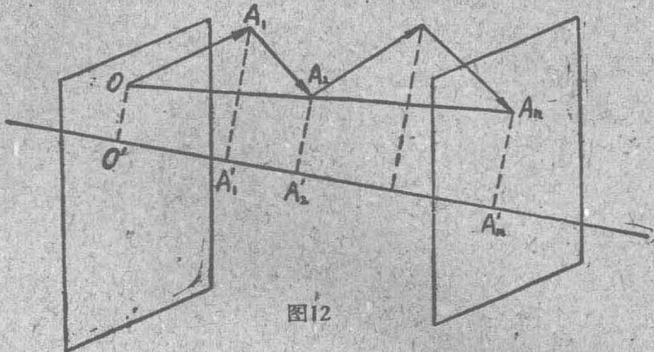


图12

設 O'，A'_1，A'_2，$\cdots$，A'_n 分别为点 O，A_1，A_2，$\cdots$，A_n 在軸 l 上的射影，如图（11） 于是

射影$_l$ $\overrightarrow{OA_n}=O'A'_n=O'A'_1+A'_1A'_2+\cdots\cdots+A'_{n-1}A'_n$

但 $O'A'_1=$射影$_l$ $\overrightarrow{OA_1}$， $A'_1A'_2=$射影$_l$ $\overrightarrow{A_1A_2}\cdots\cdots A'_{n-1}A'_n=$射影$_l$ $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ 所以

射影 $\overrightarrow{OA_n}=$射影 $\overrightarrow{OA_1}+$射影 $\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+$射影$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$

即 射影$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=$射影 $\boldsymbol{a}_1+$射影 $\boldsymbol{a}_2+\cdots+$射影 $\boldsymbol{a}_n$

§7、5 向量的分解

在空間笛氏直角坐标軸上，分别取三个向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，它們满足下列条件：

(i) $\boldsymbol{i}$ 在 x-軸上，其方向与 x-軸的正向一致，$\boldsymbol{j}$ 在 y-軸上，其方向与 y-軸的正向一致，$\boldsymbol{k}$ 在 z-軸上，其方向与 Z 軸的正向一致。

(ii) $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 都是單位向量，即它們的模数等于 1，$|\boldsymbol{i}|=1$，$|\boldsymbol{j}|=1$，$|\boldsymbol{k}|=1$。

这样規定的三个向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 称为基本向量，于是空間任意一个

向量都可用向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 綫性地表示。

設一向量 $\boldsymbol{a}$，我們不妨假設它的起点在坐标原点 O，(因为自由向量經过平移后，总可使得它的起点放在 O)，并令 A 表示它的終点

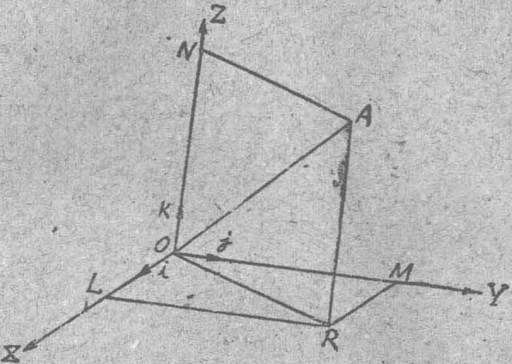


图13

过点 A 作 XOY 平面的垂綫，令 R 为垂足，再过 R 作直綫垂直于軸 OX，并交 OX 于点 L，于是根据向量的加法規則，得

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LR} + \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$$

因为向量 $\overrightarrow{OL}$ 在 x-軸上，它与向量 $\boldsymbol{i}$ 共綫，所以 $\overrightarrow{OL}$ 可以写成

$$\overrightarrow{OL} = l\boldsymbol{i}$$

这里 l 是一个数，它的絕对值 $|l|$ 就是向量 $\overrightarrow{OL}$ 的長度，当 $\overrightarrow{OL}$ 的方向与 $\boldsymbol{i}$ 一致时，l 为正数，如果相反时，l 为負数，換句話說，l 就是有向綫 $\overrightarrow{OL}$ 的值，也就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 在 x-軸上的射影，所以 l 就是点 A 的横标 x，即 $l = x$，

所以 $$\overrightarrow{OL} = x\boldsymbol{i}$$

同理 $$\overrightarrow{OM} = y\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{ON} = z\boldsymbol{k}$$

由此，得 $$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1}$$

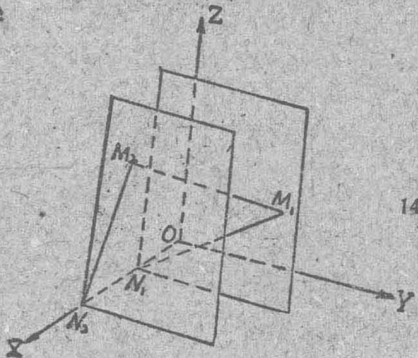
上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解式，其中 x, y, z 是向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标軸 OX, OY, OZ 上的射影，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标。

当一个向量的起点在坐标原点时，例如向量 $\overrightarrow{OA}$，我們常常称它为終点 A 的向徑，向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标恰恰就是它終点 A 的笛氏坐标。

如果已知一个向量的起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 終点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，那末向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标为：

$$l=x_2-x_1,\quad m=y_2-y_1\quad n=z_2-z_1$$

證：过点 M_1 和 M_2 各作平面垂直于 x-軸，并交 x-軸于点 N_1 和 N_2，如图(14)



14图

于是 $N_1N_2=$ 射影$_x\ \overrightarrow{M_1M_2}$

但 $N_1N_2=x_2-x_1$

所以 $l=x_2-x_1$

同理，得 $m=y_2-y_1, n=z_2-z_1$

因此，一个向量的坐标，等于它的終点的坐标减去它的起点的坐标，特別，当向量的起点为 O 而終点为 $M(x, y, z)$ 时，它的坐标就是：

$$l=x,\quad m=y,\quad n=z$$

以后都用下面的写法来表示：

$$\overrightarrow{OM}=(x,\ y,\ z),\ \overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

如上所述，已知一个向量，就可求出它在坐标軸上的射影，也就是說，可以求出它的坐标，反之，如果已知一个向量的坐标，我們就可以决定这个向量，也就是說，可以求出它的模数和方向，設已知向量 a 假設它的起点在坐标原点，終点为 A，则 $a=\overrightarrow{OA}$，于是向量 a 的坐标，就是它的終点 A 的坐标 (x, y, z)；过 A 作平行于坐标面的三个

平面，这三个平面与坐标平面構成一个長方体，它的对角綫長就是$|\overrightarrow{OA}|$，根据立体几何学，長方体的对角綫長的平方，等于它三个稜長的平方和，即

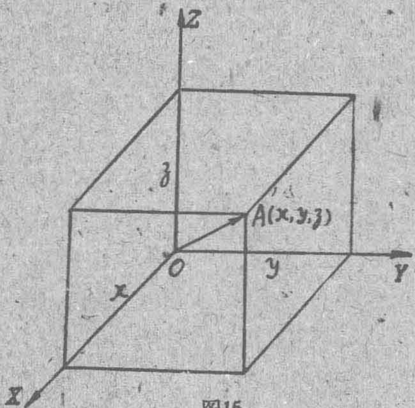


图15

$$|\overrightarrow{OA}|^2=x^2+y^2+z^2$$

或
$$|\overrightarrow{OA}|=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (1)$$

因此，向量的模数，等于它的坐标的平方和的平方根。

現令α, β, γ分别为向量$\overrightarrow{OA}$与軸OX, OY, OZ間的夾角，那末，根据射影定理，得

$$x=|\overrightarrow{OA}|\cos\alpha, \quad y=|\overrightarrow{OA}|\cos\beta, \quad z=|\overrightarrow{OA}|\cos\gamma$$

即
$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{x}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \cos\beta&=\frac{y}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{z}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

把公式(2)中的三个等式兩边各自平方，然后相加，得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (3)$$

在公式(2)里的 α,β,γ 称为向量 a 的方向角，而 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 称为它的方向余弦，再从公式(3)，得知任意向量的方向余弦的平方和，总是等于 1

如果一个向量的起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，終点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，那末它的坐标为 (x_2-x_1)，(y_2-y_1)，(z_2-z_1)，因而它的模数为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (4)$$

因为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模数就是点 M_1 与 M_2 間的距离，所以公式(4)就是兩点間的距离公式

現在利用向量，导出綫段的定比分割公式：

設已知二点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，要在直綫 AB 上求出一点 M，使得 $AM: MB=\lambda$。

因为向量 $\overrightarrow{AM}$ 和向量 $\overrightarrow{MB}$ 共綫，所以，得

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB} \qquad (5)$$

令点 M 的坐标为 (x, y, z)；那末向量 $\overrightarrow{AM}$ 的坐标为 $(x-x)$，$(y-y_1)$，$(z-z)$，而向量 $\overrightarrow{MB}$ 的坐标为 (x_2-x)，(y_2-y)，(z_2-z) 因此向量等式(5)用它他的坐标写出后，就是

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\quad y-y_1=\lambda(y_2-y)\quad z-z_1=\lambda(z_2-z)$$

或 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (6)$$

特别，当 $\lambda=1$ 时，M 为綫段 AB 的中点，这时

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (7)$$

§7、6 向量的数量积

定义 兩个向量的模数与它們夾角的余弦的連乘积，称为这二向量的数量积。