高等学校教材

教育部《世行贷款》项目

线性代数与空间解析几何

例题分析与解题指导

俞钟祺　扬卫疆
苗文利　任传荣　主编

科学技术出版社

高等学校教材

教育部《世行贷款》项目

线性代数与空间解析几何

例题分析与解题指导

俞钟祺　杨卫疆　苗文利　任传荣　主编

TJKJ 天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何例题分析与解题指导/俞钟祺等编.—天津:天津科学技术出版社,2002.12
高等学校教材
ISBN 7-5308-3466-5

Ⅰ.线… Ⅱ.俞… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料②空间几何:解析几何-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2②0182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第024532号

责任编辑:李树云
版式设计:雒桂芬 周令利
责任印制:王 莹

天津科学技术出版社出版·发行
出版人:胡振泰
天津市张自忠路189号 邮编300020 电话(022)27306314
天津市永兴印刷厂印刷
*
开本787×1092 1/16 印张18 字数440 000
2002年12月第1版
2002年12月第1次印刷
印数 1 3 000
定价:25 00元

前　　言

线性代数与空间解析几何是大学数学教育中一门主要基础课程，对于培养面向21世纪人才起着重要作用。它既是学习后续课程的基础，又是从事各种科学技术、生产实践以及日常生活所必不可少的有力工具。为了培养跨世纪人才，作为世界银行贷款项目的内容，天津市数学教学研究会组织天津工业大学、天津科技大学、中国民航学院、天津城建学院、天津理工学院、天津商学院、解放军军事交通学院以及河北工业大学等院校有多年教学经验的老教师和具有博士、硕士学位的中青年骨干教师，依据原国家教委颁布的《工程数学课程教学基本要求》、高等学校财经专业核心课程《经济数学基础》教学大纲及经济管理类专业《高等数学(二)自学考试大纲》的要求，根据面向21世纪改革的基本精神共同编写了《线性代数与空间解析几何例题分析与解题指导》一书，该书根据教学大纲要求，围绕线性代数与空间解析几何基本概念、基本理论和基本方法，精选了典型例题进行分析，对于有一定难度的题目给予了解题方法的指导。主要目的是为了帮助学生切实提高解题能力、学会解题方法、归纳解题技巧。通过学习线性代数与空间解析几何课程，达到提高学生素质的目的。本书可作为理工类、经济管理类及应用数学专业的本、专科的教材，也是报考研究生人员及工程技术、经济管理类人员等的理想参考书。

参加编写的有：韩　雁(第一彰)，吴天毅(第二章)，苗文利(第三、第六章)，郑昌明(第四章)，宋眉眉(第五章)，杨卫疆(附录一、附录二)。由俞钟祺、扬卫疆、苗文利、任传荣主编。

在编写过程中，得到了天津市教委高教处以及天津地区各高等院校有关领导的大力支持，清华大学数学学院院长冯克勤教授在百忙之中也抽出时间对本书构架及编写要点给予了具体指导，在此谨致诚挚的谢意。

尽管全体编者做了很大努力，由于编著者水平所限，书中难免有疏漏之处，请广大读者批评指正。

编　者

2002年2月

目　　录

第一章　行列式 …… (1)

一、例题分析 …… (1)

二、解题指导 …… (16)

第二章　矩阵 …… (58)

一、例题分析 …… (58)

二、解题指导 …… (71)

第三章　向量组的线性相关性与矩阵的秩 …… (96)

一、例题分析 …… (96)

二、解题指导 …… (108)

第四章　线性方程组 …… (135)

一、例题分析 …… (135)

二、解题指导 …… (149)

第五章　相似矩阵与二次型 …… (168)

一、例题分析 …… (168)

二、解题指导 …… (177)

第六章　线性空间与线性变换 …… (209)

一、例题分析 …… (209)

二、解题指导 …… (216)

附录一　1989～1999 年线性代数考研试题解答 …… (246)

附录二　实用程序 …… (278)

一、集合及其运算 …… (278)

二、向量和矩阵 …… (279)

三、矩阵函数 …… (281)

第一章 行 列 式

一、例 题 分 析

例 1 (1)假设 n 个数码的排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 的逆序数为 N,问排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 的逆序数是多少?

(2)举例说明,由 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 可以经过不同的对换得到排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$.并证明对换个数的奇偶性不变.

解 (1)排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 中的任意两个不同的数 $i_s, i_t (s<t)$,在且仅在排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 或 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 中之一构成一个逆序,而这两个排序的逆序数总和应为 C_n^2,故知排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 的逆序数为

$$C_n^2 - N = \frac{n(n-1)}{2} - N.$$

(2)不妨以 3 元排列为例.

比如 231 和 312 是 2 个 3 元排列,可有

$$231 \xrightarrow{(2,1)} 132 \xrightarrow{(1,3)} 312$$

$$231 \xrightarrow{(2,3)} 321 \xrightarrow{(1,2)} 312$$

$$231 \xrightarrow{(1,3)} 213 \xrightarrow{(1,2)} 123 \xrightarrow{(3,2)} 132 \xrightarrow{(1,3)} 312$$

从上述三种不同的对换易见由 231 对换成 312 均经过了偶数次对换.事实上这个结论具有一般性.要证明由排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 经过对换得排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,对换个数的奇偶性不变,可借助自然顺序排列 $12 \cdots n$,因为总可以做到

$$i_1 i_2 \cdots i_n \xrightarrow{t\text{ 次交换}} 12 \cdots n \xrightarrow{s\text{ 次交换}} j_1 j_2 \cdots j_n$$

而无论 t 与 s 值为何,它们分别与 $i_1 i_2 \cdots i_n$, $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的奇偶性相同,故知,对换个数的奇偶性完全由排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的奇偶性决定.

例 2 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$ 其中 $a_i (i=1,2,\cdots,n-1)$ 为互不相同的数,

(1)由行列式定义,说明 $f(x)$ 是一个 $(n-1)$ 次多项式;

(2)由行列式性质,求方程 $f(x)=0$ 的根.

解 (1)由于 $f(x)$ 这个行列式中只有第一行的元素含有 x 项,由行列式定义知,这一行元素在展开式中不可能同时在一项中取值,每项只取其一,而 x 的最高次数为 $(n-1)$ 次,所以

$f(x)$是一个$(n-1)$次多项式.

(2)因为$f(x)$是一个$(n-1)$次多项式,所以方程$f(x)=0$至多有$(n-1)$个根,而

$$f(x)\xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 0 & a_1-x & a_1^2-x^2 & \cdots & a_1^{n-1}-x^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1}-x & a_{n-1}^2-x^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-x^{n-1} \end{vmatrix}$$

由第2行至第n行每行分别提公因子$(a_1-x),\cdots,(a_{n-1}-x)$,得

$$f(x)=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & a_1+x & \cdots & a_1^{n-2}+a_1^{n-3}x+\cdots+x^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & a_{n-1}+x & \cdots & a_{n-1}^{n-2}+a_{n-1}^{n-3}x+\cdots+x^{n-2} \end{vmatrix}$$

又因为$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$互不相同,所以方程的根为$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$.

本题要求很好地掌握行列式定义,以便简洁清楚地回答所提问题.

例3 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

解 此行列式特点是每行元素之和均相等,可先将第2列至第n列加到第1列上去,提公因子后,利用行列式性质化为三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} b+\sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ b+\sum_{i=1}^n a_i & a_2+b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b+\sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^n a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$(b+\sum_{i=1}^n a_i)\begin{vmatrix} 0 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & -b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & -b \\ 1 & a_2 & \cdots & & a_n+b \end{vmatrix}=(-b)^{n-1}(b+\sum_{i=1}^n a_i)$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}(b+\sum_{i=1}^n a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^n a_i)$$

例4 计算$n+1$阶行列式

---

* 为表述方便,以r_i表示行列式的第i行,以c_j表示行列式的第j列;$r_i\times k$(或$c_i\times k$)表示第i行(或列)乘以k;$r_i+r_j\times k$(或$c_i+c_j\times k$)表示以数k乘第j行(或列)加到第i行(或列)上.

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$$

解 此行列式特点是除第 1 行、第 1 列及主对角线上有非零元素外，其余元素全为零，利用行列式性质化为三角形行列式

$$D_{n+1}\xlongequal[(i=1,2,\cdots,n)]{r_1+r_{i+1}\times(-\frac{1}{a_i})}\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n$$

一般来讲，利用行列式性质化为三角形行列式计算结果的方法是计算行列式的基本方法，如上两题但对某些行列式直接运用则计算量不一定小，往往需要配合其它技巧与方法.如下面两例.

例 5 计算 n 阶行列式 $D_n=\triangle(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=|i-j|$

解 这是一个对称行列式，且相邻行对应元素相差 ± 1

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_1-r_2 \\ r_2-r_3 \\ \vdots \\ r_{n-1}-r_n}}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(j=1,2,\cdots,n-1)]{c_j+c_n}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，有

$$D_n=(-1)^{n+1}(n-1)\begin{vmatrix}2&2&2&\cdots&1\\0&2&2&\cdots&1\\0&0&2&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}_{(n-1)}=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$$

例 6 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1+a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&x_2+a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&x_n+a_n^2\end{vmatrix}\quad(x_i\neq0,i=1,2,\cdots,n)$$

解 这也是一个对称行列式，但用上题解法不适宜. 本题利用"升阶法"，即在保持行列式值不变的情形下，合理地添加一行一列，再计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\a_1&x_1+a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2&a_2a_1&x_2+a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n&a_na_1&a_na_2&\cdots&x_n+a_n^2\end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$\xlongequal[(j=1,2,\cdots,n)]{c_{j+1}+c_1\times(-a_j)}\begin{vmatrix}1&-a_1&-a_2&\cdots&-a_n\\a_1&x_1&0&\cdots&0\\a_2&0&x_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_n&0&0&\cdots&x_n\end{vmatrix}_{(n+1)}$$

利用例 4 的方法便可得

$$D_n=(x_1x_2\cdots x_n)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x_i}\right)$$

当然，此题若保证 $a_i\neq0$，也可以先提各行及各列的公因子 a_i，那么

$$D_n=a_1^2a_2^2\cdots a_n^2\begin{vmatrix}1+\frac{x_1}{a_1^2}&1&\cdots&1\\1&1+\frac{x_2}{a_2^2}&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1+\frac{x_n}{a_n^2}\end{vmatrix}$$

然后继续采取升阶或其它方法计算.

例 5 运用了按行(列)展开，将行列式降阶；例 6 是采取升阶的办法，正确、恰当地升阶，不是增大运算，而是要减少运算，这一技巧不容忽视. 升、降阶的目的均是为了化成三角形行列式，方便运算.

例 7 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

证明 利用行列式性质拆分行列式.将左式拆成 2^n 个 n 阶行列式,并将值为零的行列式略去,有

$$左式 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & 1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$x\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\left(\sum_{i=1}^{n}A_{i1} + \sum_{i=1}^{n}A_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n}A_{in}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij} = 右式.$$

证毕

例 8 证明

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

证明 事实上,若例 7 中,令 $x=1$,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

两个行列式都将前一列减去后一列

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n}+1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & a_{2n}+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn}+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n} \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

证毕

例 9 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} (a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & \cdots & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & \cdots & (a-1)^{n-2} & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-n+1 & a-n+2 & \cdots & a-1 & a \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 此行列式与范德蒙行列式很相似,但不是范德蒙行列式。可通过交换行变换成范德蒙行列式。具体做法是:将第 n 行依次与第 $n-1$ 行、$n-2$ 行、…2 行、1 行交换,这样第 n 行换到第 1 行位置;按上述方法,继续将新的第 n 行,也即原引列式的第 $n-1$ 行换到第 2 行的位置;…….如果类似地经过如下次数地换行

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

得到范德蒙行列式。故有

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a-n+1 & a-n+2 & \cdots & a-1 & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a-n+1)^{n-2} & (a-n+2)^{n-2} & \cdots & (a-1)^{n-2} & a^{n-2} \\ (a-n+1)^{n-1} & (a-n+2)^{n-1} & \cdots & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}[(a-n+i)-(a-n+j)]$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)$$

例 10 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^{\ 2} & x_2^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{\ n-2} & x_2^{\ n-2} & \cdots & x_n^{\ n-2} \\ x_1^{\ n} & x_2^{\ n} & \cdots & x_n^{\ n} \end{vmatrix}$$

解 此行列式看似范德蒙行列式,实际并非范德蒙行列式,但可借助一个 $n+1$ 阶的范德蒙行列式来计算. 令

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^{\ 2} & x_2^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ 2} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{\ n-2} & x_2^{\ n-2} & \cdots & x_n^{\ n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{\ n-1} & x_2^{\ n-2} & \cdots & x_n^{\ n-1} & x^{n-1} \\ x_1^{\ n} & x_2^{\ n} & \cdots & x_n^{\ n} & x^n \end{vmatrix}_{n+1}$$

其中 $f(x)$中元素 x^{n-1}的余子式即为 D_n,故若将 $f(x)$按最后一列展开,展开式中 x^{n-1}的系数即为$(-1)^{n+n+1}D_n=-D_n$. 因为 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$

所以 x^{n-1}的系数为$-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$

故 $D_n=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$

例 11 利用范德蒙行列式计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1}y_1 & x_1^{n-2}y_1^2 & \cdots & x_1y_1^{n-1} & y_1^n \\ x_2^n & x_2^{n-1}y_2 & x_2^{n-2}y_2^2 & \cdots & x_2y_2^{n-1} & y_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1}y_{n+1} & x_{n+1}^{n-2}y_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}y_{n+1}^{n-1} & y_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

这里 $x_i, y_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n+1$.

解 先将第 i 行提公因子$x_i^n(i=1,2,\cdots,n+1)$

$$D_{n+1}=\prod_{i=1}^{n+1}x_i^n\begin{vmatrix} 1 & \frac{y_1}{x_1} & (\frac{y_1}{x_1})^2 & \cdots & (\frac{y_1}{x_1})^{n-1} & (\frac{y_1}{x_1})^n \\ 1 & \frac{y_2}{x_2} & (\frac{y_2}{x_2})^2 & \cdots & (\frac{y_2}{x_2})^{n-1} & (\frac{y_2}{x_2})^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} & (\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}})^2 & \cdots & (\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}})^{n-1} & (\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}})^n \end{vmatrix}$$

上述行列式为范德蒙行列式的转置行列式,故

$$D_{n+1}=\prod_{i=1}^{n+1}x_i^n\prod_{1\leqslant k<j\leqslant n+1}\left(\frac{y_j}{x_j}-\frac{y_k}{x_k}\right)=\prod_{1\leqslant k<j\leqslant n+1}(x_ky_j-x_jy_k)$$

例 12 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

解 此行列式从右下方往左上方看，其特点是 D_n 与 D_{n-1} 具有相同结构，且各列仅有两个非零元素，故采用“递推法”来计算．先按第 1 列展开，便有递推公式

$$D_n=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n$$

所以 $D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1},D_{n-2}=xD_{n-3}+a_{n-2},\cdots,D_3=xD_2+a_3$

而 $D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x(x+a_1)+a_2$

综上 $D_n=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

例 13 证明 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta},(\alpha\neq\beta)$$

证法一 此题具有 D_n 与 D_{n-1} 结构相同的特点，可利用“递推法”证明．按第 1 列展开后，再将展开后的第二项 $(n-1)$ 阶行列式按第 1 行展开，有递推公式

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2} \qquad ①$$

这是关于 D_n,D_{n-1},D_{n-2} 三者间的递推关系，若运用上例方法直接地逐阶向下推较繁，而本题具有 α 与 β 的对称性，那么可将①式先变形为

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$$

由此可得 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\beta^{n-2}[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)]=\beta^n$ ②

相应地有

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n \qquad ③$$

②$\times\beta-(3)\times\alpha$，有

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

证法二 用第二数学归纳法证明

当 $n=1$ 时，$D_1=\alpha+\beta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$，成立；

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$，成立；

假设当 $n\leqslant k$ 时，结论成立，下面计算 $n=k+1$ 时的结果，由证法一递推公式①有

$$
\begin{aligned}
D_{k+1} &= (\alpha+\beta)D_k - \alpha\beta D_{k-1} \\
&= (\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}\right) - \alpha\beta\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\right) \\
&= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}) - \alpha\beta(\alpha^k-\beta^k)}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{\alpha^{k+2}-\beta^{k+2}}{\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

故由归纳假设知

$$D_n = \frac{\alpha^{n+}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

证毕

若 $\alpha=\beta$,那么由(2)式可知 $D_n=\alpha D_{n-1}+\alpha^n$,类推下去,有 $D_n=(n+1)\alpha^n$.

一般在证明题中,结论与行列式的阶数 n 有关时,可以考虑用数学归纳法来证明.事实上,本题具有递推、归纳综合性.对于高阶行列式,递推法和数学归纳法也属于比较常用的方法.

例 14 设 $D=\Delta(a_{ij})$,试证 $A=\Delta(A_{ij})=D^{n-1}$,其中 A_{ij} 为 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.称 A 为 D 的伴随行列式.

证明 由行列式的展开定理知

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \qquad ㊟$$

根据行列式乘法规则,有

$$
DA = DA' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & D \end{vmatrix} = D^n
$$

当 $D\neq 0$ 时,则 $A=D^{n-1}$,成立.

当 $D=0$ 时,则必有 $A=0$.事实上假若 $A\neq 0$,则由克莱姆法则知,以 A 为系数行列式的齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = 0 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_1 + \cdots + A_{2n}x_n = 0 \\
A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n = 0
\end{cases}
$$

有且只有惟一零解.而当 $D=0$,由㊟可知 D 中每行元素均为方程组的解,所以 $a_{ij}=0(i,j=1,3,\cdots,n)$,那么 $A_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$,这与 $A\neq 0$ 相矛盾,假设不成立.

综上 $A=D^{n-1}$

证毕

本题的关键在于巧妙地运用了行列式展开定理及行列式乘法运算,将 D 与 A 沟通起来,另外也给出了一个较好的结果:行列式与其伴随行列式的乘积是一个以 D 为主对角线上元素的对角行列式.

例 15 用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+8x_4=1 \\ x_1+3x_2+9x_3+27x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-2x_2+4x_3-8x_4=0 \end{cases}$$

解 系数行列式是范德蒙行列式的转置

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}=(3-2)(-1-2)(-2-2)(-1-3)(-2-3)(-2+1)$$

$$=-240\neq 0$$

由克莱姆法测,方程组有且有惟一解

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 9 & 27 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}=3\times(-1)\times(-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=6(-1-3)(-2-3)(-2+1)=-120$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 9 & 27 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -8 \end{vmatrix}=-140 \qquad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 27 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -8 \end{vmatrix}=0$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}=20$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{2},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{7}{12},x_3=\frac{D_3}{D}=0,x_4=\frac{D_4}{D}=-\frac{1}{12}$$

例 16 设 ω 是 1 的虚立方根,利用拉普拉斯展开定理计算 6 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ x_1 & x_2 & 1 & 1 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 & \omega^2 & y_3 & \omega \\ z_1 & z_2 & 1 & \omega & z_3 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & 0 & 0 & \omega & 0 \end{vmatrix}$$

解 选取 D 的第 1、2、6 行,则包含这三行的所有 3 阶子式中仅有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}\neq 0$$

故由拉普拉斯展开定理有

$$D=(-1)^{(1+2+6)+(1+2+5)}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega^2&\omega\\1&\omega&\omega^2\end{vmatrix}$$

$$=\left[\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}\right]^2=[(\omega^2-1)^2-(\omega-1)^2]^2=[(\omega^2-\omega)(\omega^2+\omega+1-3)]^2$$

由于 ω 是 1 的虚立方根，所以 $\omega^3=1,\omega^4=\omega,\omega^2+\omega+1=0$，故 $D=-27$.

例 17 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\qquad(x\neq a)$$

解法一 此行列式每行元素之和均相等，可先将各列加到第 1 列上.

$$D_n=\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&\cdots&a\\x+(n-1)a&x&a&\cdots&a\\x+(n-1)a&a&x&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x+(x-1)a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\1&x&a&\cdots&a\\1&a&x&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\ \vdots\\ r_n-r_1}]{r_2-r_1}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\0&x-a&0&\cdots&0\\0&0&x-a&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

解法二 注意到此行列式除主对角线外所有元素均为 a，可先将各行减去第一行.

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a-x&x-a&0&\cdots&0\\a-x&0&x-a&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a-x&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+(c_2+c_3+\cdots+c_n)}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&a&\cdots&a\\0&x-a&0&\cdots&0\\0&0&x-a&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

解法三 利用“升阶法”

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a & a & a & \cdots & a\\ 0 & x & a & a & \cdots & a\\ 0 & a & x & a & \cdots & a\\ 0 & a & a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}\xlongequal[r_{n+1}-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots}}\left|\begin{matrix}1 & a & a & a & \cdots & a\\ -1 & x-a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a\end{matrix}\right|_{n+1}$$

$$\xlongequal[(j=2,3,\cdots,n+1)]{c_1+c_j\times\frac{1}{x-a}}\begin{vmatrix}1+\dfrac{na}{x-1} & a & a & a & \cdots & a\\ 0 & x-a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}=\left[1+\frac{na}{x-a}\right](x-a)^n$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

解法四 利用“逆推法”，先将第 1 列元素视为两数之和，即 $x=(x-a)+a$，$a=0+a$，由行列式性质拆开

$$D_n=\begin{vmatrix}x-a & a & a & \cdots & a\\ 0 & x & a & \cdots & a\\ 0 & a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a & a & \cdots & a\\ a & x & a & \cdots & a\\ a & a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

第二个行列式的各行减去第 1 行

$$D_n=(x-a)D_{n-1}+\begin{vmatrix}a & a & a & \cdots & a\\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}$$

所以
$$\begin{aligned}D_n&=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}\\ &=(x-a)[(x-a)D_{n-2}+a(x-a)^{n-2}]+a(x-a)^{n-1}\\ &=(x-a)^2D_{n-2}+2a(x-a)^{n-1}\\ &=(x-a)^2[(x-a)D_{n-3}+a(x-a)^{n-3}]+2a(x-a)^{n-1}\\ &=(x-a)^3D_{n-3}+3a(x-a)^{n-1}\\ &\ \vdots\\ &=(x-a)^{n-1}D_1+(n-1)a(x-a)^{n-1}\end{aligned}$$

其中 $D_1=x$，故有

$$D_n=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$$

解法五 利用“数字归纳法”

当 $n=1$ 时，$D_1=x=[x+(1-1)a](x-a)^{1-1}$

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}x & a\\ a & x\end{vmatrix}=x^2-a^2=[x+(2-1)a](x-a)^{2-1}$