

数学 学习方法的 革命

沈仁广 著

“做中学数学”案例选

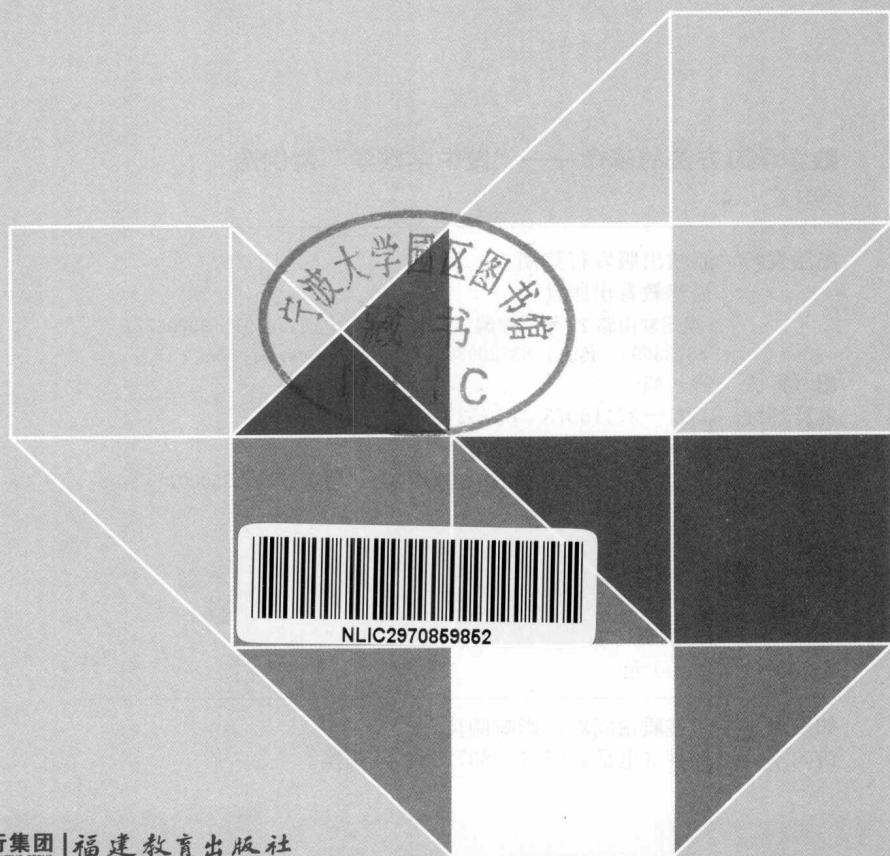


海峡出版发行集团 | 福建教育出版社

数学 学习方法的 革命

沈仁广 著

“做中学数学”案例选



图书在版编目 (CIP) 数据

数学学习方法的革命：“做中学数学”案例选/沈仁广著. —福州：福建教育出版社，2012.12
ISBN 978-7-5334-5763-1

I. ①数… II. ①沈… III. ①中学数学课—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 318390 号

数学学习方法的革命——“做中学数学”案例选

沈仁广 著

出版发行 海峡出版发行集团
福建教育出版社
(福州梦山路 27 号 邮编：350001 电话：0591-83706771
83733693 传真：83726980 网址：www.fep.com.cn)

出版人 黄旭

发行热线 0591-87115073 83752790

印刷 福州三才印刷有限公司
(福州市仓山科技园叶下工业小区 116 号 邮编：350001)

开本 720 毫米×1000 毫米 1/16

印张 12.25

字数 183 千

版次 2012 年 12 月第 1 版 2012 年 12 月第 1 次印刷

书号 ISBN 978-7-5334-5763-1

定价 29.00 元

如发现本书印装质量问题，影响阅读，
请向本社出版科（电话：0591-83726019）调换。

前言

义务教育《数学课程标准》(2011年版)(中华人民共和国教育部制定)把中学数学课程内容划分为“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个部分,并明确规定“‘综合与实践’内容设置的目的在于培养学生综合运用有关知识与方法解决实际问题,培养学生的问题意识、应用意识和创新意识,积累学生的活动经验,提高学生解决现实问题的能力。”2011版《数学课程标准》还对“综合与实践”的学习内容,学习形式与方法做了如下界定,即:“‘综合与实践’是一类以问题为载体,以学生自主参与为主的学习活动。在学习活动中,学生将综合运用‘数与代数’‘图形与几何’‘统计与概率’等知识和方法解决问题。‘综合与实践’的教学活动应当保证每学期至少一次,可以在课堂上完成,也可以课内外相结合。提倡把这种教学形式体现在日常教学活动中。”《数学课程标准》对“综合与实践”课程目的、内容、学习形式与方法等方面,虽然都进行了详细的规定,但囿于当前国内不同地区数学教育水平、教学人员的理念与学科素养方面的参差不齐以及配套学习材料和教学经验的欠缺等原因,中学数学教学偏重“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”等传统知识内容的做法仍然是一种普遍的现象。为此,我们一直有要编撰一本既能符合初中学生的认知发展水平、体现新课标的要

求，又能更好地引导教师和学生进行数学“综合与实践”学习的新材料的冲动。凭借我们对中学数学教学的研究以及积累的实际教学活动经验，经过多年的努力，现在终于将本书呈现给广大初中学生、一线教师和教学研究人员，也算完成了一个夙愿。

1 本书编撰思想及主要内容：

本书以义务教育初中《数学课程标准》为基础，以人教版《数学》（初中）教材为依托，精选部分与教材内容有关联的、重要的数学概念、法则和结论等内容编成一系列数学问题，让学生借助常用的认知工具——《几何画板》为操作和实验平台，以符合学生认知基础和认知水平的、深入浅出的“问题串”为导引，指导学生通过构造模型、操作实验、类比辨析和举一反三等自主性的操作实验和探究性学习对初中数学中重要的基本概念和结论等进行“再学习”或“再创造”，实现“在做中学数学”。

本书编撰过程中遵循“问题——实验与操作——类比、辨析、归纳和演绎推理——建构或再认识数学”的认知框架，激发学生自主学习和研究数学的兴趣，渗透初步的数学学习和研究的方式方法。本书试图在新课改背景下对教师教的方式和方法提供一个新的视角，为学生发现中学数学的重要概念和结论的本质和找寻数学的普遍联系提供资源和方法，同时也为新课程倡导的“综合与实践”等课题学习提供素材。本书所有的问题都源于教材但高于教材，基于本教材的学习属于课堂学习的自然延伸，我们期望本书能在培养中学生良好的自主学习习惯，优化学生的数学学习方式和方法方面做出尝试，为数学学习和探索兴趣较高的优秀学生开辟一个新颖独特的自主学习环境，为一线教师和研究者提供一定的课程资源，同时也为有条件的学校和地区构建相对开放的、具有一定交互性的网络学习平台提供课题学习的资源。

本书前三章为《几何画板》(5.05版)基本操作教程，旨在引导学生通过自学，理解与掌握《几何画板》的初级操作技能，为后续学习打下必要的操作基础；第四和第五章是一系列独立编排的、以问题为中心且基于《几何画板》为实验探究学习平台的数学综合实践学习案例。这两章的学习脉络均以“情境——数学问题——实验与操作——类比、辨析、归纳和演绎推理——建

构或再认识数学”的结构形式展开。其中第四章以直接与教材内容相匹配，在实验和探究手段与方法上相对简单的基本内容为主；第五章则以与综合程度较高的数学知识相关联，实验和探究的方法与技巧较复杂以及由情境和数学问题经实验和论证形成数学结论的抽象程度或理性成分较高的问题组成。这样的安排为的是能更有利于因材施教，让不同认知水平的学生都能挑选适性的学习材料组织学习。

2 本书的主要特点：

2.1 学习内容的综合性与实践性的统一

本书旨在为当前中学数学“综合与实践”课程学习提供一个以《几何画板》为实验、探究操作平台，以解决与学生的认知水平和生活经验相适切的综合实践问题为主线的自主学习材料，因此，综合性与实践性是本书选取学习内容的基本要求。学习内容的综合性主要体现在数学知识内容的综合、数学实验和探究方法和手段的综合、数学思想和方法渗透方面的综合。实践性是指本书所有实验验证和探究学习的结论都是建立在学习者利用《几何画板》的操作实验的亲身体验和归纳总结的基础上而得出。这种综合性与实践性的统一为进一步提升中学生“发现数学”“研究数学”“用数学”的能力是大有裨益的。

2.2 学习形式的自主性与计划性的统一

本书所列的学习材料均是相互独立的，学习者可以凭借自己的学习兴趣和知识能力基础自主选择学习，也可以在学校教学人员的系统安排下结合各自的教学进度挑选合适的课题组织学生学习，这种自主性与计划性相结合的学习形式有利于充分调动学习者的兴趣，并使其产生程度强烈的、时间较持久的学习热情，进而能从根本上改变学习者的被动学习为主动学习，提高学习者的学习质量。

2.3 学习方法的操作性与思辨性的统一

数学学习理论表明：数学学习通常具有“过程性”和“对象性”的双重性，从某种意义上讲，数学学习其实也就是操作性与思辨性的统一。然而，当前绝大多数应用《几何画板》软件辅助数学学习材料中，都存在着过多的

关注将复杂的空间结构和变化的数量特征用直观的操作形式展示出来的做法，这种做法的最大问题是淡化了这些软件的认知功能。为有效改变这种重操作轻思维训练的倾向，本书除了将所有学习材料的呈现和发展都建立在学习者的自主操作实验基础之上外，还采取引导和示范的方法，影响学生用理性思维去研究和论证相关的空间结构和数学特征背后的数学规律，并最终形成科学的结论，我们认为这样的做法能更好地培养学生的数学思维能力。

2.4 学习过程的探究性和问题性的统一

数学探究学习是对数学问题的探究。同单纯着力于寻求并掌握对数学问题探究的方式、方法要求相比较，我们认为发现并形成数学问题的能力显得更加重要。当前多数的数学探究学习课题和探究学习本身在很大程度上还仍然停留在忽视学习者发现、概括和形成数学问题的“伪探究”学习状态。为改变这一现状，本书在编撰过程中充分利用探究性与问题性相结合的原则，进行了旨在既重视探究与操作实验方法的介绍，又充分关注引领学习者从情境出发，自主地概括和形成数学问题的内容呈现方式的改革，以期能有效地培养学生的数学问题意识，提高数学探究学习能力。

2.5 学习评价的多样性与时效性的统一

传统的探究学习评价存在评价形式、评价内容和评价方式等方面过于单一的缺陷。在现代教育技术支撑下，以《几何画板》软件为操作实验平台的数学综合实践学习环境，能有效地改变对数学探究学习过程评价方面的不足。因为《几何画板》的所有操作都是以保持几何关系或数量关系为前提的，而高层次的数学学习就是要弄清数学对象之间各种错综复杂的关系，比如：挑选一个点和一条直线，我们能做的构图通常就是作过已知点且与已知直线平行或垂直的直线；如果从两者的关系上来考虑，无非就是直线是否通过该点或该点是否在这条直线上。因此，利用《几何画板》这一特征就可以让学习者在操作实践过程中加深对数学对象之间的关系的关注与理解；反过来，一个不合逻辑的操作，往往反映的就是学习者对某一数学概念和学习过程的一种不正确的理解，这样其实也就形成了对学习者的—种即时的学习评价。只有当你理解正确了，操作过程合逻辑了，你的实验或探究学习才能得以继续，这种不断尝试错误的过程其实就是个体学习过程中元认知的监控过程。另外，

假如我们能把本书的学习内容与网络平台结合起来，并做到在一定程度上师生和生生之间的互动，就可以形成学校学习和课内学习在校外和课外的自然延伸，因此，这种对学习者学习评价的多样性与时效性的统一，也会极大的提高学习者的时间利用率和学习质量。

虽然本书立足为当前国内“综合与实践”课程学习提供一种视角和学习材料，但由于编者的水平有限，能否达成这一目的还有待专家和同仁们的指点，书中的缺点和错误也一定在所难免，这些都有待在将来与专家和同行的交流、学习中得以改正。

我愿借此机会感谢我的夫人王为芹一直以来对我的支持与全身心的付出，才使我能有充裕的精力和时间完成本书的编撰工作。同时，我也要感谢南京市建邺区部分青年教师参与了部分课题的研讨，其中特别是崔竞和陈敏婕两位老师还对本书稿做了精心的校对。最后，我还要特别感谢福建教育出版社的沈群先生，正是由于他的精心策划和组织，才能保证本书得以顺利出版。

沈仁广

2012年9月于南京

目 录

前言	1
第一章 画板的世界	1
1.1 几何画板的启动与绘画工具的介绍	1
1.2 用绘画工具绘制简单的组合图形	6
1.3 对象的选取、删除和拖动	13
1.4 对象的标签	18
第二章 用构造菜单作图	22
2.1 点的作法	24
2.2 直线型的构造	26
2.3 圆型线的构造(圆、圆弧)	29
2.4 圆型内部的构造	34
2.5 点的轨迹的构造	36

第三章 用变换菜单作图	42
3.1 功能范例	42
3.2 旋转对象	44
3.3 平移对象	48
3.4 缩放对象	52
3.5 反射对象	54
3.6 迭代与深度迭代	56
第四章 基础编	62
4.1 三角形的高、中线和内角平分线必定交于一点吗	62
4.2 探索距离之和最短问题	68
4.3 平行四边形判定知多少	72
4.4 直角三角形中的相似分割问题	81
4.5 时钟上的数学问题	87
4.6 一次函数 $y=kx+b$ 的图象肯定是一条直线吗	95
4.7 四边形性质知多少	99
第五章 提高编	104
5.1 等腰梯形的四等分问题	104
5.2 台球桌上的数学问题	109
5.3 有五个元素相等的两个三角形就一定全等吗	115
5.4 抛物线的开口有大小吗	120
5.5 相遇几率知多少	129
5.6 四边形的完全覆盖问题	134
5.7 这样的图形有几种	154
5.8 正三角形的几个性质	160

5.9 这样的点存在吗	167
5.10 你能找出这个“证明”的错误吗	172
5.11 你能用几何方法求解一元二次方程的实数根吗	175
5.12 你会分割这个三角形吗	179

第一章 画板的世界

通过本章学习，你应该

1. 熟练使用绘图工具作“点”、“线”、“圆”；
2. 学会在几何对象上画“点”、“线”、“圆”；
3. 学会用绘图工具构造交点、等圆、直角等的构造技巧；
4. 学会“点”、“线”、“圆”的标签的显示和隐藏；
5. 理解用几何画板绘图应首先考虑对象间的几何关系。

1.1 几何画板的启动和绘图工具的介绍

启动几何画板：单击 Windows 桌面左下角的“开始”按钮，依次：选择“程序”→选择“几何画板 5.05”，单击即可启动几何画板。

进入几何画板系统后的屏幕画面如下图 1-1 所示。



图 1-1

几何画板的窗口是不是和其他 Windows 应用程序窗口十分类似？有控制菜单、最大和最小化以及标题栏，画板窗口的左侧是画板工具栏，画板的右边和下边可以有滚动条可以使小画板处理更大的图形。

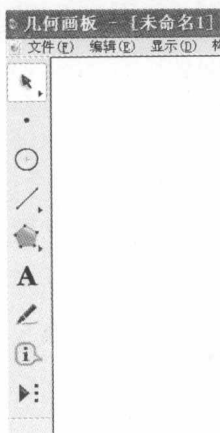


图 1-2

画板的左侧画板工具箱，如图 1-2，把光标移动到工具的上边，一会儿就会显示工具的名称，看看它们分别是什么？从上到下它们分别是【移动箭头工具】、【点工具】、【圆工具】、【线段直尺工具】、【多边形工具】、【文字工具】、【标记工具】、【信息工具】、【自定义工具】。

和一般的绘图软件相比，你会不会感觉它的工具是不是少了点？几何画板的主要用途之一是用来绘制几何图形。而几何图形的绘制，我们通常是用直尺和圆规，它们的配合几乎可以画出所有的欧氏几何图形。因为任何欧氏几何图形最后都可归结为“点”、“线”、“圆”。这种公理化作图思想因为“三大作图难题”曾经吸引无数数学爱好者的极大兴趣，从而在数学历史上影响重大，源远流长。从某种意义上讲几何画板绘图是欧氏几何“尺规作图”的一种现代延伸。因为这种把所有绘图建立在基本元素上的做法和数学作图思维中公理化思想是一脉相承的。

按住工具框的边缘，可随意拖动到画板窗口的任何位置，不同位置形状不同。试一试，能否拖到某一个地方，工具框变成如下形状？如图 1-3。

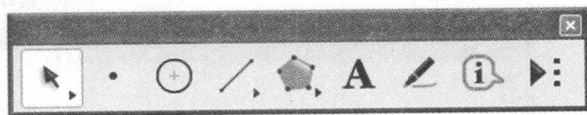


图 1-3

顾名思义，猜测一下它们都有何功能？



：选择和移动对象 这是它的主要功能，当然还有其他功能；



：画点 可以在画板绘图区任何空白的地方或“线”上画点，“线”可以是线段、射线、圆、轨迹、函数图像；



：画圆 只能画正圆，不能画椭圆；

: 画线 直尺工具用于画线段、射线和直线。

: 画多边形 可以画各种多边形(包括含内部的多边形);

: 文字工具 可以加说明性的文字等;

: 标记工具 这个工具有点像画笔的功能;

: 信息工具 可以标记画板中所有的对象,如:是独立的对象,还是父子关系对象等;

: 自定义工具 可以画几乎所有数学和物理学科的图形,该工具具有非常强大的绘画功能。

选择某项绘图工具时,用鼠标单击一下该工具即可。

试一试 能否画出下列图形,如图 1-4 所示。

画点: 单击【点工具】,然后将鼠标移动到画板窗口中单击一下,就会出现一个点。

画线: 单击【线段直尺工具】,然后拖动鼠标,将光标移动到画板窗口中单击一下,再拖动鼠标到另一位置松开鼠标,就会出现一条线段。

画圆: 单击【圆工具】,然后拖动鼠标,将光标移动到画板窗口中单击一下(确定圆心),并按住鼠标拖动到另一位置(起点和终点间的距离就是半径)松开鼠标,就会出现一个圆。

画交点: 单击【移动箭头工具】,然后拖动鼠标将光标移动到线段和圆相交处(光标由变成横向,状态栏显示的是“点击构造交

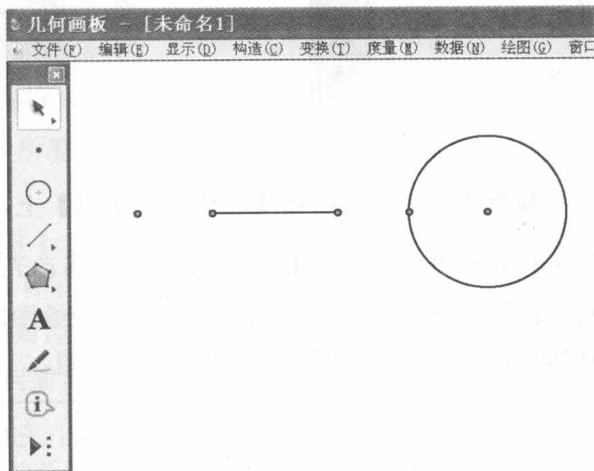


图 1-4

点”)单击一下,就会出现交点,如图1-5.

交点只能由线段(包括直线、射线)间、圆间、线段包括直线、射线与圆之间点击构造.

绘图工具的使用是不是比操作直尺和圆规更容易?

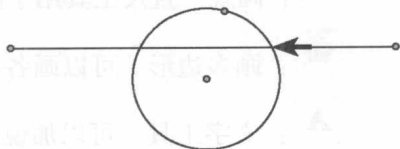


图1-5

如果你细心的话,你会发现【选择箭头工具】, 和【线段直尺工具】的右下角都有一个小三角,用鼠标按住它约一秒,看看会发生什么?

【移动箭头工具】展开,有三个工具,分别是:“移动”、“旋转”和“缩放”.(其用途见下一节)

【线段直尺工具】展开,也有三个工具,分别是:“线段”、“射线”和“直线”,如图1-6.我们知道了线段的画法后,如何用它来画射线和直线呢?

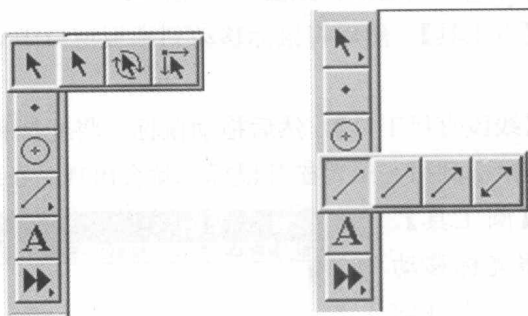
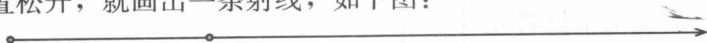


图1-6

画射线: 移动光标到【线段直尺工具】上,按住鼠标不放,待【线段直尺工具】展开后,不要松开鼠标,继续移动光标到射线工具上,松开鼠标,直尺工具变为.然后在画板绘图区,单击鼠标并按住鼠标拖动到适当位置松开,就画出一条射线,如下图:



(在几何画板里是看不见射线上的箭头,它向一端是无限延伸的.)

画直线: 依样画葫芦,你能否画一条直线?



(在几何画板里同样也是看不见直线上的箭头,它向两端是无限延伸的.)

你还会发现，用几何画板画出的线段、直线、射线和画圆，分别多了两点。一方面构造它们只要两点就够了，另一方面，它们可以被改变。如，单击【移动箭头工具】，移动光标到线段的端点处（注意光标会变水平）拖动鼠标，线段的长短和方向就会改变；正因为多出了“点”，才使它们有被改变的可能。

移动光标到线段的端点之间任何地方（光标成水平状）拖动鼠标，就可以移动线段。分别拖动一下直线、射线的点和线，尝试改变它们一下。

试一试 画一个圆，看能否改变圆的大小和位置，如图 1-7。

（提示：圆是由两个点来决定的，鼠标按下去的点即为圆心，松开鼠标的点即为圆上的一点。改变这两个点中的任意一点都可以改变圆。分别拖动圆心和圆周上的点，可改变圆的大小，拖动圆周，可移动圆。）

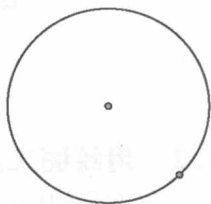


图 1-7

几何画板绘制的图形也非常容易加上标签。（你不妨和 word 的绘图比较一下。）

单击【文字工具】，光标由箭头变为手形  然后分别移动鼠标，当光标移到对象处，变为  单击鼠标，对象就有了标签。是不是很简单？

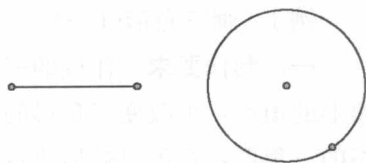


图 1-8

试一试 看能否将图 1-8 所有对象添上标签（见图 1-9）。

去掉标签也容易，只需对图 1-9 中的每一个对象，单击，标签就没有了。在几何画板中的每个几何对象都对应一个“标签”。当你在画板中构造几何对象时，系统会自动给你画的对象配标签。

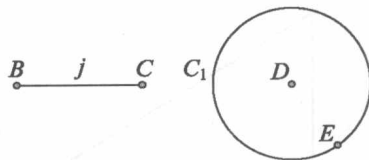


图 1-9

【文字工具】就是一个标签的开关，可以让几何画板中每个几何对象的标签显示和隐藏。当然如果你不想用几何画板为你提供的标签而要自己标记的话，只要对已有的标签双击，就会出现一个对话框，如图 1-10，然后手动输入文字，回车即可。

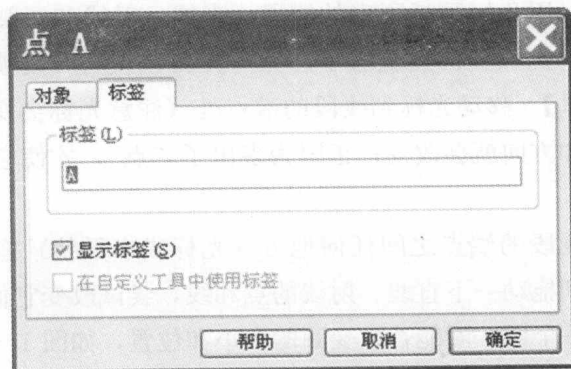


图 1-10

1.2 用绘图工具绘制简单的组合图形

下面我们用绘图工具来画一些组合图形，希望通过以下范例的学习，你能够熟悉绘图工具的使用和一些相关技巧。

例 1 画三角形（一）

一、制作要求 制成的三角形如图 1-11 所示，拖动三角形的顶点，可改变三角形的形状、大小。这个三角形是动态的三角形，它可以被拖成直角三角形、锐角三角形或钝角三角形之一，如图 1-12 所示。

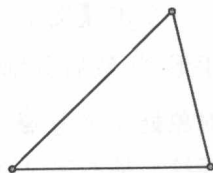


图 1-11

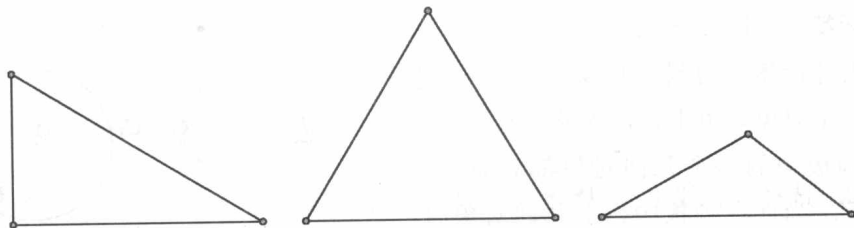


图 1-12

二、知识要点 熟悉“线段直尺工具”的使用，拖动图中的点改变其形状。

三、操作步骤 观察图 1-13，你能明白三角形就是用【线段直尺工具】画三条首尾相接的线段所组成的图形。