大學叢書

測量平差法

陳永齡
夏堅白 著
王之卓

商務印書館發行

大學叢書

測量平差法

陳永齡
夏堅白　著
王之卓

商務印書館發行

中華民國三十六年五月初版

(53612)

大學叢書 測量平差法 一冊

定價國幣拾貳元

印刷地點外另加運費

著作者 陳永齡 夏堅白 王之卓

發行人 朱經農 上海河南中路

印刷所 商務印書館 印刷廠

發行所 商務印書館 各地

著 者 序

二十八年秋，著者三人同在昆明，分別任教於同濟大學，西南聯大及中山大學。教學之際，深感國內關於測量課本及參考書籍之缺乏，學者苦之，乃有編輯測量學叢書之決心，而以測量平差法一書爲始。

觀測不能無誤差，此乃盡人皆知之事實，然如何配敷此等誤差，始能獲得最爲合理之結果，乃爲測量學中最基本之問題。解決此種問題之方法，卽名爲測量平差。測量平差之原理係以最小二乘法爲依據。本書所論，因僅限於最小二乘法在解算各種測量問題時之應用，故標以"測量平差法"以期名副其實。

本書編輯之初，首先整理名詞，審訂中譯，歷時半載；繼乃分別起稿，交換修改，研究增損，共歷二載，始告厥成。內容材料之選擇，以適作大學測量系課本爲原則，對於晚近各國採用之較新方法，俱爲詳加闡述，並輔以計算實例，俾使讀者易於領悟。大學土木系採用本書爲"最小二乘法"一科之課本時，若將書中敍述較詳之處，酌加減縮，亦能適用。全書共分十二章，前六章爲基本理論之闡述，後六章則分論各種測量平差問題之計算方法，幷舉實測之例以解釋之，足爲各種實用之參考。

著者於編校之際，雖已盡精詳審愼之能事，然遺誤之處，在所難免，尙祈國內賢者，不吝賜教是幸！

三十二年四月

目　次

測量平差法

（最小二乘法）

第一章　誤差分佈定律與最小二乘法之原理

第一節　多餘觀測

觀測時，不論量距離或角度，向同一對象繼續觀測二次以上，則各讀數間定有差異，蓋當時之環境儀器及觀測者之經驗，在在均有影響，致使觀測值與其應得之眞值不符。欲求觀測結果良好，必須謹愼從事。儀器應於工作之前加以校正。環境之變化，更須隨時注意。如在高塔測角而遇颶風，應卽停止；空氣溫度突變，觀測亦不宜繼續舉行。舉凡環境變化之擾動，雖屬不易控制，然若能採用適當方法，未嘗不能消除其一部份之影響，使其所發生之誤差，臻於至小。

至觀測者之本身，則在實施工作以前，除注意儀器及環境外，本身之情緒亦不可忽視。工作旣經開始，每一次觀測，不宜繼續過久，俾免疲乏。經驗豐富之觀測者，均能注意及之，故其對於所得之結果有深切之自信。

觀測旣不能免於誤差，爲求結果精密可靠，吾人常用兩法：一爲重複觀測，以視結果是否有誤；譬如欲求某距離之長度，必以測尺往返量之，視其相互差異之是否過大而平均之。如此則所得之結果可較精確，而觀測者且可從而斷判其量測之可靠與否。二爲利用數學關係，以驗核其觀測之結果。例如一三角形之形狀可由兩角度完全確定之，但爲免於誤差起見，常將第三角度同時測出，則三角之和必爲 $180°$，倘所測結果能完全滿足此條件，或在可能精度之內與此數學條件符合，卽可證明所測角度之値已屬精密可靠；否則必有重大誤差存於其間。無論複測或利用數學關係，吾人均須量測較必需更多之値，此種情形，名之曰多餘觀測。

第二節 誤差種類

凡有多餘觀測之時，所得之值，常不能符合無間，蓋因觀測誤差不能完全避免之故也。然誤差之種類甚多，有爲人力所能設法避免者；有非人力所能控制者，亦有爲環境所造成者。普通常按其性質分爲下例各種：

（1）錯誤　錯誤之來源由於觀測者或記錄者之疏忽，如讀測尺而少記一整數或誤記分數爲角度之類。在實際工作時除小心從事外，通常均注意於方法與儀器之選擇，使錯誤不易發生，或使易於發覺之。

（2）系統誤差　此種誤差，對於觀測結果常有同一方向之影響，譬如以測尺量某線之長而測尺之一端落於線外，則不論其位置之或左或右，由此種誤差之結果，將使所量得之值均形過長。又如測尺本身之長度有差，則每用此測尺量一距離，結果必生同樣大小之誤差。兩者俱爲系統誤差，但後者則每段距離所發生之誤差影響相同，故又稱之爲常誤差。系統誤差影響結果至鉅，凡足以發生系統誤差者，應儘量使之臻於至小。常誤差多爲儀器方面之誤差，其影響往往易於計算，或用其他方法避免之。

（3）偶然誤差　偶然誤差，亦有名之曰不規則誤差者，其形成之原因，大半由於儀器構造上之限制，環境之影響及人類覺官所不能免之錯誤，例如以刻至公厘之測尺量一距離，則最多僅能估至 1/10 公厘，而人類覺官對於估計常不能絕對正確，故每次估計未必盡能相同。此種誤差卽爲偶然誤差。如用人工方法，或增加儀器之精度，或改良讀數之設備，此種誤差可以減小至某種程度，但無法完全消除；且其影響可正可負，初無規律，此其與錯誤及系統誤差不同之處也。

第三節 偶然誤差之或是率

或是率之理論及算法爲數學之一部，不擬在此詳論。爲應用計，僅將其要旨簡述如下：

或是率計算乃對偶然事件發生之可能性作預計之法也。所謂偶然事件者，卽該事件之是否發生，不能於事先依據任何原則作確定之結論。最淺近之例，如購獎劵者對於其所購獎劵之能否得中，不能依據任何原則於事先推知，故其所購獎劵如適中獎，卽爲偶然事件；但其中獎之可能性，則可以按照或是率之定理計算求之。

一事件發生之或是率爲該事件能發生情形之數目與所有可能情形數目之比例。設有奬券共售出一萬號，而頭奬僅有一個，今有一人購得奬券一張，若問其中頭奬之或是率爲若干，則依前述定義，能發生之情形僅有一個，卽當搖出頭奬號數適與其所購之號數相符之時也；但搖奬之時，所有一萬號碼俱有搖出之可能，故所有可能之情形共有一萬個，據此則該號中頭奬之或是率爲萬分之一。

或是率如以數學方法表示之，則永遠爲一分數。最大時爲1，卽該事件必能發生；最小時爲0，卽該事件決無發生之可能。

前所舉奬券之例，乃極明顯者。然有時不如此明顯之偶然事件亦能以數學方法表示其或是率。其法雖較繁難，而其理則並無二致。觀測時之偶然誤差卽屬此類。偶然誤差之性質，已於第一章第二節詳論，其發生之原因不能確定，其大小更不能循任何方法預爲測定，故其出現，純係偶然之事，亦必合於或是率計算之原則無疑。

誤差定律卽以或是率爲根據，用數學方法表示誤差分佈之定律，首由高斯引證得出。高斯根據此定律❶，始創最小二乘法，以爲平差之用。

偶然誤差初無規律，旣如前述，然則何以又能求出其所謂誤差定律？蓋前所云者，乃指某一次之觀測而言，其偶然誤差之發生，初無規律，不能預知。若觀測之次數增加，至於無窮次，每次觀測均使處於同一環境，則所有偶然誤差大小之分佈，卽有定則，此定則係根據於無窮次之觀測數目而導出。事實上固不能作無窮多次之觀測，但依數學原理，如觀測次數漸漸增多，則其結果必愈近於無窮多次。故吾人求誤差定律亦能以較多次數之觀測爲根據。

今試先就某一誤差出現之或是率討論之。依偶然誤差之定義，吾人可知：

（1）同樣大小之正誤差與負誤差，其出現之或是率必相等。

（2）較小誤差之或是率，必高於較大誤差之或是率。

（3）誤差等於零之或是率應爲最大。

上述三特性雖不能用純數學方法作絕對之引證，然依常理之推測及實際之經驗，對於其必然性，均可加以承認。最要者，卽所謂誤差係指純粹

❶高斯於1794年求出定律，但於1809年始發表。

偶然誤差而言。如有系統誤差在內，則此三特性自不復存在，故吾人亦可用此三特性爲原則，以決定一組誤差之是否爲純粹偶然誤差。

根據上述之三特性或原則，可知一誤差之或是率與其誤差之大小有關。或以數學方法表示之，如一誤差之值爲 ε，則此誤差出現之或是率必爲 ε 之函數。今設以 $f(\varepsilon)$ 表示一誤差發生於 0 與 ε 間之或是率，則一誤差發生於 ε 與 $\varepsilon+d\varepsilon$ 間之或是率必爲：

$$W=f(\varepsilon+d\varepsilon)-f(\varepsilon)=f'(\varepsilon)d\varepsilon=\varphi(\varepsilon)d\varepsilon.$$

因 $d\varepsilon$ 爲一極小之值，故 W 卽代表誤差出現於 ε 與 $\varepsilon+d\varepsilon$ 間之或是率。此函數 $\varphi(\varepsilon)$ 卽謂爲誤差分佈定律，或簡稱爲誤差定律。

一誤差發生於任意兩界數 a 及 b 之間之或是率可以

$$W_a^b=\int_a^b\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

表示之。若 a 及 d 兩界數爲 $-\infty$ 與 $+\infty$，則其或是率必爲 1，因誤差之值必在 $-\infty$ 與 $+\infty$ 之間也。故：

$$W_{-\infty}^{+\infty}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\varepsilon)d\varepsilon=1.$$

欲求此誤差定律，必須作相當之假定。高斯求出此誤差定律時，假定多次觀測結果之數學平均值最近於其眞值。觀測之次數逐漸增加，則其算學平均值卽漸近乎眞值。此外尙有根據不同之假定，求出此同一定律。其最著者爲哈根原子誤差之假定。玆將高斯及哈根引證之法分述於下。

第四節　根據算學平均值之假定以求誤差定律

設吾人量一長度，觀測次數爲 n，而精度相同，n 爲一甚大之數目。今欲由此 n 值求長度之最或是值，此 n 值均由同樣精度之觀測得來，勢不能偏袒任何一値，或放棄任何一值，故數學上最適宜之法乃求此 n 值之算學平均值，而承認此值爲長度之最或是值。若觀測次數 n 漸漸增多而至於無窮，則其算學平均值卽趨近於長度之眞值。現卽根據此假定以求誤差定律 $\varphi(\varepsilon)$ 之公式。

設一組直接觀測之結果爲 $l_1\ l_2\ l_3\ l_4\ \cdots\cdots l_n$，其眞值爲 X，則每次觀測之誤差爲：

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1=X-l_1\\ \varepsilon_2=X-l_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon_n=X-l_n\end{array}\right\}\qquad(1)$$

今將各次觀測所生誤差 ε_1, ε_2, ε_3, ………… ε_n 之或是率以 $\varphi(\varepsilon_1)$, $\varphi(\varepsilon_2)$, $\varphi(\varepsilon_3)$,………… $\varphi(\varepsilon_n)$ 表示之,則按或是率之定律,所有 n 個誤差 ε_1, ε_2, ε_3, ………… ε_n 同時出現之或是率,為各個誤差或是率之乘積,即:

$$\varphi(\varepsilon_1)\cdot\varphi(\varepsilon_2)\cdot\varphi(\varepsilon_3)\cdots\cdots\varphi(\varepsilon_n).\qquad(2)$$

倘 X 為眞值,則此組誤差同時出現之或是率必應為最大。玆為演化之便利計,先化 (2) 為自然對數式,其關係如下:

$$\log\varphi(\varepsilon_1)+\log\varphi(\varepsilon_2)+\cdots\cdots+\log\varphi(\varepsilon_n)=\text{最大值}。\qquad(3)$$

又因 ε_1, ε_2 ……等諸值與 X 值有關係 (見❶),故如將(3)依 X 求微分,而使其結果等於零,俾符合(3)為最大值之條件時,得:

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1}\cdot\frac{d\varepsilon_1}{dX}+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}\cdot\frac{d\varepsilon_2}{dX}+\cdots+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n}\cdot\frac{d\varepsilon_n}{dX}=0\quad(4)$$

由(1)得:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dX}=\frac{d\varepsilon_2}{dX}=\cdots\cdots\cdots=\frac{d\varepsilon_n}{dX}=1,$$

故(4)可寫為:

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1}+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n}=0,$$

亦可作下列寫法:

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 d\varepsilon_1}\varepsilon_1+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 d\varepsilon_2}\varepsilon_2+\cdots\cdots\cdots+\frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n d\varepsilon_n}\varepsilon_n=0.\qquad(5)$$

以上係就誤差出現之或是率求出眞誤差 ε_1, ε_2, ε_3, ……… ε_n 間之關係。假定觀測值 l_1, l_2, l_3, ……… l_n 之算學平均值 x 為最或是值,且當

n 爲無窮大時，x 趨近於眞值，或用數學公式表示之：

$$x=\frac{[l]}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{❶}X, \tag{6}$$

則(1)內之 X 亦可於此情形下代以算學平均值 x，更將(1)內各式相加得：

$$[\varepsilon]=nx-[l]. \tag{7}$$

聯合(6)(7)兩式，卽得下列之關係：

$$[\varepsilon]=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+\varepsilon_n=0 \tag{8}$$

(5)及(8)俱可表示眞誤差 ε_1，ε_2，ε_3，$\cdots\cdots\cdots\cdots\varepsilon_n$ 間之關係，在任何情形之下，兩者均須完全相符，是以(5)內所有 ε_1，$\varepsilon_2\cdots\cdots$ 等之係數，必須相等，因得：

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{\epsilon d\epsilon_1}=\frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{\epsilon d\epsilon_2}=\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{\epsilon d\epsilon_n}=k.$$

k 爲一常數。如對任意一誤差 ϵ 而言，必須

$$\frac{d\log\varphi(\epsilon)}{d\epsilon}=k\epsilon。 \tag{9}$$

由此條件卽可求得誤差定律 $\varphi(\epsilon)$ 之形式。求(9)之積分，得

$$\log\varphi(\varepsilon)=\frac{1}{2}k\,\epsilon^2+c,$$

c 爲積分常數，將對數展開，以 e 爲自然對數之底，則

$$\varphi(\varepsilon)=e^c\cdot e^{\frac{1}{2}k\varepsilon^2}。 \tag{10}$$

由此已可知一誤差或是率之數學表示。其中 k，c 等常數，尙待決定。

根據本章第三節所述之偶然誤差三原則，較小誤差之或是率，必高於較大誤差之或是率。故(10)中之 k 必爲一負數，今以

$$\frac{1}{2}k=-h^2$$

❶ [ ] 表示和數。

表示之，同時令

$$e^c = A,$$

A 爲一新常數，則(10)卽變爲

$$\varphi(\epsilon) = Ae^{-h^2\epsilon^2}. \qquad (11)$$

常數 A 之値可依本章第三節所論：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\epsilon)\, d\epsilon = 1$$

之關係求之，卽

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\epsilon^2}\, d\epsilon = 1. \qquad (12)$$

欲解此定値積分式，吾人設

$$t = h\epsilon, \qquad dt = h\,d\epsilon,$$

以之代入(12)，得

$$\frac{A}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = 1.$$

由積分可求得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}\,, \text{❶}$$

故

$$A = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

代入(11)，卽得誤差定律之公式

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}. \qquad (13)$$

此誤差定律有時亦稱爲高斯誤差定律。高斯導出時卽用上述之方法。

第五節　根據原子誤差之假定以求誤差定律

哈根❷假定每個偶然誤差均係由多數極小之原子誤差所組合而成。

---

❶設此定積分之質爲 I，則 I^2 亦可書爲 $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$. 此乃一旋轉曲面 $Z = e^{-(x^2+y^2)}$ 與 xy 平面間之體積也．此體積以極坐標表示之，則得 $I^2 = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2} dr = \pi$，故 $I = \sqrt{\pi}$.

❷ Hagen: Die Grunnzuge der Wahrscheinlich Keitrechnung. Berlin, 1837.

此種原子誤差彼此均相等，但其符號可正可負。此種假定初視之似覺不甚合理，因原子誤差缺少零值，然若細究原子誤差之各種組合，卽可知零値之誤差亦可出現。如有原子誤差兩個，其值爲 δ，則其正負各種組合已含零値二個，$+2\delta$ 及 -2δ 各一個。如原子誤差之數目增多，則偶然誤差之分佈逐漸合理。表一表示一個乃至六個原子誤差，按所有正負組合構成觀測誤差時，各種誤差之出現次數。

表一　各種誤差之出現次數

n	-6δ	-5δ	-4δ	-3δ	-2δ	$-\delta$	0	$+\delta$	$+2\delta$	$+3\delta$	$+4\delta$	$+5\delta$	$+6\delta$
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

表一所列誤差出現之次數，相當於二項式之係數，故宜由下列開展式求之：

$$(t^{+\delta}+t^{-\delta})^n=t^{n\delta}+(n)_1t^{(n-2)\delta}+\cdots+(n)_it^{(n-2i)\delta}+\cdots$$

如一誤差 ε_i 之大小爲 $(n-2i)\delta$，則其出現之次數卽爲式中以 $(n-2i)\delta$ 爲指數一項之係數，卽 $(n)_i$。其中 δ 代表原子誤差，n 代表原子誤差之數目，如所有誤差之總數目——卽全體觀測次數——爲 N，則依或是率定義，誤差 ε_i 之或是率 $\varphi(\varepsilon_i)$ 爲

$$\varphi(\varepsilon_i)=\frac{(n)_i}{N}, \tag{14}$$

同理可得

$$\varphi(\varepsilon_{i+1})=\frac{(n)_{i+1}}{N}, \tag{15}$$

式中 $\varepsilon_{i+1}=(n-2i-2)\delta$.

由二項式定理：

$$(n)_{i+1}=(n)_i\frac{n-i}{i+1}.$$