高等数学习题解答

（第六、七、八章）

上海化工学院数学教研组

一 九 七 九 年

第六章 不 定 积 分

（一）原函数与不定积分概念

定义 1 设 $f(x)$ 是定义在某区间 I 上的一个已知函数，如果存在一个函数 $F(x)$，使得对于每一点 $x \in I$ 都有

$$F'(x)=f(x) \qquad \text{或} \qquad dF(x)=f(x)dx,$$

那末称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的原函数。

所谓 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$，也就是 $f(x)$ 的原象 $F(x)$。

定义 2 如果函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那末 $f(x)$ 的全部原函数 $F(x)+C$ 叫做 $f(x)$ 的不定积分，记作

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

其中 $F'(x)=f(x)$，C 是任意常数。

函数 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积式，x 叫做积分变量，C 叫做积分常数，符号 $\int$ 为积分号。

所谓 $f(x)$ 的不定积分，也就是 $f(x)$ 的全部原象。如果函数 $f(x)$ 在某区间上连续，则在此区间上 $f(x)$ 必存在原函数。

已知函数 $f(x)$ 求原函数 $F(x)$，在几何上就是要找一条曲线 $y=F(x)$，使它在任意一点 x 处的切线斜率恰好等于 $f(x)$。这条曲线叫做积分曲线。

6-1. 试举几个已知函数的原函数的例子。

如因 $(x^4)'=4x^3$ 故 x^4 是 $4x^3$ 的原函数。

6-2. 直接利用不定积分定义。验证下列各式：

(1) $\int x^4\,dx=\frac{x^5}{5}+C$；

(2) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$；

(3) $\int \sin 2x\,dx=-\frac{\cos 2x}{2}+C$；

(4) $\int (1+x)dx=x+\frac{x^2}{2}+C$；

(5) $\int dx=x+C$。

6-3. 验证：

$$\int 2\sin x\cos x\,dx=\sin^2 x+C;$$

$$\int 2\sin x\cos x\,dx=-\cos^2 x+C.$$

能不能说 $2\sin x\cos x$ 有两族原函数？为什么？

6-4. 作出积分曲线族 $y=\int 2x\,dx=x^2+C$ 的图形，并找出经过点(1,2)的那一条积分曲线的方程及图形。

(二)不定积分的性质与基本积分公式

1. 不定积分的简单性质：

性质 1. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$ 或 $d\int f(x)dx=f(x)dx$;

$\int f'(x)dx=f(x)+C$ 或 $\int df(x)=f(x)+C$.

性质 2. $\int Kf(x)dx=K\int f(x)dx$ K 是不等于零的常数。

性质 3. $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$.

这个性质可推广到有限多个函数上去。

不定积分也具有线性变换的线性性质与齐次性质。

不定积分也可以看作是一种映射(一个元素对应多个元素)。

2. 基本积分公式：

(1) $\int x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,(n\neq-1)$ (2) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$;

(3) $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$; (4) $\int e^x dx=e^x+C$;

(5) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$; (6) $\int\cos x\,dx=\sin x+C$;

(7) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\int\sec^2 x\,dx=\operatorname{tg} x+C$; (8) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=\int\csc^2 x\,dx=-\operatorname{ctg} x+C$;

(9) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$; (10) $\int\dfrac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+C$.

6-5. 求下列不定积分：

(1) $\int\sqrt[3]{2}\,dx$; (2) $\int\dfrac{1}{x^3}dx$;

(3) $\int x\sqrt{x}\,dx$; (4) $\int\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x^2}\right)dx$;

(5) $\int(3x^{0.4}-5x^{-0.7}+1)\,dx$; (6) $\int\dfrac{dh}{\sqrt{2gh}}$;

(7) $\int\dfrac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; (8) $\int\dfrac{x^4-10x+5}{x}\,dx$;

(9) $\int \frac{x^3-27}{x-3}\,dx$;　　(10) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$;

(11) $\int 2^{x+5}\,dx$;　　(12) $\boxed{\int 3^x e^x\,dx;}$

(13) $\int (2\sin x-3\cos x)\,dx$;　　(14) $\int \frac{2+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$;

(15) $\boxed{\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx;}$　　(16) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3}{1+x^2}\right)dx$;

(17) $\int (5\sec^2 x+3\csc^2 x)\,dx$;　　(18) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$;

(19) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$;　　(20) $\int \sec x(\sec x-\operatorname{tg} x)\,dx$。

（三）基本积分公式的扩充

积分形式不变性：

定理　如果
$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$
则
$$\int f(u)\,du=F(u)+C;$$
其中 $u=\phi(x)$ 是 x 的任一可微函数。

6-6.　(1～50)求下列不定积分：

(1) $\int (1-x)^d\,dx$;　　(2) $\int \sqrt{2+3x}\,dx$;

(3) $\int (1+2x^2)^2 x\,dx$;　　(4) $\int \frac{dx}{2x-1}$;

(5) $\int \frac{dx}{1-x}$;　　(6) $\int \frac{x\,dx}{4x^2+1}$;

(7) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;　　(8) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$;

(9) $\int \sin(3x+1)\,dx$;　　(10) $\int \cos(2-5x)\,dx$;

(11) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$;　　(12) $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^3}\,dx$;

(13) $\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$;　　(14) $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-3x+8}$;

(15) $\int e^{-3x}\,dx$;　　(16) $\int 2xe^{-x^2}\,dx$;

(17) $\int xe^{(1-x^2)}\,dx$;　　(18) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$;

(19) $\int \frac{1}{3^x}\,dx$;　　(20) $\int e^{3x}\sin e^{3x}\,dx$;

(21) $\int x\cos x^2\,dx$;　　(22) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$;

(23) $\int x^2 \sec^2 x^3\, dx$;　　(24) $\int \operatorname{ctg}^3 2x\, dx$;

(25) $\int \frac{\sin^2 3x}{1-\cos 3x}\, dx$;　　(26) $\int \frac{2}{\sin^2 2x}\, dx$;

(27) $\int \frac{dx}{9+4x^2}$;　　(28) $\int \frac{x\, dx}{4+x^4}$;

(29) $\int \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}}$;　　(30) $\int \frac{dx}{3-4x}$;

(31) $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$;　　(32) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$;

(33) $\int \frac{x}{3-x^2}\, dx$;　　(34) $\int x^3 \sqrt[3]{1-x^4}\, dx$;

(35) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$;　　(36) $\int \frac{x}{x+1}\, dx$;

(37) $\int \sin 3x \sin x\, dx$;　　(38) $\int \cos 3x \cos x\, dx$;

(39) $\int \sin 7x \cos 3x\, dx$;　　(40) $\int \frac{2+\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx$;

(41) $\int \frac{1-\cos x}{\sin x}\, dx$;　　(42) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx$;

(43) $\int \frac{1}{\cos x \cdot \sin x}\, dx$;　　(44) $\int \operatorname{tg} x \sec^5 x\, dx$;

(45) $\int \operatorname{tg}^3 4x\, dx$;　　(46) $\int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\, dx$;

(47) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}}$;　　(48) $\int \sin^3(2x+1)\, dx$;

(49) $\int \cos^4 x\, dx$;　　(50) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

（四）换元积分法

定理 1　设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，$u=\phi(x)$ 是 x 的可微函数，

则
$$\int f[\phi(x)]\phi'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F[\phi(x)]+C. \qquad (1)$$

定理 2　设 $x=\phi(u)$ 在区间 I 上是单调可导函数，并且 $\phi'(u)\neq 0$；又设 $f[\phi(u)]\phi'(u)$ 具有原函数 $F(u)$

则
$$\int f(x)dx = \int f[\phi(u)]\phi'(u)du = F(u)+C = F[\phi(x)]+C. \qquad (2)$$

6-7．（1～20）求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$;　　(2) $\int \frac{\cos\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}}$;

(3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\, dx$;　　(4) $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$;

(5) $\int x^3 e^{1-x^4} dx$;

(6) $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$;

(7) $\int \sqrt{1-4x^2} dx$;

(8) $\int \sqrt{1+9x^2} dx$;

(9) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$;

(10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

(11) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$;

(12) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$;

(13) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$;

(14) $\int \sqrt{4+9x^2} dx$;

(15) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$;

(16) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

(17) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$;

(18) $\int x^2\sqrt{4-x^2} dx$;

(19) $\int \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} dx$;

(20) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

（五）分部积分法

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$是变量 x 的两个可微函数，而且具有连续导数 $u'(x)$，$v'(x)$，根据乘积的微分公式，有

$$d(u\cdot v)=udv+vdu,$$

移项得

$$udv=d(uv)-vdu,$$

于是有

$$\int udv=uv-\int vdu$$

这个式子称为分部积分公式．

应用这个公式关键在于对 u 和 dv 的正确选择．一般：1°．由 dv 易于求 v；

2°．要使 $\int vdu$ 比 $\int udv$ 简单易求．

6-8．(1～20)求下列不定积分：

(1) $\int xe^{-x} dx$；

(2) $\int x \sin 2x\, dx$;

(3) $\int (x^2+1)\ln x\, dx$;

(4) $\int \arccos x\, dx$;

(5) $\int \ln(1+x^2)dx$;

(6) $\int \sec^3 x\, dx$;

(7) $\int e^{\sqrt{x}} dx$;

(8) $\int x\, \mathrm{arc\,tg}\, x\, dx$;

(9) $\int e^{2x} \cos 3x\, dx$;

(10) $\int x^5 \sin x^2\, dx$;

(11) $\int (x^2+7x-5)\cos 2x\, dx$;

(12) $\int x^2 \ln(x-3)dx$;

(13) $\int (\arcsin x)^2 dx$;

(14) $\int e^x \sin^2 x\, dx$;

(15) $\int \sin(\ln x) dx$;

(16) $\int (\ln x)^2 dx$;

(17) $\int x \sin x \cos x\, dx$;

(18) $\int (x^2-1)\sin 2x\, dx$;

(19) $\int x^2 \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$;

(20) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$.

6-9 (1—65)换元积分法和分部积分法杂题：

(1) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\, dx$;

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$;

(3) $\int x^5 e^{x^2} dx$;

(4) $\int \frac{\cos^3 \theta}{\sin^4 \theta}\, d\theta$;

(5) $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$;

(6) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\, dx$;

(7) $\int (\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x) dx$;

(8) $\int \left(\frac{\sec x}{1+\mathrm{tg}\, x}\right)^2 dx$;

(9) $\int \frac{\cos 2t}{\sin^2 t}\, dt$;

(10) $\int \frac{1+\mathrm{tg}\, x}{\sin 2x}\, dx$;

(11) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx$;

(12) $\int e^{e^x+x}\, dx$;

(13) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\, dx$;

(14) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

(15) $\int \frac{2+\ln x}{x}\, dx$;

(16) $\int x \sin x \cos x\, dx$;

(17) $\int x \cos^2 x\, dx$;

(18) $\int x\, \mathrm{tg}^2 x\, dx$;

(19) $\int x^2 \cos^2 x\, dx$;

(20) $\int \mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}^3 x\, dx$;

(21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;

(22) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+17}\, dx$;

(23) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2+4x}}$;

(24) $\int \frac{\lg x}{x^3}\, dx$;

(25) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x}\, dx$;

(26) $\int \cos^4 x\, dx$;

(27) $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}\, dx$;

(28) $\int \frac{x^7\, dx}{(1+x^4)^2}$;

(29) $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-9}}$;

(30) $\int \frac{dx}{(2x-1)^2+4}$;

(31) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\, dx$;

(32) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$;

(33) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

(34) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

(35) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$;

(36) $\int \frac{dx}{4x^2+4x-3}$;

(37) $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+8x+5}}$;

(38) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-1}}$;

(39) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

(40) $\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx$; → 拆开

(41) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx$;

(42) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

(43) $\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}\,dx$;

(44) $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$;

(45) $\int \sin\ln x\,dx$;

(46) $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$;

(47) $\int \operatorname{ctg}(2x+1)\,dx$;

(48) $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$;

(49) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$;

(50) $\int \operatorname{tg}^5 x\sec^3 x\,dx$;

(51) $\int \operatorname{ctg}^5 x\csc^4 x\,dx$;

(52) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

(53) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

(54) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$;

(55) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$;

(56) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

(57) $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$;

(58) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

(59) $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx$;

(60)* $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$;

(61)* $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$;

(62)* $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$;

(63) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$;

(64) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

(65) $\int \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

（六）有理函数的积分法

有理函数是指可以写成两个多项式的商的形式的函数：

$$R(x)=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a^n}$$

其中 m，n 是正整数。当 $m<n$，$R(x)$ 叫真分式。$m\geqslant n$ 时 $R(x)$ 叫假分式。假分式总可以用多项式的除法化为一个多项式与一个真分式之和。多项式的积分已解决。真分式按分母的一次或二次多项式因式，通过待定系数法分解成若干部分分式之和，即下述四种形式：

① $\dfrac{A}{x-a}$　　② $\dfrac{A}{(x-a)^n}$

③ $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}(p^2<4q)$　　④ $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}(p^2<4q)$。

之和，而这四种形式的函数积分可以积得出来的。

6-10．求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{4-x^2}dx$;　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{3x^2+4x-7}dx$;

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}dx$;　　(4) $\displaystyle\int\frac{2x+5}{x^2+4x+5}dx$;

(5) $\displaystyle\int\frac{2x}{5-4x+x^2}dx$;　　(6) $\displaystyle\int\frac{x}{8+4x+x^2}dx$;

(7) $\displaystyle\int\frac{1}{2+2x+x^2}dx$;　　(8) $\displaystyle\int\frac{1}{9+12x+9x^2}dx$;

(9) $\displaystyle\int\frac{4x+2}{x^2+x+1}dx$;　　(10) $\displaystyle\int\frac{1}{(a-x)(x-b)}dx$;

(11) $\displaystyle\int\frac{x}{(1+x)(x^2+1)}dx$;　　(12) $\displaystyle\int\frac{2x-7}{4x^2+12x+25}dx$;

(13) $\displaystyle\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$;　　(14) $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2-3x+2)^2}dx$;

(15) $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$;　　(16) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}dx$;

(17) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx$;　　(18) $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$;

(19) $\displaystyle\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$;　　(20) $\displaystyle\int\frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$;

(21) $\displaystyle\int\frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$;　　(22) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$;

(23) $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$;　　(24) $\displaystyle\int\frac{1}{x^4-x^2}dx$;

(25) $\displaystyle\int\frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)}dx$;　　(26) $\displaystyle\int\frac{x^2}{1-x^4}dx$;

(27) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$;　　(28) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x+3}dx$;

(29) $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$;　　(30) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

(31) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$;　　(32) $\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$;

(33) $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}dx$;　　(34) $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$.

（七）三角函数有理式的积分

三角函数经过四则运算所组成的式子叫三角函数有理式。由于 $\operatorname{tg} x$，$\operatorname{ctg} x$ 等可以用 $\sin x$，$\cos x$ 表示，故用 $R(\sin x, \cos x)$表示三角函数的有理式。

一般积分 $\int (\sin x, \cos x)dx$

可用代换 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ 即 $x=2\operatorname{arc\,tg} t$ 化为 t 的有理函数的积分，即

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

但也要注意，有些三角有理函数积分通过公式更容易计算些。

6-11. 计算下列不定积分：

(1) $\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx$;　　(2) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$;

(3) $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$;　　(4) $\int \operatorname{tg}^2 x\sec^2 x\,dx$;

(5) $\int \operatorname{tg} x\sec^5 x\,dx$;　　(6) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$;

(7) $\int \frac{1}{\sin x+\operatorname{tg} x}dx$;　　(8) $\int \frac{1}{1+2\operatorname{tg} x}dx$;

(9) $\int \frac{1}{2-\sin^2 x}dx$;　　(10) $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$;

(11) $\int \sin^4 x\,dx$;　　(12) $\int \frac{1}{(1+\cos x)^2}dx$;

(13) $\int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+\sin^2 x}dx$;　　(14) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$;

(15) $\int \frac{1}{a\cos x+b\sin x}dx$;　　(16) $\int \frac{1}{4+5\cos x}dx$;

(17) $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx$;　　(18) $\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}dx$;

(19) $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin^2 x}dx$;　　(20) $\int \frac{\operatorname{tg}\varphi\cos^6\varphi}{\sin^4\varphi}d\varphi$;

(21) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$;　　(22) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$;

(23) $\int \frac{1}{1+\cos x}dx$;　　(24) $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$;

(25) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$;　　(26) $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}dx$;

(27) $\int\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x+\cos x-1}dx$;　　(28) $\int\frac{1}{\sin 2x-2\sin x}dx$;

(29) $\int\frac{1}{3+\sin^2 x}dx$;　　(30) $\int\frac{1}{3+\cos x}dx$;

(31) $\int\frac{1}{2+\sin x}dx$;　　(32) $\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$;

(33) $\int\frac{1}{2\sin x-\cos x+5}dx$;　　(34) $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.

（八）简单代数无理式的积分

设 $R(u,v)$ 表示对 u 及 v 只施行四则运算所组成的式子。

1. 对于形如 $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$ 或 $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ 的无理函数的积分。

令 代换 $\sqrt[n]{ax+b}=t$ 　　或 　　$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$

就可以将 $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$ 或 $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ 的积分化为 t 的有理函数的积分。

2. 形如 $R(x,\sqrt{a^2-x^2})$ 或 $R(x,\sqrt{x^2\pm a^2})$ 的无理函数积分。

含 $\sqrt{a^2-x^2}$ 用 $x=a\sin t$

含 $\sqrt{a^2+x^2}$ 用 $x=a\operatorname{tg} t$

含 $\sqrt{x^2-a^2}$ 用 $x=a\sec t$

化为三角函数有理式的积分。

3. 形如 $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ 的无理积分，一般先对二次三项式 ax^2+bx+c 利用配方法，然后应用三角代换化为三角函数有理式的积分。

9-12. 求下列不定积分

(1) $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$;　　(2) $\int\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$;

(3) $\int\frac{1}{\sqrt{16x^2+8x+5}}dx$;　　(4) $\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$;

(5) $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$;　　(6) $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$;

(7) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$;　　(8) $\int\frac{x}{\sqrt{5+x+x^2}}dx$;

(9) $\int\frac{x^3}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$;　　(10) $\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}dx$;

(11) $\int\frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx$;　　(12) $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$;

(13) $\int\frac{1}{x\sqrt{3x^2+4x+1}}dx$;　　(14) $\int\frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}dx$;

(15) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}dx$；

(16) $\int \frac{x}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}dx$；

(17) $\int \frac{2-\sqrt{2x+3}}{1-2x}dx$；

(18) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}dx$；

(19) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{x}dx$；

(20) $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}dx$；

(21) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$；

(22) $\int \frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}dx$；

(23) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$；

(24) $\int \frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}dx$；

(25) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$ (其中$a\neq 0, a, b, m$均为常数)；

(26) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$；

(27) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$；

(28) $\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}}dx$；

(29) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx$；

(30) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$。

(九)利用积分表计算积分

应用现成的积分表，只要按所求的积分看表中有没有完全相同的形式，或虽不完全相同而可以化到相同的形式。

6-13. 利用积分表计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$；

(2) $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$；

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x+x^2}}dx$；

(4) $\int \sqrt{2x^2+9}\,dx$；

(5) $\int \sqrt{3x^2-3}\,dx$；

(6) $\int e^{2x}\cos x\,dx$；

(7) $\int x\arcsin\frac{x}{2}dx$；

(8) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$；

(9) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$；

(10) $\int e^{-2x}\sin x\,dx$；

(11) $\int \sin 3x\sin 5x\,dx$；

(12) $\int \ln^3 x\,dx$；

(13) $\int \frac{1}{x^2(1-x)}dx$；

(14) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$；

(15) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$；

(16) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$；

(17) $\int \frac{x}{(2+3x)^2}dx$；

(18) $\int \cos^6 x\,dx$；

(19) $\int x^2\sqrt{x^2-2}\,dx$;　　(20) $\int \frac{1}{2+5\cos x}\,dx$;

(21) $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+25}}\,dx$;　　(22) $\int \frac{1}{2-4x^2}\,dx$;

(23) $\int \frac{1}{4x^2+4x-3}\,dx$;　　(24) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-4}}\,dx$;

(25) $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$;　　(26) $\int \cos^5 x\,dx$;

(27) $\int \sin 2x\cos 7x\,dx$;　　(28) $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+9}}\,dx$;

(29) $\int x^2 e^{3x}\,dx$;　　(30) $\int \frac{1}{\sqrt{2+x-9x^2}}\,dx$.

（十）杂题

6-14. 在下列问题中，设曲线 $y=f(x)$在任一点的切线斜率为已知，并经过指定点，试求曲线方程。

(1) $y'=\sqrt[3]{x^2}$，(1,2)；　　(2) $y'=\cos x$，$(\pi/2,1)$。

6-15. 设 $V=S'=\sqrt{t^2-1}$，且当 $t=1$ 时 $S=2$，试求 S 与 t 之间的函数关系。

6-16. 在平面上有一运动的质点，如果它在 x 轴方向和 y 轴方向的分速度分别为 $V_x=5\sin t$，　$V_y=2\cos t$，　又 $x|_{t=0}=5$，$y|_{t=0}=0$。求

(1) 时间为 t 时，质点所在位置；(2) 质点的运动方程。

6-17. 设作直线运动的质点，其速度已知为

$$V(t)=\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{2}t^3,$$

又开始时它位于原点。

(1) 求路程与时间的关系。

(2) 当 $t=2$ 时，质点位于何处？

(3) 运动进行后什么时候质点又位于原点？

6-18. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x^2dx}{(1-x)^{10}}$;　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\,dx$;

(3) $\int \frac{\cos\theta}{4+9\sin^2\theta}\,d\theta$;　　(4) $\int \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^3}\,d\theta$;

(5) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$;　　(6) $\int \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\,dx$;

(7) $\int \frac{e^x}{3+4e^x}\,dx$;　　(8) $\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}\,dx$;

(9) $\int \sin^2(\omega t+\varphi)\,dt$;　　(10) $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$;

(11) $\int \frac{x^3-1}{x^2+2}\,dx$;　　(12) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$;

(13) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;　(14) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

(15) $\int 2x\,e^{-\frac{x}{2}}\,dx$;　(16) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

(17) $\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$;　(18) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$;

(19) $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}\,dx$;　(20) $\int \sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x\,dx$;

(21) $\int x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$;　(22) $\int x\sin^2 x\,dx$;

(23) $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx$;　(24) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$;

(25) $\int \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx$;　(26) $\int \frac{1}{3x^2-2x+2}\,dx$;

(27) $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$;　(28) $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}}\,dx$;

(29) $\int \frac{1}{\sqrt{x(3x+5)}}\,dx$;　(30) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\,dx$;

(31) $\int x\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}\,dx$;　(32) $\int x\cos^2\frac{x}{2}\,dx$;

(33) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$;　(34) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$;

(35) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$;　(36) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$;

(37) $\int \frac{-1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$;　(38) $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$;

(39) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^3}\,dx$;　(40) $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$;

(41) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$;　(42) $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$;

(43) $\int \frac{x^3}{1+\sqrt{x^4+1}}\,dx$;　(44) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$;

(45) $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$;　(46) $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

(47) $\int \cos^2 2x\,dx$;　(48) $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$;

(49) $\int \sin 2x\cos 4x\,dx$;　(50) $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$;

(51) $\int \cos 4x\cos 7x\,dx$;　(52) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$;

(53) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx$;

(54) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x \, dx$;

(55) $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x \, dx$;

(56) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$;

(57) $\int \sin\frac{1}{4}x \cos\frac{3}{4}x \, dx$;

(58) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$;

(59) $\int \sqrt{e^x - 1} \, dx$;

(60) $\int e^{2x^2 + \ln x} \, dx$;

(61) $\int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$;

(62) $\int \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx$;

(63) $\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} dx$;

(64) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$;

(65) $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} dx$;

(66) $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx$;

(67) $\int \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} dx$;

(68) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;

(69) $\int \frac{x}{(1-x)^3} dx$;

(70) $\int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx$;

(71) $\int \frac{1+\cos x}{x + \sin x} dx$;

(72) $\int \ln(\ln x) \frac{dx}{x}$;

(73) $\int \sqrt{x} \sin\sqrt{x} \, dx$;

(74) $\int \ln(1+x^2) dx$;

(75) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$;

(76) $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$;

(77) $\int \frac{1}{16 - x^4} dx$;

(78) $\int \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$.

6-19. 对于$\int \sin x \, dx$可以这样来求:

$$\int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, d(2x).$$

故有 $\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$。但另一方面也可以这样求:

$$\int \sin 2x \, dx = 2\int \sin x d(\sin x) = \sin^2 x + C.$$

试说明这两个结果并不矛盾。

第七章 定 积 分

（一）定积分的概念

(1) 定义：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$，把区间 $[a,b]$ 分成几个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，其长度各是 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2\cdots n)$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i：$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$，并作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 的和：

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

如果不论区间 $[a,b]$ 分成个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 怎样分法及点 ξ_i 怎样取法，这和 I_n 当分点无限增多（记作 $n\to\infty$）而每一小区间无限缩小〔记作 $\|\Delta x\|\to 0$（$\|\Delta x\|$ 表示 Δx_i $i=1,2,\cdots n$ 中最大者）〕时的极限存在。

即设
$$I=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \|\Delta x\|\to 0}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

则这个极限值 I 叫做 $f(x)$ 从 a 到 b（或在区间 $[a,b]$ 上）的定积分。

记作
$$\int_a^b f(x)dx=I=\lim_{\substack{n\to\infty\\ (\|\Delta x\|\to 0)}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

$f(x)$——被积函数，　　　　x——积分变量，

$[a,b]$——积分区间，　　　　$f(x)dx$——被积表达式，

a,b——积分下限与上限。

(2) 积分几何意义：

它是介于 x 轴，函数 $f(x)$ 的图形及纵线 $x=a$，$x=b$ 之间的各部分面积的代数和；在 x 轴上方的面积取正号，在 x 轴下方的面积取负号。

7-1. 利用公式 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 或 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，计算下列和式：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{n}\frac{16(i-1)}{n^2}$；　　　　(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\cdot\frac{i^3}{n^3}$.

7-2. 用积分和，近似表示抛物线 $y=\dfrac{x^2}{2}$，两直线 $x=3$，$x=6$ 和横轴所围成的曲边梯形的面积 A，并通过求这个和式的极限，计算出 A 的精确值。

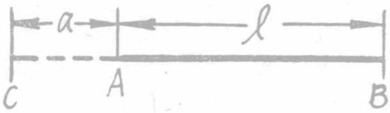
7-3. 把质量为 m 的物体，从地球表面提升到离地面高度为 H 的位置，克服地球引力是需要作功的。已知地心对物体的引力按以下规律确定：$F=mg\cdot\dfrac{R^2}{r^2}$，其中 g—重力加速度，

m—物体的质量，R—地球半径，r—物体与地心之间的距离．试用定积分表示克服地心引力所作的功．

7-4．设有一长为L的细棒AB及一质量为m的质点C，质点C在棒的延长线上与棒的A端相距为a（如图），棒的线密度为常数ρ．（单位长度所具有的质量叫线密度）．试用定积分表示棒AB对质点C的引力．（提示：两质点相互作用由万有引力定律确定：

$$F=k\cdot\frac{mM}{r^2},$$

其中m，M为质点的质量，r是两质点间的距离）



7-5．自由落体的速度V等于gt，其中g是重力加速度．试应用定积分定义求前5秒钟内物体下落的路程．

7-6．应用定积分定义计算由抛物线$y=x^2+1$，两直线$x=a$，$x=b(b>a)$及横轴所围成的图形的面积．

7-7．放射性物体的分解速度V是时间t的函数$V=v(t)$，试表示放射性物体由时间T_0到T_1所分解的质量m：

（a）用积分和式表示其近似值，

（b）用积分表示其准确值．

7-8．应用定积分定义计算下列积分：

(1) $\int_a^b x\,dx\quad(a<b)$；　　(2) $\int_{-1}^2 x^2\,dx$；

(3) $\int_0^1 e^x\,dx$　（提示：将积分区间分成n等分）；

(4) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$　（提示：使分点的坐标成几何级数1，m，m^2，$\cdots m^n$其中$m=2^{\frac{1}{n}}$）．

7-9．根据定积分的几何意义，判断下列定积分的值是正是负？（不必计算）

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$；　　(2) $\int_{-3}^2 \sin x\,dx$；

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x\,dx=0$；　　(4) $\int_{-1}^2 x^2\,dx$．

7-10．利用定积分的几何意义说明：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=0.$$

7-11．利用定积分的几何意义说明：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx.$$